

OPTIQUE ONDULATOIRE

Examen

Exercice 1: Miroir de Lloyd

On considère le dispositif interférentiel du miroir de Lloyd (figure 1). Un miroir plan AO de longueur l est placé orthogonalement à un écran E . L'écran est parallèle à l'axe (Ox) . Une source ponctuelle S est située à une hauteur h au-dessus du plan du miroir et à une distance d de l'extrémité A du miroir. Elle éclaire le miroir sous incidence rasante ($h \ll d+l$). Cette source émet une lumière de longueur d'onde $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$. Par la suite, on choisira $h = 1 \text{ mm}$, $l = 10 \text{ cm}$ et $d = 20 \text{ cm}$. Considérons un point M de l'écran, repéré par son

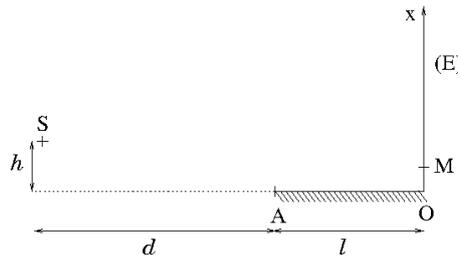


FIGURE 1 – *Miroir de Lloyd.*

abscisse x . En ce point interfèrent le rayon qui vient directement de S et le rayon issu de S qui se réfléchit sur le miroir.

1. Expliquez pourquoi ce dispositif permet d'observer des interférences sur l'écran E . Tracez le chemin des deux rayons qui interfèrent au point M .

2. Montrez que ce dispositif est équivalent au montage des trous d'Young. Pour répondre à cette question, vous pouvez déterminer où se trouvent les deux sources secondaires créées par ce dispositif.

3. En la justifiant, donnez la différence de chemin optique entre les deux rayons qui interfèrent en M d'abscisse x .

4. Quel est le déphasage entre les deux rayons au point M ?

5. Donnez l'expression de l'intensité lumineuse observée sur l'écran E et représentez cette intensité en fonction de x . Vous préciserez l'interfrange et le contraste des franges.

6. Pourquoi observe-t-on une frange noire en O ?

7. Quelle est la hauteur du champ d'interférences sur l'écran ? Combien de franges sont visibles dans ce champ ?

Exercice 2: Imagerie d'exoplanètes

Les exoplanètes sont des planètes qui orbitent autour d'une autre étoile que notre Soleil. Le problème explique pourquoi il est compliqué d'en obtenir une image avec un télescope et étudie un instrument appelé coronographe.

Dans tout le problème, vous modéliserez le télescope (en $z = 0$) par une lentille mince de focale f et de diamètre D (la lumière qui est en dehors de la lentille est arrêtée par un écran). Un détecteur se trouve dans le plan adéquat pour enregistrer l'image fournie par le télescope. Vous supposerez que tous les objets observés (étoiles et exoplanètes) se trouvent à l'infini.

Télescope

1. Où se forme l'image d'une étoile qui est à l'infini et sur l'axe optique du télescope ? Reproduire le schéma de la figure 2 et le compléter en traçant les rayons avant et après la lentille et en précisant la position du détecteur.

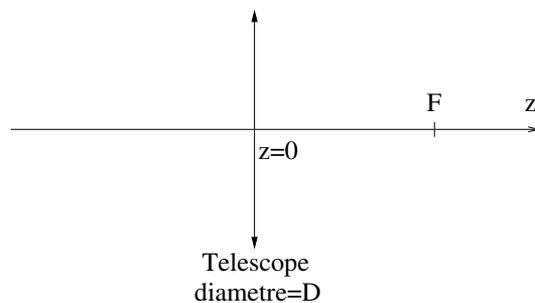


FIGURE 2 – Schéma du télescope.

2. L'étoile émet un champ électrique de longueur d'onde λ et de pulsation ω . Quelle est l'expression du champ électrique pour $z < 0$? Introduire le nombre d'onde k en donnant son expression.

Dans la suite, $E(x, y, z = 0^+, t)$ représente le champ électrique juste après la lentille du télescope avec (x, y) les coordonnées cartésiennes dans le plan de la lentille (orthogonales à l'axe z). Les coordonnées cartésiennes dans le plan du détecteur sont (X, Y) .

3. Quel modèle est-il judicieux d'appliquer pour calculer l'expression du champ électrique $E_{\text{im}}(X, Y, t)$ diffracté par le télescope dans le plan du détecteur ? Justifier.

4. Donner l'expression de $E_{\text{im}}(X, Y, t)$ en fonction de $E(x, y, z = 0^+, t)$ (sans calcul). Mettre cette expression sous la forme d'une transformée de Fourier, notée TF_O dans la suite du problème.

5. La symétrie axiale du problème pousse à utiliser les coordonnées cylindriques (r, η) plutôt que les coordonnées cartésiennes (x, y) . Expliquer pourquoi le champ électrique juste après la lentille du télescope peut s'écrire

$$E(r, \eta, z = 0^+, t) = A \Pi_D(r) e^{j\omega t} \quad (1)$$

avec A une constante et $\Pi_D(r) = 1$ pour $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq D/2$ et 0 ailleurs.

6. En faisant les changements de variables appropriés (mais sans calculer l'intégrale), exprimer $E_{\text{im}}(R, \theta, t)$ en fonction de $E(r, \eta, z = 0^+, t)$ où (R, θ) sont les coordonnées cylindriques dans le plan du détecteur.

7. Sans faire de calcul, exprimer l'intensité lumineuse de l'image diffractée $I(R, \theta)$ en fonction de $E_{\text{im}}(R, \theta, t)$. Pourquoi I ne dépend pas du temps ?

En posant $q = \frac{kRD}{2f}$, on démontre que l'expression de I est

$$I(R) = I_0 \left(\frac{2J_1(q)}{q} \right)^2 \quad (2)$$

8. Interpréter le fait que I ne dépende pas de θ .

9. Utiliser la figure 3 pour expliquer ce que représente I_0 .

10. Exprimer en fonction des paramètres du problème la distance R_1 pour laquelle l'intensité est nulle pour la première fois.

11. Schématiser l'image-2D fournie par le télescope. On supposera dans toute la suite que la largeur de la tache de diffraction est $2\lambda f/D$.

12. Comment est modifiée l'image si l'étoile n'est plus sur l'axe optique du télescope mais décalée d'un petit angle α (Figure 4) ? Aucun calcul n'est demandé pour cette question, uniquement un argument physique.

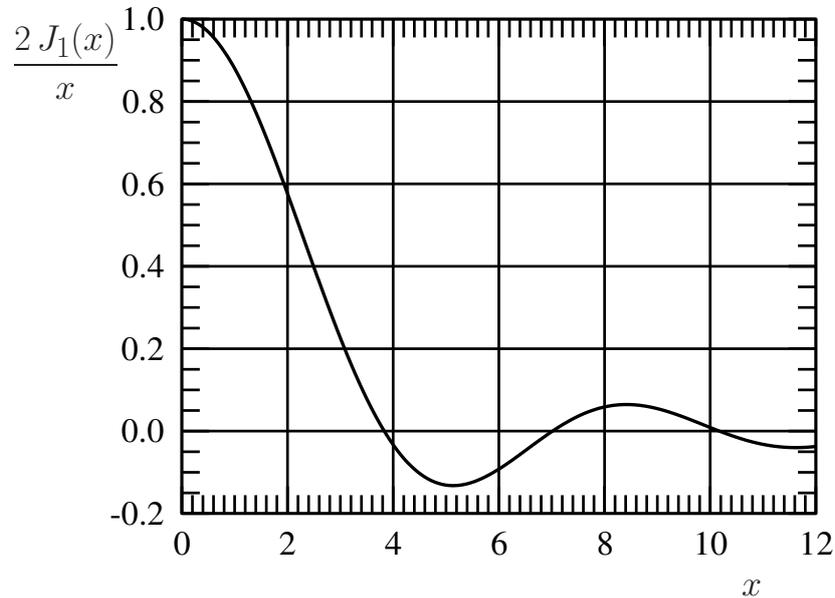


FIGURE 3 – Graphe de $2 J_1(x)/x$.

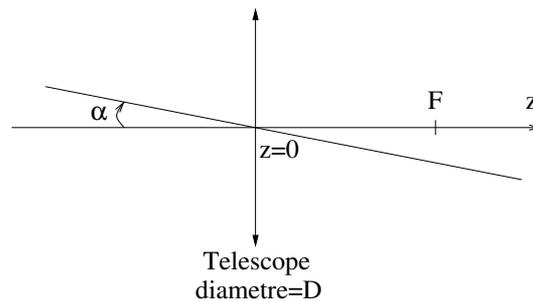


FIGURE 4 – Décalage angulaire α d'une source.

13. Deux étoiles de même flux sont observées. L'une se trouve sur l'axe optique et l'autre est décalée d'un angle α . Quelle est l'angle minimum α_m pour lequel on détecte deux images séparées ? Justifier. Calculer α_m en radian, puis en seconde d'angle pour $D = 10$ m et $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$.

14. On observe désormais un système composé d'une étoile et d'une exoplanète qui est 10^6 fois moins brillante que l'étoile. L'étoile se trouve sur l'axe optique et l'exoplanète est décalée d'un angle α qui fait que son image est centrée en $(R, \theta) = (2\lambda f/D, 0)$. En utilisant la figure 3, expliquer pourquoi on ne peut pas détecter l'image de la planète sur le détecteur.

Coronographe

Peu importe la position de l'image de l'exoplanète sur le détecteur, on ne peut pas la détecter en utilisant un télescope seul. Pour en obtenir une image, on associe le télescope à un instrument appelé coronographe. Le coronographe modifie le champ électrique venant de l'étoile qui est sur l'axe optique du télescope ($\alpha = 0$) sans affecter ceux venant des sources qui sont décalées angulairement ($\alpha \neq 0$) comme les exoplanètes. On modélise l'action du coronographe en modifiant l'amplitude du champ électrique juste après la lentille du télescope :

$$E_{\text{coro}}(r, \eta, z = 0^+, t) = E(r, \eta, z = 0^+, t) - A \Pi_D(r) e^{j\omega t} \quad \text{pour } \alpha = 0 \quad (3)$$

$$E_{\text{coro}}(r, \eta, z = 0^+, t) = E(r, \eta, z = 0^+, t) \quad \text{pour } \alpha \neq 0 \quad (4)$$

où $E(r, \eta, z = 0^+, t)$ représente le champ électrique juste après la lentille du télescope seul (sans/avant coronographe).

15. Écrire le champ électrique E_{coro} après le coronographe pour l'étoile ($\alpha = 0$). Que vaut alors l'intensité diffractée sur le détecteur ?

16. Que vaut l'intensité diffractée sur le détecteur pour une exoplanète décalée d'un angle $\alpha \neq 0$? Schématiser l'image-2D observée et commenter.

Aberrations de phase

Dans la réalité, les aberrations de phase (défauts de polissage du télescope par exemple) limitent l'efficacité du coronographe. Ces aberrations $\phi(r, \eta)$ ajoutent un terme de phase au champ électrique avant le coronographe :

$$E_\phi(r, \eta, z = 0^+, t) = E(r, \eta, z = 0^+, t) e^{j\phi(r, \eta)} \quad (5)$$

17. En supposant que $|\phi(r, \eta)| \ll 1$, montrer qu'au premier ordre l'image d'une exoplanète ($\alpha \neq 0$) n'est pas modifiée.

Sauf mention contraire, dans toute la suite, on considère uniquement l'étoile qui se trouve sur l'axe optique du télescope ($\alpha = 0$).

18. Quelle est l'expression de E_{coro} pour l'étoile si $|\phi(r, \eta)| \ll 1$?

19. Montrer que le champ électrique $E_{\text{Im,coro}}$ diffracté par le télescope dans son plan image en présence du coronographe peut s'écrire en fonction du champ électrique E_{Im} diffracté sans coronographe

$$E_{\text{Im,coro}} = j E_{\text{Im}} \otimes \mathcal{B}[\phi] \quad (6)$$

avec \otimes représente le produit de convolution et

$$\mathcal{B}[\phi](X, Y) = \iint \phi(x, y) e^{-jk(xX+yY)/f} dx dy$$

Premier cas

Dans un premier temps, soit

$$\phi(r, \eta) = \phi(x, y) = a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{D}\right) \quad (7)$$

avec $n > 0$ un nombre entier et a_n un réel qui fixe le niveau des aberrations.

20. Déterminer l'expression de $\text{TF}_O[\phi]$ en fonction des coordonnées cartésiennes (X, Y) .

21. Quelle est l'expression de l'intensité lumineuse diffractée I_{coro} sur le détecteur en fonction de l'intensité diffractée sans coronographe? Que vaut le maximum de I_{coro} en fonction de a_n et I_0 (Eq. 2)?

22. Schématiser l'image-2D de l'étoile fournie par le {télescope, coronographe} en précisant les tailles et positions caractéristiques.

Cas général

En généralisant, les aberrations de phase peuvent s'écrire

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{D}\right) \quad (8)$$

avec les constantes a_n comprises entre 10^{-4} et 4.10^{-4} .

23. Faire un schéma de l'image-2D de l'étoile fournie par le {télescope, coronographe} en justifiant. Pour information, on appelle cette image un champ de tavelures (ou speckles en anglais).

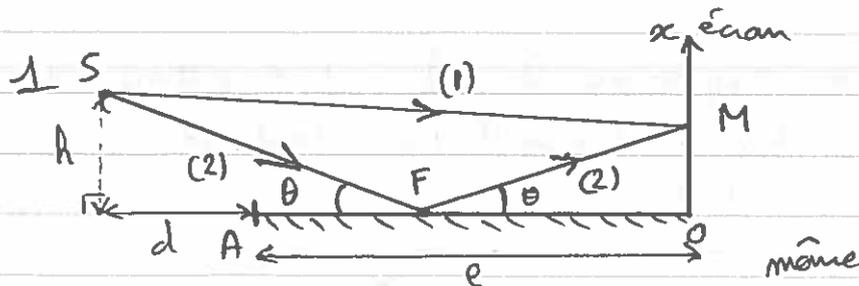
24. On suppose désormais que le télescope observe un système composé d'une étoile et d'une exoplanète qui est 10^6 fois moins brillante que l'étoile. L'étoile se trouve sur l'axe optique du télescope et l'exoplanète est décalée d'un petit angle α qui fait que son image est centrée en $(R, \theta) = (2\lambda f/D, 0)$. Refaire un schéma de l'image-2D fournie par le {télescope, coronographe}. Est-ce que l'exoplanète est détectée dans l'image? Justifier.

25. Répondre à la question précédente en supposant cette fois-ci que l'exoplanète est 10^8 fois moins brillante que l'étoile.

Examen 2014-2015

Exercice 1

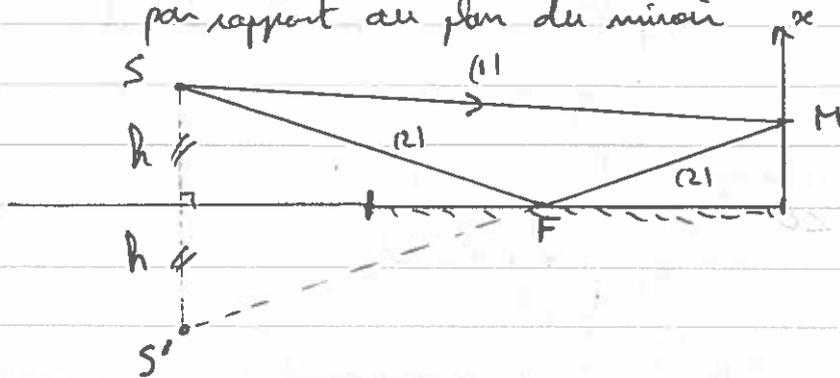
rappel n° de place :



En M, il y a deux rayons issus de la source S qui interfèrent (ceux représentés sur le schéma).

Le chemin optique du rayon (1) est $l_{SH} = SH$
 du rayon (2) est $l_{SF} + l_{FH} = SF + FM$
 (l'indice est 1 car l'expérience est dans l'air)

2.) L'image de S par le miroir est S', symétrique de S par rapport au plan du miroir



Pour le point M, c'est comme si le rayon (1) provenait de S et le rayon (2) provenait de S'.

M est donc virtuellement éclairé par deux sources secondaires S et S' séparées de $2h$. Cela est équivalent à deux trous d'Young séparés de $2h$ et à une distance $l+d$ de l'écran d'observation

3.) En appliquant le résultat des trous d'Young :

$$\delta = \frac{2h x}{l+d}$$

4.) $\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \pi$ (Le $+\pi$ est dû à la réflexion du rayon (2) sur le miroir, réflexion que le rayon (1) ne subit pas)

5) ~~exercice~~

* L'intensité lumineuse pour une interférence à deux ondes s'écrit :

$$I = 2 I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi s}{\lambda} + \pi \right) \right] \text{ avec } I_0 \text{ une constante}$$

Rq: on suppose que le coefficient de réflexion du miroir est de module 1 et que'il y a autant d'énergie qui arrive de S que de S'.

$$\text{Alors: } I(x) = 2 I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi x h}{\lambda(l+d)} + \pi \right) \right]$$

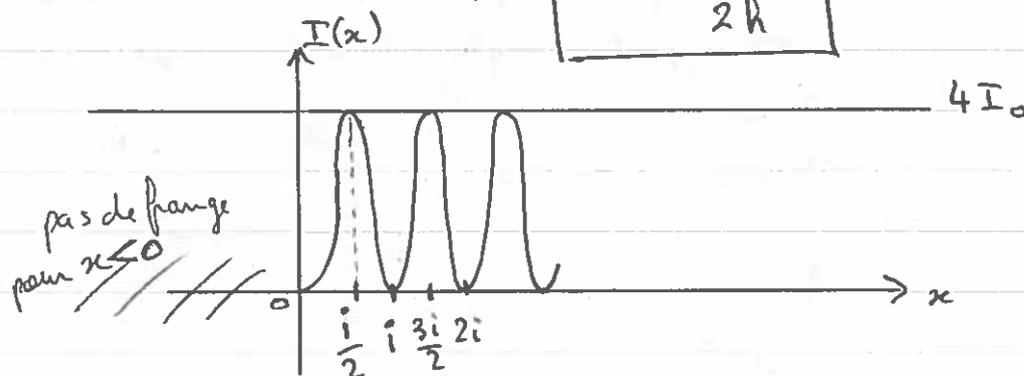
* Le contraste est maximum: $C = 1 = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

* L'interfrange est la distance entre deux franges ~~de même~~ de même intensité:

$$I(x+i) = I(x) \Rightarrow \frac{4\pi x h}{\lambda(l+d)} = \frac{4\pi h}{\lambda(l+d)} (x+i) + 2\pi$$

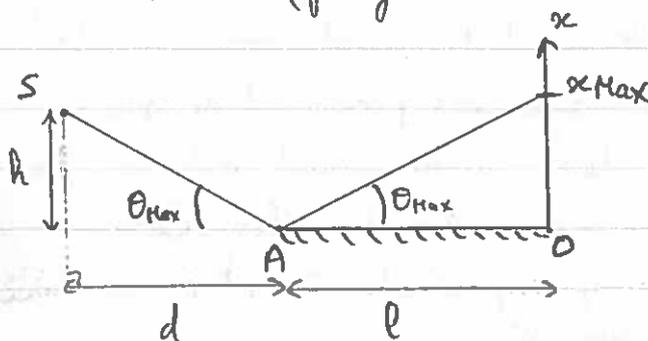
$$\Rightarrow i = \frac{\lambda(l+d)}{2h}$$

$$AN: i = 81,9 \mu\text{m}$$



6) En $x=0$: $I(x=0) = 0$ (frange noire)

7.)



Avec maximum θ_{\max} est tel que $\tan \theta_{\max} = \frac{h}{d}$
(pour θ plus grand, le rayon (2) ne touche pas le miroir)

$$\text{Alors: } x_{\max} = l \tan \theta_{\max} \Rightarrow$$

$$x_{\max} = \frac{lh}{d}$$

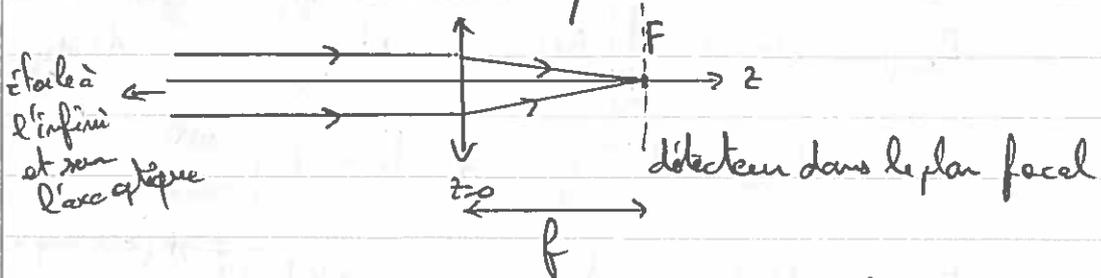
On voit donc $N = \frac{x_{\max}}{i}$ franges sur l'écran:

$$N = \frac{lh}{d} \frac{2h}{d(l+d)} \Rightarrow \underline{N = 6}$$

6 franges sont visibles

Exercice 2

1.) L'image se forme sur l'axe optique et dans le plan focal du miroir du télescope.



2.) $z < 0$: $E(x, y, z < 0) = E_0 e^{j(kz - \omega t)}$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et E_0 une constante

3.) La source est à l'infini et on observe la figure de diffraction à l'infini (car dans le plan focal de la lentille). Il est donc judicieux d'appliquer le modèle de Fraunhofer:

$$4.) E_{\text{im}}(x, y) = C \iint E(x, y, z=0^+) e^{-j\frac{k}{f}(xx+yy)} dx dy (*)$$

$$E_{\text{im}}(x, y, t) = C \mathcal{F}_0(E(x, y, z=0^+, t)) \left[\frac{kx}{f}, \frac{ky}{f} \right]$$

C est une constante

point où est calculée la transformée de Fourier.

5.) Le télescope est modélisé par une lentille de diamètre D et par un masque qui arrête la lumière à l'extérieur. Le télescope agit comme une fonction porte $\Pi_D(r)$ avec $\Pi_D(r) = 1$ pour $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{D}{2}$ et 0 ailleurs.

De plus, en $z=0^-$ (juste avant le télescope), le champ électrique s'écrit: $E(x, y, z=0^-, t) = E_0 e^{-j\omega t}$ d'après la question 2.

On trouve bien que le champ juste après la lentille est :

$$E(r, \eta, z=0^+, t) = A T_0(r) e^{-j\omega t} \quad \text{avec } A \text{ une constante}$$

Remarque: l'énoncé écrit $e^{+j\omega t}$. Cela dépend de la convention utilisée pour décrire l'onde plane $E_0 e^{j(kz - \omega t)}$ ou $E_0 e^{j(\omega t - kz)}$, mais cela ne change pas le résultat final obtenu pour l'intensité car $I = \langle |E|^2 \rangle_t$ qui moyenne le terme $\cos^2(\omega t)$.

6) D'après (*):

$$E_m(x, y, t) = C \iint E(r, \eta, z=0^+, t) e^{-j\frac{k}{f}(xX + yY)} dx dy$$

avec $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \cos\eta \\ \sin\eta \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = R \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{vmatrix}$, on obtient :

$$E_{in}(R, \theta, t) = C \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E(r, \eta, z=0^+, t) e^{-j\frac{k}{f}rR(\cos\theta\cos\eta + \sin\theta\sin\eta)} r dr d\eta$$

$$\Rightarrow E_{in}(R, \theta, t) = C \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E(r, \eta, z=0^+, t) e^{-j\frac{k}{f}rR\cos(\theta - \eta)} r dr d\eta$$

$$7) I(R, \theta) = \langle |E_{in}(R, \theta, t)|^2 \rangle_t$$

I ne dépend pas du temps car le détecteur moyenne le signal dans le temps. le temps de pose est beaucoup plus grand que la période du signal $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

8) * I_0 est l'intensité maximale dans l'image: ~~ce maximum se trouve~~
~~se trouve~~ Ce maximum se trouve dans la direction donnée par l'optique géométrique (en F sur le schéma de la question 1).
 * I ne dépend pas de θ car il y a symétrie de révolution par rapport à l'axe optique

9) La fonction $I(R)$ s'annule quand $\frac{2J_1(q)}{q}$ s'annule.

Or $\frac{2J_1(q)}{q}$ s'annule pour $q_1 = 3,8$ d'après la figure 3.

De plus $q = \frac{kRD}{2f}$, donc :

$$q_1 = \frac{kR_1 D}{2f} (= 3,8) \Rightarrow R_1 = \frac{2f q_1}{k D} \Rightarrow R_1 = \frac{f q_1}{\pi D}$$

$$\Rightarrow R_1 = 1,21 \frac{df}{D}$$

(en réalité $R_1 = 1,22 \frac{df}{D}$ mais le graphe ne donne pas une précision suffisante pour mesurer la bonne valeur de q_1)

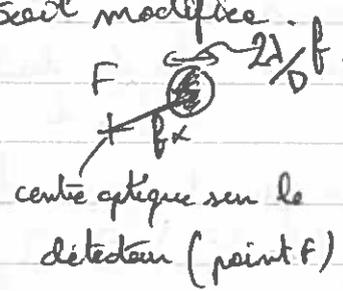
lumière
disque de diamètre $2R_1$

10)



anneau lumineux d'intensité beaucoup plus faible que le disque central $\approx (0,15)^2 I_0$ d'après la figure 3.

11) Si l'étoile est décalée d'un angle α par rapport à l'axe optique, son image est décalée de $f\alpha$ dans le plan focal de la lentille sans ~~être~~ que la tache de diffraction ne soit modifiée.



ERREUR D'ÉNONCÉ :
la taille à ~~utiliser~~ utiliser est $\frac{2df}{D}$ (= diamètre)

12) D'après le critère de Rayleigh il faut que le maximum d'intensité de l'image 1 corresponde au minimum d'intensité de l'autre image.

Donc : $f\alpha_{\min} = \frac{df}{D} \Rightarrow \alpha_{\min} = \frac{d}{D}$

AN: $\alpha_{\min} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \Rightarrow \alpha_{\min} = 1,5 \cdot 10^{-7} \times \frac{180 \times 3600}{\pi} = 9,03''$

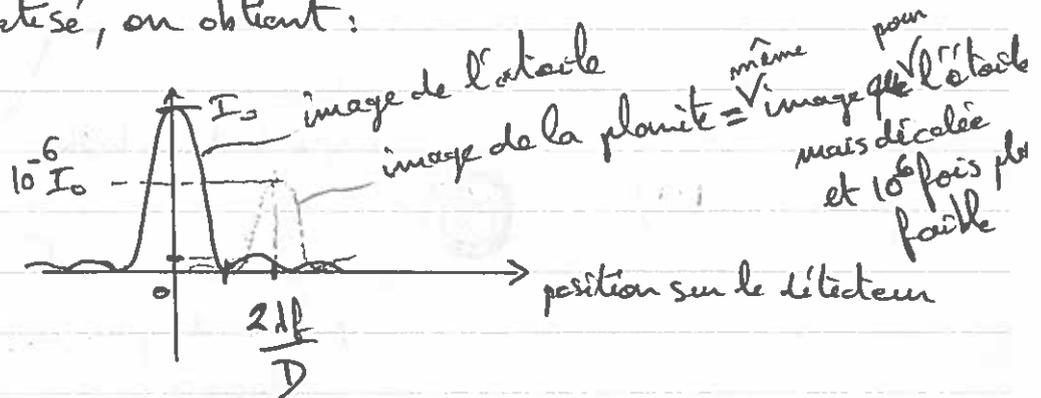
13) * $R = \frac{2\lambda f}{D}$ correspond à $q_{\text{planète}} = \frac{\pi D}{\lambda f} \frac{2\lambda f}{D} = 2\pi$

D'après la Figure 3, $\frac{2J_1(q_{\text{planète}})}{q_{\text{planète}}} \approx 0,05$, donc l'intensité de l'étoile à la position du centre de l'image de la planète est:

$$I_{\text{étoile}} \left(R = \frac{2\lambda f}{D} \right) = I_0 (0,05)^2 = 2,5 \cdot 10^{-4} I_0$$

* La planète a une intensité qui est maximale en $R = \frac{2\lambda f}{D}$ et la valeur de ce maximum est $10^{-6} I_0$.

Schématisé, on obtient:

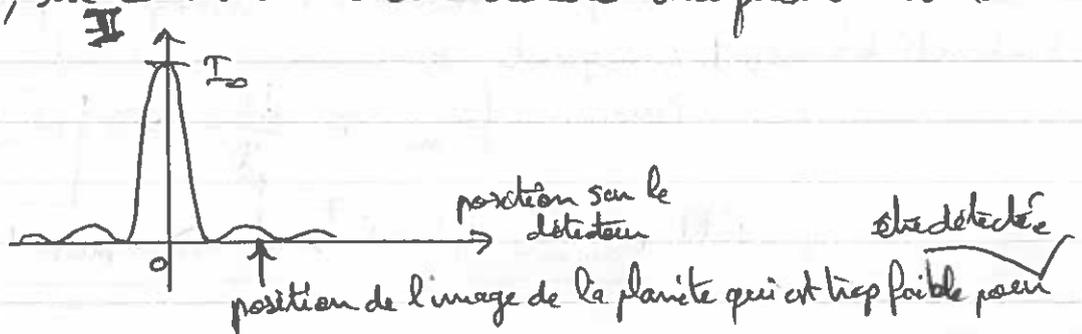


Sur ce schéma, la planète est plus brillante que les anneaux de diffraction de l'étoile. ~~pour~~ Ce choix a été fait pour montrer où se forment chacune des images.

Dans la réalité, on a vu montré que l'intensité de l'étoile à la position de la planète sur le détecteur l'image de

est beaucoup plus grande que l'intensité de la planète: $I_{\text{étoile}} \left(R = \frac{2\lambda f}{D} \right) \gg I_{\text{planète}} \left(\frac{2\lambda f}{D} \right) = 10^{-6} I_0$

Donc, sur le détecteur on détecte uniquement l'étoile



14/ D'après la question 5, on trouve

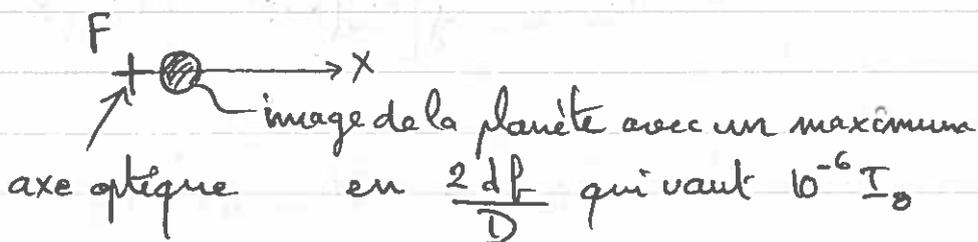
$$E_{\text{coro}}(r, \eta, z=0^+, t) = 0 \quad \text{pour } \alpha = 0$$

L'intensité $I_{\text{étoile}}$ sur le détecteur est nulle partout.

Le coronographe a filtré la lumière de l'étoile qui est sur l'axe optique ($\alpha = 0$)

15/ pour $\alpha \neq 0$, le champ électrique n'est pas modifié par le coronographe et l'image est celle qu'on obtiendrait avec le télescope seul :

$I_{\text{planète}} = I_{\text{étoile}}$ décalée de $\beta \alpha$ et 10^6 fois plus faible.



L'exoplanète est détectée!

16/ Pour $|\phi| \ll 1$, on a $E_{\phi}(r, \eta, z=0^+, t) = E(r, \eta, z=0^+, t) [1 + j\phi]$

Comme $|\phi| \ll 1$, on peut négliger $j\phi$ devant 1 et on en déduit que l'image de l'exoplanète n'est presque pas modifiée par rapport à ce qui est trouvé à la question 15/

$$17/ E_{\text{coro}}(r, \eta, z=0^+, t) \approx j A \Pi_0(r) e^{-j\omega t} \phi(r, \eta)$$

18/ Nous avons vu question 4/ que

$$E_{\text{im}} = C \text{FT}_0(E(r, \eta, z=0^+, t)) \Rightarrow E_{\text{im}} = C \text{FT}_0(A \Pi_0 e^{-j\omega t}) * \text{FT}_0(\phi)$$

$$\Rightarrow E_{\text{im, coro}} = j E_{\text{im}} * \text{TF}_0(\phi)$$

$$\begin{aligned}
 19) \text{TF}_0(\phi) \left[\frac{kx}{f}, \frac{ky}{f} \right] &= \iint a_m \cos\left(\frac{2\pi mx}{D}\right) e^{j\frac{kx(x+y)}{f}} dx dy \\
 &= a_m \delta(y) \frac{1}{2} \int \left(e^{j\frac{2\pi mx}{D}} + e^{-j\frac{2\pi mx}{D}} \right) e^{j\frac{kx^2}{f}} dx \\
 &= a_m \delta(y) \frac{1}{2} \int \left(e^{jx\left(\frac{2\pi m}{D} + \frac{kx}{f}\right)} + e^{jx\left(-\frac{2\pi m}{D} + \frac{kx}{f}\right)} \right) dx \\
 &= a_m \delta(y) \frac{1}{2} \left[\delta\left(\frac{kx}{f} + \frac{2\pi m}{D}\right) + \delta\left(\frac{kx}{f} - \frac{2\pi m}{D}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{TF}_0(\phi) = \delta(y) \frac{1}{2} a_m \left[\delta\left(x + \frac{df}{D} m\right) + \delta\left(x - \frac{df}{D} m\right) \right]}$$

Rq: $\delta\left(\frac{kx}{f} + \frac{2\pi m}{D}\right)$ est non nul en $\frac{kx}{f} = -\frac{2\pi m}{D} \Rightarrow x = -\frac{df}{D} m$

20) On trouve :

$$\begin{aligned}
 E_{im, cov} &= j E_{im} \otimes \left[\delta(y) \frac{a_m}{2} \left[\delta\left(x + \frac{df}{D} m\right) + \delta\left(x - \frac{df}{D} m\right) \right] \right] \\
 \Rightarrow E_{im, cov} &= j \left[E_{im}\left(x + \frac{df}{D} m\right) + E_{im}\left(x - \frac{df}{D} m\right) \right] \frac{a_m}{2} \delta(y)
 \end{aligned}$$

Puis: $I_{im, cov} = \langle |E_{im, cov}|^2 \rangle_t$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I_{im, cov} &= \frac{a_m^2}{4} \delta(y) \left\langle \left| E_{im}\left(x + \frac{df}{D} m\right) \right|^2 + \left| E_{im}\left(x - \frac{df}{D} m\right) \right|^2 + \right. \\
 &\quad \left. 2 \operatorname{Re} \left(E_{im}\left(x + \frac{df}{D} m\right) E_{im}^*\left(x - \frac{df}{D} m\right) \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

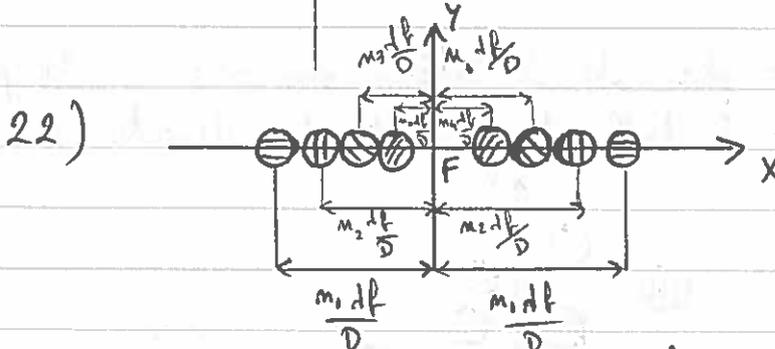
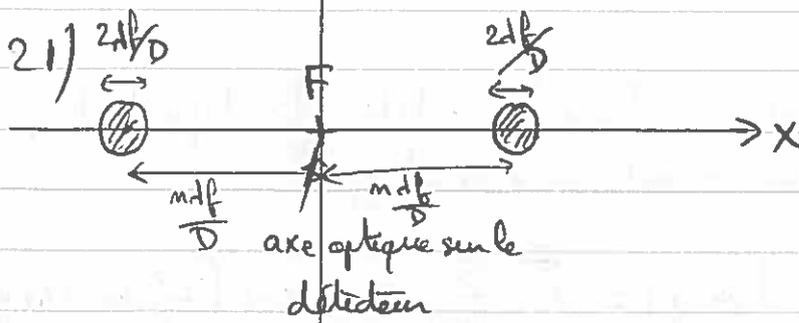
Or la fonction $E_{im}(x)$ a une largeur $\frac{2df}{D}$ et au minimum (pour $m=1$) $E_{im}\left(x + \frac{df}{D}\right)$ et $E_{im}\left(x - \frac{df}{D}\right)$ sont séparées de $\frac{2df}{D}$.

Donc $E_{im}\left(x + \frac{df}{D} m\right) E_{im}^*\left(x - \frac{df}{D} m\right) \approx 0$

$$\boxed{\text{Finalement: } I_{im, cov}(x, y) = \frac{a_m^2}{4} \delta(y) \left[I_{im}\left(x + \frac{df}{D} m\right) + I_{im}\left(x - \frac{df}{D} m\right) \right]}$$

L'image de l'étoile après le coronographe est constituée de deux pics : un en $x = \frac{df}{D} m$ et l'autre en $x = -\frac{df}{D} m$.
 Les deux pics ont un maximum d'intensité égal à $\frac{a_m^2}{4} I_0$

rappel n° de place :



Il ya une infinité de couple de taches symétriques par rapport à F.
 Leur intensité varie entre ~~10^-8~~ et ~~10^-7~~
 maximale

$$\frac{I_{\min}}{I_0} = \frac{10^{-8}}{4} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ et}$$

$$I_{\max} = 4 \cdot 10^{-8} I_0 \quad \text{car leur intensité est donnée par } \frac{|a_m|^2}{4}$$

$$\text{et } 10^{-4} < a_m < 4 \cdot 10^{-4}$$

23) Le maximum d'intensité de l'exoplanète est $10^{-6} I_0$ ce qui est beaucoup plus grand que les maximums d'intensité des pics de l'étoile calculés à la question 22. Donc, l'exoplanète est détectée

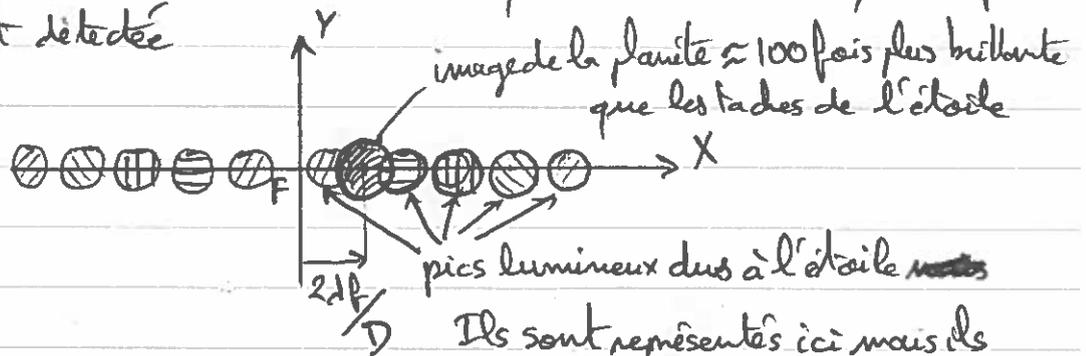


image de la planète ≈ 100 fois plus brillante que les taches de l'étoile
 pics lumineux dus à l'étoile
 Ils sont représentés ici mais ils sont 100 fois plus faibles que l'image de la planète en intensité

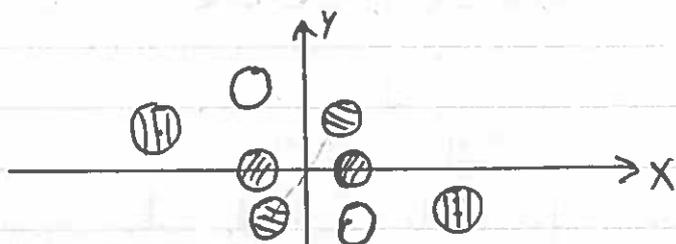
24) Si le maximum de la planète est $10^{-8} I_0$, l'image de la planète ressemble énormément aux pics lumineux dus à l'étoile: même intensité maximale et même forme.

Il est donc difficile de savoir si on observe une planète ou un pic dû à l'étoile.

Remarque! dans la réalité, le défaut de phase dépend des deux coordonnées x et y :

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \cos\left(\frac{2\pi}{D}(nx+my)\right)$$

Dans le plan du détecteur on observe des pics lumineux dus à l'étoile dans toutes les directions



chaque pic a une largeur $\frac{2\lambda f}{D}$, qui se trouve être aussi la largeur de la tache de diffraction de la planète.