

Partiel du 10 novembre 2007

durée 3h

Les calculatrices sont autorisées, mais les téléphones portables, tous les outils de communication et tous les documents sont strictement interdits. Il est interdit de partir pendant la première heure, et de sortir sans autorisation par la suite. Toutes les réponses seront clairement justifiées, et sinon seront considérées nulles. Ce partiel est divisé en trois sections indépendantes :

- Dans la partie 1, des questions de cours vous sont proposées.
 - Ensuite, le problème principal, intitulé « L'attraction à élastiques du clown Zygomar », regroupe les parties 2, 3 et 4.
 - Enfin, la partie 5 vous propose de traiter les données d'une expérience sur un circuit RLC série.
- Vous pouvez traiter chacune de ces trois sections indépendantes dans l'ordre que vous souhaitez. Vous préciserez à chaque fois le numéro de la question.

1 Questions de cours

Question 1 Énoncez la loi de Hooke.

Question 2 Dans le cas d'un oscillateur à un degré de liberté, expliquez clairement et succinctement ce qu'est un oscillateur harmonique. Donnez trois exemples concrets distincts, sans les développer.

Question 3 Dans le cas d'un oscillateur à 2 degrés de liberté, donnez la définition d'un mode propre.

2 Introduction : L'attraction à élastiques du clown Zygomar

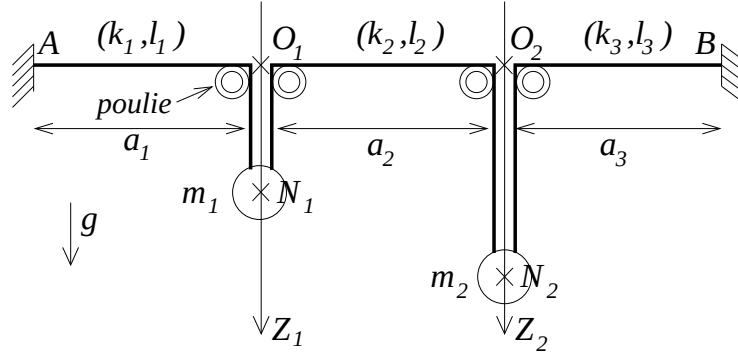


FIG. 1 – Schéma de l'attraction à élastiques en oscillations libres.

Le célèbre clown Zygomar vient d'acquiescer l'attraction à sensations présentée sur la figure 1. Cette attraction est constituée de deux nacelles sur lesquelles les plus téméraires peuvent s'asseoir. La masse de la nacelle de gauche (respectivement de droite) sur le schéma est m_1 (respectivement m_2) quand elle est chargée. Les nacelles sont contraintes de se mouvoir verticalement sur des rails lubrifiés avec des huiles dont les coefficients de frottements visqueux sont notés γ_1 (rail de gauche) et γ_2 (rail de droite). Afin de simplifier l'étude, Zygomar suppose que les nacelles sont ponctuelles et repérées par les altitudes z_1 et z_2 des points N_1 et N_2 . Chaque nacelle est soutenue par deux élastiques. L'élastique de gauche est fixé en A et en N_1 , l'élastique central en N_1 et N_2 et l'élastique de droite en N_2 et B . Quatre poulies parfaites soutiennent les élastiques en O_1 et O_2 . Les distances fixes AO_1 , O_1O_2 et O_2B sont respectivement notées a_1 , a_2 et a_3 . Zygomar fait l'hypothèse que les forces exercées par les élastiques suivent la loi de Hooke. Il note k_1 , k_2 et k_3 les raideurs des élastiques et l_1 , l_2 et l_3 leurs longueurs à vide (cf. figure 1).

3 Oscillations libres

Dans un premier temps, une coupure d'électricité oblige Zygomar à se focaliser sur les oscillations libres de son attraction (figure 1).

Question 4 Déterminez les équations du mouvement de chacune des nacelles (variables z_1 et z_2) en précisant quels systèmes vous considérez et quel(s) théorème(s) vous appliquez.

Question 5 On définit les écarts à l'équilibre $\psi_1 = z_1 - z_{1eq}$ et $\psi_2 = z_2 - z_{2eq}$. Sans déterminer les positions à l'équilibre z_{1eq} et z_{2eq} , montrez que ψ_1 et ψ_2 obéissent au système suivant :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d\psi_1}{dt} + (k_1 + k_2)\psi_1 + k_2\psi_2 = 0 \\ m_2 \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d\psi_2}{dt} + (k_3 + k_2)\psi_2 + k_2\psi_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

3.1 Premier cas : Cas général sans frottements

Zygomar a invité des amis : une classe d'élèves de maternelle qu'il fait asseoir dans la nacelle de gauche (masse totale m_1) et l'équipe du XV de France qu'il installe dans la nacelle de droite (masse totale m_2). Il décide de bien huiler les rails avec son huile magique et il obtient un frottement négligeable.

Question 6 Écrivez le système simplifié d'équations différentielles dans ce cas particulier.

Question 7 Trouvez l'expression des pulsations propres Ω_- et Ω_+ de ce système d'équations différentielles. Vous choisirez $\Omega_- \leq \Omega_+$.

3.2 Deuxième cas : Cas symétrique avec frottements

Zygomar décide de mélanger les enfants et les rugbymen. Il constate que les masses des deux nacelles chargées sont égales, $m = m_1 = m_2$. Il remarque également qu'il manque d'huile et que les frottements ne sont plus négligeables. Il note alors $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ le coefficient de frottements visqueux sur les rails. Enfin, il se souvient que les deux ressorts extérieurs ont la même raideur $k_1 = k_3$.

Question 8 Simplifiez le système du cas général (équations 1) en utilisant les nouvelles hypothèses. Soient $\psi_a = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$ et $\psi_b = \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2)$. À quel système d'équations différentielles obéissent les variables ψ_a et ψ_b ? Pourquoi a-t-on introduit ces variables?

Question 9 Résolvez le système et donnez la forme générale de $\psi_a(t)$ et $\psi_b(t)$.

Question 10 Déduisez alors la forme générale de $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$. Commentez les expressions obtenues.

4 Oscillations forcées

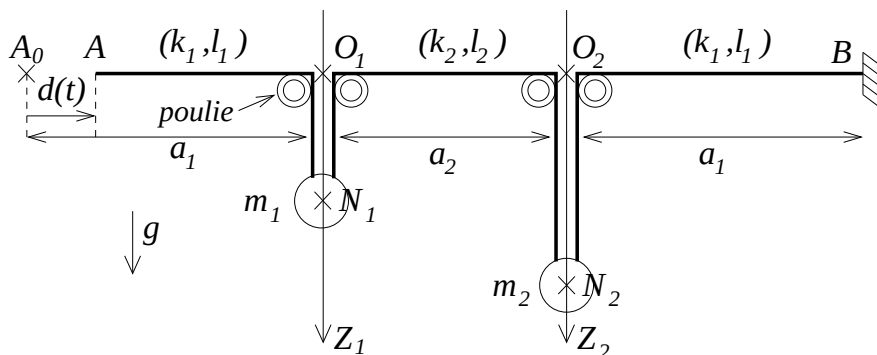


FIG. 2 – Schéma de l'attraction à élastiques avec forçage en A.

L'électricité étant rétablie, Zygomar allume l'attraction. Il peut ainsi faire varier sinusoidalement, $d(t) = d_0 \cos(\Omega t)$, la position A du point d'attachement de l'élastique de gauche autour de sa position d'origine A_0 telle que $A_0 O_1 = a_1$ (cf. figure 2).

Question 11 Expliquez qualitativement pour quelle raison Zygomar doit attendre un certain temps avant de pouvoir considérer que son attraction fonctionne en régime permanent.

Une fois la lumière revenue, Zygomar a retrouvé un bidon de son huile magique et l'utilise sur les rails pour négliger les frottements. De plus, son idée de mélanger les rugbymen et les enfants paraît plaire et les masses des nacelles en charge sont de nouveau identiques, $m_1 = m_2 = m$. Enfin, Zygomar garde en mémoire que les deux élastiques extérieurs sont identiques, $k_1 = k_3$.

Question 12 Établissez le système d'équations différentielles régissant l'évolution de Ψ_1 et Ψ_2 .

Question 13 En reprenant les notations de la question 8, donnez les deux équations différentielles auxquelles obéissent ψ_a et ψ_b .

Question 14 Sans omettre que Zygomar étudie le régime permanent, donnez les solutions $\psi_a(t)$ et $\psi_b(t)$ de ces équations. Déduisez-en $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$.

Question 15 Tracez qualitativement en justifiant les éléments essentiels du graphique, les amplitudes des oscillations de ψ_1 et ψ_2 en fonction de la pulsation de forçage Ω .

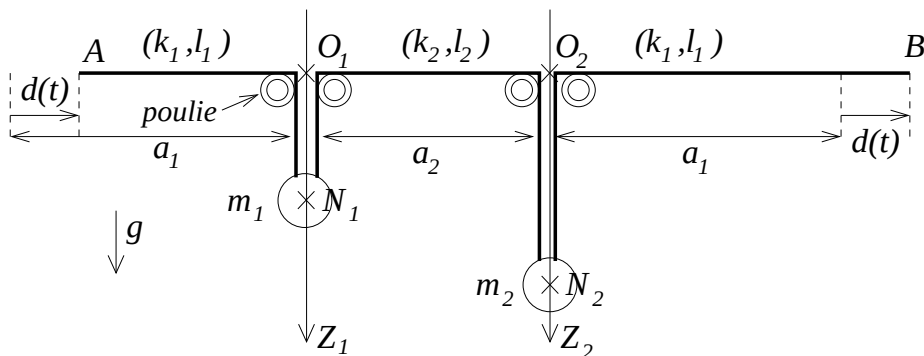


FIG. 3 – Schéma de l'attraction à élastiques avec forçage aux deux extrémités A et B.

Question 16 Zygomar modifie le mécanisme de son attraction pour faire varier sinusoidalement, $d(t) = d_0 \cos(\Omega t)$, les positions des points d'attache A et B des deux élastiques extérieurs comme montré sur la figure 3. Sans refaire aucun calcul mais en explicitant toutes les étapes du raisonnement qualitatif, tracez la nouvelle allure du graphique des amplitudes Ψ_1 et Ψ_2 en fonction de Ω .

Question 17 Une commission de sécurité des attractions de clown a écrit : « Pour des raisons de sécurité, nous interdisons formellement à M. Zygomar d'utiliser son huile magique sur son attraction à élastiques. ». Est-ce que cette interdiction est justifiée selon vous ?

5 Analyse d'une courbe de résonance

Un étudiant construit la courbe de résonance de la figure 4 à partir de ses mesures expérimentales sur un circuit RLC série. V représente la tension aux bornes du condensateur et f est la fréquence de l'excitation. La courbe fournie en annexe est à rendre avec votre copie. L'étudiant note respectivement ω_0 et Q la pulsation propre du circuit non amorti et le facteur de qualité du circuit. Il se souvient qu'en présence d'un générateur idéal de tension $V_0 \cos(\Omega t)$ en série avec le circuit RLC, la tension aux bornes du condensateur, notée $V(t)$, obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = V_0 \omega_0^2 \exp(\Omega t). \quad (2)$$

Question 18 Mesurer *sur la courbe fournie en annexe* les grandeurs suivantes : f_0 (fréquence de résonance), V_0 (amplitude à fréquence nulle), $V_{\max}$ (amplitude à la résonance) et Δf (largeur du pic de résonance à l'amplitude $V_{\max}/\sqrt{2}$).

Question 19 En déduire, par deux méthodes différentes, le facteur de qualité Q . Ces deux valeurs sont-elles compatibles ?

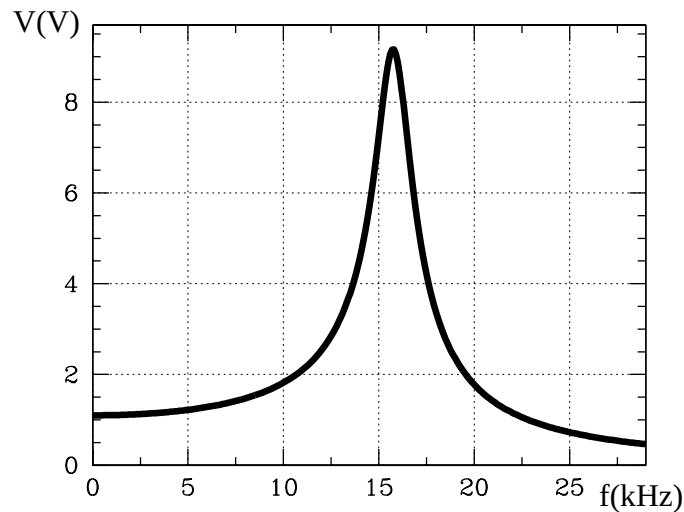


FIG. 4 – Courbe de résonance d'un circuit RLC. V est la tension aux bornes du condensateur.

Question 20 Déduire, des grandeurs mesurées à la question 19, la période T des oscillations libres du circuit RLC, puis la durée τ de désexcitation.

Question 21 L'étudiant étudie maintenant le même circuit RLC série en régime libre. Il mesure la tension aux bornes du condensateur à 10 mV près. Le circuit est soumis à une tension continue $v_0 = 1$ V, puis à $t = 0$, cette tension est annulée. Combien de temps l'étudiant doit-il attendre pour que le circuit soit apparemment à l'équilibre ?

ANNEXE — courbe à rendre avec votre copie

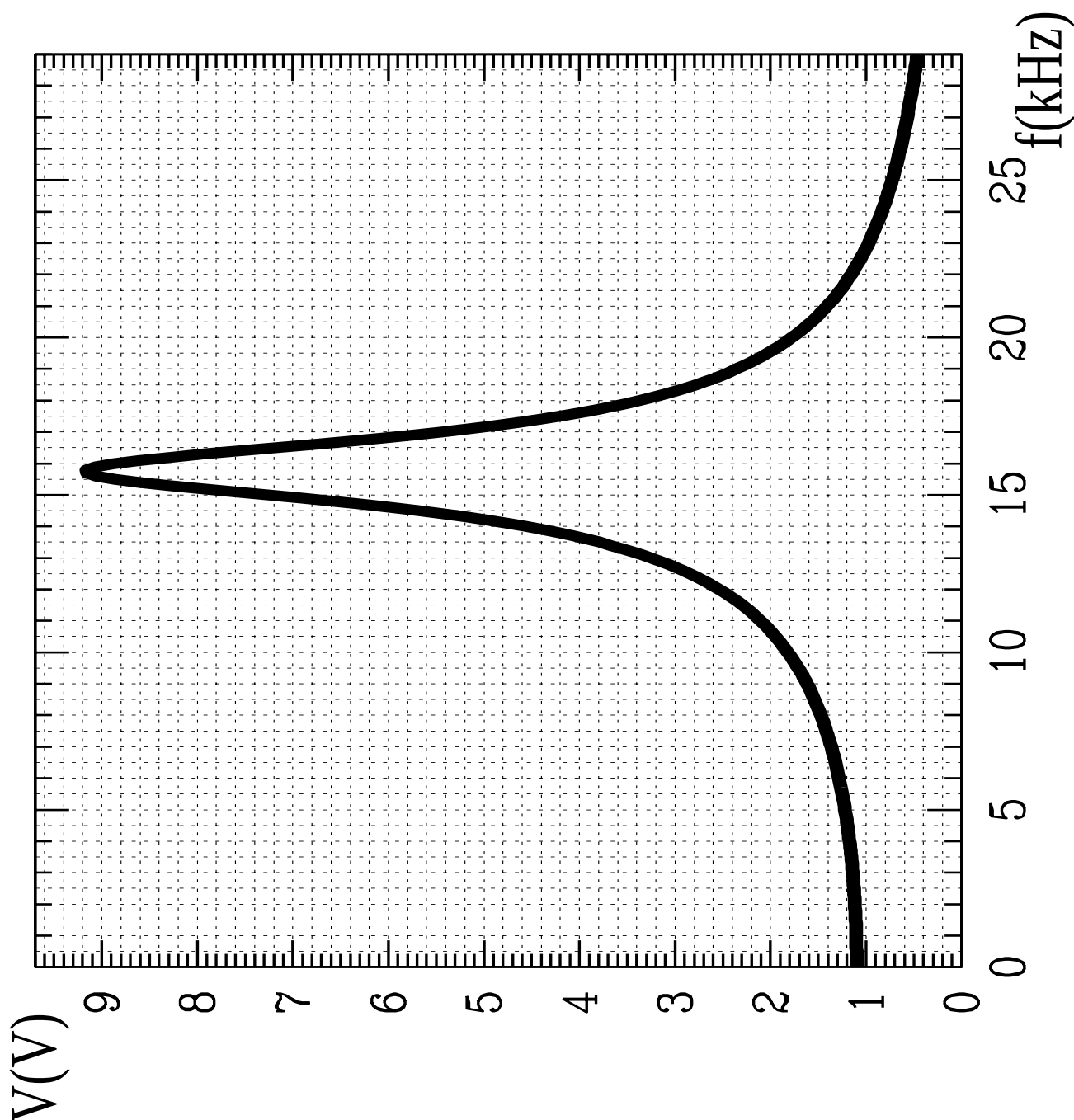


FIG. 5 – Courbe de résonance d'un circuit RLC série.