

NOTES DE COURS 2023

L'objectif des cours de Physique Expérimentale (PE201) est de vous présenter les outils que vous utiliserez en travaux pratiques. En fonction de votre parcours scolaire, certains points vous paraîtront faciles, d'autres moins faciles.

Dans ce document, je mets en avant les points qui me paraissent critiques mais les choix que j'ai faits sont subjectifs. Autrement dit, ce document, qui est très inspiré de documents écrits par des collègues ¹, n'a pas la prétention de remplacer vos notes de cours. Je vous encourage donc à prendre vos propres notes et à utiliser ce document pour ce qu'il est : un recueil non exhaustifs de choses à savoir.

1. Ils m'ont accordé de recopier des passages, même si, pour alléger le texte, ceux-ci ne sont pas entre guillemets.

Lettres de l'alphabet grec et leur pronociation

Majuscule	Minuscule	Prononciation
A	α	alpha
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	espilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	ksi
O	$\omicron$	omicron
Π	π	pi
P	ρ	rho
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Y	υ	upsilon
Φ	ϕ	phi
X	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Table des matières

1 Pourquoi faire des expériences en physique?	5
2 La mesure du physicien et vocabulaire	6
3 Présentation des résultats	7
3.1 Unités	7
3.2 Chiffres significatifs	7
3.3 Chiffres significatifs pour l'incertitude	7
3.4 Arrondi d'un nombre	8
3.5 Arrondis et opérations	8
3.6 Chiffres significatifs pour la valeur mesurée	8
3.7 Écriture scientifique	8
3.8 Résumé des règles d'écriture	8
4 Erreur de mesure	9
5 Fidélité et justesse	9
6 Incertitude de mesure	10
6.1 Introduction d'une variable aléatoire	10
6.2 Comment résumer un ensemble de mesurages?	11
7 Évaluer l'incertitude	11
7.1 Incertitudes de type A	12
7.1.1 Incertitudes sur une mesure unique	12
7.1.2 Incertitude sur la moyenne de plusieurs mesures	13
7.2 Incertitudes de type B	13
7.2.1 Cas général	13
7.2.2 Un exemple	14
7.3 Combinaison des deux types d'incertitudes	15
7.4 La fraude scientifique	15
8 Propagation des incertitudes	15
8.1 Méthode par encadrement	15
8.2 Calcul de l'incertitude dépendant d'une variable unique	16
8.3 Calcul de l'incertitude dépendant de plusieurs variables	17
8.3.1 Cas général	17
8.3.2 Cas d'une loi en puissance	18
8.4 Cas particuliers	18
9 Niveau de confiance et incertitude élargie	20
9.1 Distribution, moyenne et écart-type	20
9.2 Niveau de confiance	20
9.2.1 Distribution gaussienne	20
9.2.2 Distribution uniforme	21
9.3 Incertitude élargie	21

9.3.1	Distribution gaussienne	21
9.3.2	Distribution uniforme	21
9.3.3	Intérêt de l'incertitude élargie	21
10	Représentation graphique par un physicien	22
10.1	Représentation des points de mesure	22
10.2	Représentation d'une courbe théorique	22
11	Ajustement des moindres carrés pondérés	23
11.1	Cas général	23
11.2	Régression linéaire	24
11.3	Nombre de mesures et nombre de paramètres	24
12	Test en Z	25
12.1	Pourquoi un test statistique?	25
12.2	Test statistique, hypothèse nulle et hypothèse alternative	25
12.2.1	Test statistique	25
12.2.2	Choix de l'hypothèse nulle	26
12.2.3	Choix de la signification α	26
12.2.4	Hypothèse alternative	26
12.3	Test de comparaison à une moyenne théorique : test en z bilatéral	26
12.4	Test de comparaison entre deux moyennes : test en z bilatéral	27
12.5	Attention aux pièges	29
12.5.1	Importance des incertitudes	29
12.5.2	Les raccourcis interdits	29

1. — Pourquoi faire des expériences en physique ?

Les humains observent le monde qui les entoure depuis des millénaires pour le comprendre et en tirer profit : calendriers lunaire et solaire pour l'agriculture ; mouvement des étoiles, forme des vagues, vols des oiseaux, marées pour la navigation ; fusion des matériaux pour la métallurgie, etc. L'humain observe et prédit : il fait des sciences physiques.

Les sciences physiques étudient les phénomènes naturels et leurs évolutions. Elles établissent des théories ou modèles qui permettent à la fois d'expliquer les observations expérimentales déjà faites et de prédire les résultats de futures expériences.

On pourrait schématiser les recherches en sciences physiques comme suit :

1. **Au début, il y a des observations et une question.**

Par exemple, Tycho Brahe qui n'arrivait pas à prédire correctement la position de Mars dans le ciel demanda à Johannes Kepler de comprendre la trajectoire de cette planète.

2. Généralement, **le physicien confirme par d'autres observations.**

Il peut soit les faire lui-même, soit utiliser les observations réalisées par ses collègues. Johannes Kepler, qui avait une mauvaise vue, utilisa les mesures de Tycho Brahe².

3. Le physicien cherche alors à **comprendre les observations à l'aide des théories contemporaines et des outils mathématiques à disposition.**

Kepler utilisa le modèle héliocentrique et, les équations du cercle et de l'ellipse. Après six ans de travail, Kepler proposa les deux premières lois qui portent maintenant son nom.

4. Vient le moment de la **vérification des prédictions du modèle.**

Les mesures de la position astrométrique de Mars réalisées pendant plusieurs décennies après la mort de Kepler suivaient les prédictions de son modèle.

5. Finalement, la **remise en question du modèle.**

Généralement, quand les mesures deviennent plus précises, il arrive un moment où prédictions théoriques et observations expérimentales ne sont plus en accord. Le physicien cherche à comprendre quelles hypothèses du modèle théorique ne sont pas correctes pour **l'affiner ou le modifier**. Par exemple, les lois de Kepler ne sont valables que pour un problème à deux corps. Comme les planètes ont une masse très faible devant celle du Soleil, la trajectoire de Mars suit presque l'orbite prédite par Kepler. Quand les mesures astrométriques se sont affinées, le « presque » a été mesuré et un modèle plus précis à plusieurs corps a dû être utilisé pour prédire la trajectoire de Mars.

En conclusion, les sciences physiques sont par essence des sciences basées sur l'expérience. Certes, on entend souvent parler de physique théorique et de physique expérimentale. Certains ont même tendance à opposer ces deux domaines : des théoriciens dénigrant les expérimentateurs *qui bidouillent leurs mesures* ; des expérimentateurs qui dénigrent les théoriciens qui paramétrisent trop leurs modèles pour *coller aux mesures*. C'est une faute !

Théorie et expérimentation sont les deux mamelles des sciences physiques. Si on ne fait que de la théorie sans jamais se confronter à l'expérience, on se rapproche de la recherche mathématique³. Si on se contente de faire des mesures sans les interpréter, on ne propose aucune explication ni aucune prédiction de futures expériences et on oublie l'objectif premier de la physique : comprendre et prédire ce qui nous entoure.

2. Les mesures astrométriques de Tycho Brahe étaient de loin les plus précises de son époque.

3. Recherche qui est indispensable mais qui ne relève pas des sciences physiques.

Dans ce cours, nous nous intéressons au travail du physicien expérimental : Qu'est-ce qu'une mesure physique ? Comment la faire ? Comment présenter le résultat ?

2. — La mesure du physicien et vocabulaire

Mesurer une grandeur paraît souvent trivial et à la portée de tous. D'ailleurs, notre cerveau est soumis en permanence à des résultats de *mesures* : le niveau de batterie de notre téléphone, notre pointure, notre poids, l'heure de passage du métro, etc. Seulement, pour le physicien, la mesure ne se résume pas à une seule valeur.

Pour commencer, la grandeur que l'on cherche à mesurer s'appelle le **mesurande** et la procédure expérimentale qu'on met en œuvre est le **mesurage**. Par exemple, votre poids est le mesurande et le mesurage peut se faire à l'aide d'un pèse-personne.

La valeur vraie M_{vraie} du mesurande est la valeur qu'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Mais le mesurage parfait n'existe pas et le résultat d'un mesurage est un ensemble de valeurs qui approchent plus ou moins M_{vraie} . La question que se pose systématiquement le physicien est : « de combien me trompé-je ? » et son résultat se présentera toujours sous la forme :

Mesure du physicien = valeur la plus probable $\pm$ une incertitude

Reste à savoir comment on trouve la « valeur la plus probable » et l'« incertitude ».

Supposons qu'un pèse-personne indique 70 kg tandis qu'un autre indique 69 kg. Comment réconcilier ces deux valeurs ? Vous l'aurez deviné : grâce à l'incertitude de mesure.

Nous savons tous qu'un pèse-personne ne donne pas une valeur de la masse avec une fidélité et une justesse infinies. Pour vous en convaincre, pesez-vous avec et sans chaussettes. La masse indiquée, notée m , sera la même !⁴ Continuez à vous dévêtir petit à petit jusqu'à ce que la valeur affichée change. La masse de tout ce que vous avez retiré vous permet d'estimer l'incertitude de la mesure du pèse-personne utilisé. La valeur vraie M_{vraie} de votre masse est donc proche de m à une certaine incertitude près. **Classiquement, on donne le résultat sous la forme d'un intervalle $[m - u(m); m + u(m)]$ ou encore**

$$m \pm u(m)$$

où m est la valeur de la mesure (ou valeur la plus probable) et $u(m)$ est l'incertitude. De nombreux physiciens notent l'incertitude Δm (ancienne notation). La notation $u(m)$ est la notation conventionnelle internationale⁵ que nous utiliserons ce semestre.

L'intervalle $[m - u(m); m + u(m)]$ peut être associé à un *niveau de confiance*, c'est-à-dire une estimation de la probabilité que la valeur vraie M_{vraie} y soit incluse (voir le paragraphe 9). Le niveau de confiance est lié à la valeur de $u(m)$ et, quand on donne le résultat, il est impératif de préciser comment la valeur m et l'incertitude $u(m)$ ont été estimées.

4. Cette expérience risque d'être mise en défaut si vous portez des chaussettes en cote de maille.

5. cf le *Guide of the expression of uncertainty in measurement* (GUM)

3. — Présentation des résultats

Le résultat d'un mesurage doit indiquer :

- la valeur mesurée m ,
- l'incertitude associée a ,
- toutes les hypothèses sous-jacentes à l'obtention du résultat.

a. On peut utiliser l'incertitude-type $u(m)$ ou une incertitude-élargie $u_\alpha(m)$ et le facteur k d'élargissement. Si on connaît la distribution de probabilité, on peut associer un niveau de confiance.

Enfin, il faut employer les unités appropriées et les conventions d'écriture décrites ci-dessous.

3.1. — Unités

Légalement⁶ et généralement, on travaille dans le système des unités internationales⁷ même si dans chaque domaine de la science certaines unités historiques perdurent⁸. On peut aussi utiliser les multiples (kilo, mega, etc) et sous-multiples (milli, micro, etc) des unités. Il faut cependant rester prudents pour éviter les erreurs au moment des conversions d'unités.

Dans la pratique, on s'autorise parfois à employer des unités très utilisées même si elles ne font pas partie du système des unités internationales (par exemple, le litre).

3.2. — Chiffres significatifs

À l'exception des zéros qui se trouvent en tête d'un nombre, tous les chiffres sont significatifs.

6,8	2 chiffres significatifs
6800	4 chiffres significatifs
Ainsi : $6,8 \times 10^3$	2 chiffres significatifs
0,68	2 chiffres significatifs
0,680	3 chiffres significatifs

Si on ne dispose pas d'information sur la manière dont une valeur a été obtenue, le nombre de chiffres significatifs indique l'incertitude. Par convention, on considère alors que le dernier chiffre significatif est connu à $\pm 0,50$.

3.3. — Chiffres significatifs pour l'incertitude

La recommandation internationale⁹ est de **limiter le nombre de chiffres significatifs de l'incertitude à deux**. Cela vient du fait que la précision sur la mesure de l'incertitude¹⁰ est très rarement inférieure à 1 %. Et conserver deux chiffres significatifs plutôt que un seul permet de minimiser les erreurs d'arrondissement¹¹ dans les calculs ultérieurs.

Règle n° 1 : l'incertitude s'écrit avec deux chiffres significatifs.

Exemple 1 : écrire $u(m) = 6,81 \text{ cm}$ est incorrect car il y a trois chiffres significatifs. Il faut arrondir et retirer le dernier chiffre pour obtenir $u(m) = 6,8 \text{ cm}$.

Exemple 2 : écrire $u(m) = 6 \text{ cm}$ est incorrect car il y a un seul chiffre significatif. Il faut augmenter d'un chiffre significatif et on arrive à $u(m) = 6,0 \text{ cm}$.

6. Décret n° 61-501 du 3 mai 1961.

7. Voir <https://www.bipm.org/fr/publications/si-brochure/>.

8. L'électron-volt comme unité d'énergie en physique nucléaire, le parsec et l'unité astronomique comme unités de distance en astronomie, etc.

9. *Guide of the expression of uncertainty in measurement* (GUM)

10. C'est-à-dire l'incertitude sur l'incertitude $u(u(m))$.

11. Action d'arrondir un calcul, une valeur.

3.4. — Arrondi d'un nombre

Il existe plusieurs méthodes pour arrondir un nombre. En physique, on arrondit généralement au plus proche en suivant les étapes suivantes :

1. On choisit le dernier chiffre significatif à conserver (à droite).
2. On conserve ce chiffre si le chiffre suivant est plus petit ou égal à 4.
3. On augmente ce chiffre d'une unité si le chiffre suivant est plus grand ou égal à 5.

Exemple : 3,846 s'écrit 3,85 avec trois chiffres significatifs et 3,8 avec deux chiffres significatifs.

3.5. — Arrondis et opérations

Quand on fait des opérations sur des données arrondies, il est important d'**exprimer le résultat avec une précision égale à celle de la donnée utilisée la moins précise.**

Pour une addition ou une soustraction, le résultat possède autant de décimales que la donnée qui en a le moins.

Pour une multiplication ou une division, le résultat possède autant de chiffres significatifs que la donnée qui en a le moins.

Exemple 1 : Soient $x = 4,51$ et $y = 6,1$. Alors $z = x + y = 10,6$.

Exemple 2 : Soient $a = 2,0018$ et $c = 3,31$. Alors $b = ac = 6,63$ qui est l'arrondi à trois chiffres significatifs (comme la donnée c) du résultat $2,0018 \times 3,31 = 6,625958$. On remarque que le résultat est différent de $2,00 \times 3,31 = 6,62$. Il faut donc diminuer le nombre de chiffres significatifs des données **après l'opération.**

3.6. — Chiffres significatifs pour la valeur mesurée

Règle n°2 : la valeur mesurée s'écrit avec la même précision que l'incertitude.

Il faut donc diminuer en arrondissant ou augmenter en ajoutant des 0 la valeur mesurée.

Exemple 1 : Bobley Ponge mesure que son aquarium contient $V = 213,16536704$ L d'eau avec une incertitude $u(V) = 0,65$ L. S'il suit les règles d'écritures¹², il obtient : $V = (213,17 \pm 0,65)$ L.

Exemple 2 : Zygomar pèse le kilogramme étalon du Bureau international des poids et mesures situé à Sèvres près de Paris. Il trouve une masse de 1 kg avec une incertitude égale 0,01 kg. L'écriture correcte du résultat est : $(1,000 \pm 0,010)$ kg

3.7. — Écriture scientifique

La notation scientifique consiste à écrire un nombre avec un unique chiffre significatif non nul avant la virgule et le multiplier par la puissance de 10 adéquate.

Exemple 1 : 0,0614 s'écrit $6,14 \times 10^{-2}$ et 12 s'écrit $1,2 \times 10^1$.

On peut déroger à cette règle si le résultat final est plus lisible avec une autre écriture. Par exemple, Zygomar pèse $(67,3 \pm 1,0)$ kg est plus facile à lire que $(6,73 \pm 0,10) \times 10^1$ kg.

Règle n°3 : l'incertitude et la valeur mesurée s'écrivent dans la même puissance de 10.

Exemple 2 : $0,0612 \pm 0,0023$ s'écrit $(6,12 \pm 0,23) \times 10^{-2}$.

3.8. — Résumé des règles d'écriture

Règle n°1 : l'incertitude s'écrit avec deux chiffres significatifs.

Règle n°2 : la valeur mesurée s'écrit avec la même précision que l'incertitude.

Règle n°3 : l'incertitude et la valeur mesurée s'écrivent dans la même puissance de 10.

12. sauf celle sur l'unité car le litre n'est pas une unité internationale.

4. — Erreur de mesure

L'erreur de mesure est la différence entre la valeur obtenue par mesurage et la valeur vraie du mesurande. Comme la valeur vraie est difficilement accessible, l'erreur exacte reste inconnue. Il s'agit donc d'une grandeur théorique inaccessible. On peut cependant l'estimer.

Supposons qu'on réalise n mesurages dans des circonstances identiques. On note m_i le résultat du mesurage numéro i et on calcule

$$\text{La moyenne arithmétique sur } n \text{ valeurs : } \overline{m}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$$

Quand le nombre n de mesurages tend vers l'infini, la moyenne arithmétique $\overline{m}^{(n)}$ est la meilleure estimation de M_{vraie} à partir des $\{m_i\}$. Mais $\overline{m}^{(\infty)}$ ne donne qu'une valeur approchée de la valeur vraie M_{vraie} et elle s'en écarte de ce qu'on appelle

$$\text{L'erreur systématique : } E^S = \overline{m}^{(\infty)} - M_{\text{vraie}}$$

Par exemple, si la tare d'un pèse-personne est faussée de 4 kg, peu importe le nombre de mesurages moyennés, la mesure sera systématiquement faussée de 4 kg¹³.

De plus, quand on fait n mesurages m_i , chaque valeur m_i peut être différentes des autres $m_{j \neq i}$ et elle peut aussi différer de $\overline{m}^{(\infty)}$. L'écart entre le résultat m_i du mesurage numéro i et $\overline{m}^{(\infty)}$ (la meilleure estimation de M_{vraie}) est

$$\text{L'erreur aléatoire : } E_i^A = m_i - \overline{m}^{(\infty)}$$

L'erreur aléatoire est susceptible de changer de manière imprévisible d'un mesurage à l'autre. Cela la différencie de l'erreur systématique qui prend la même valeur à chaque mesurage. L'erreur de mesure E_i du mesurage numéro i est la somme de l'erreur systématique et de l'erreur aléatoire

$$E_i = E^S + E_i^A = m_i - M_{\text{vraie}}$$

Ce paragraphe est résumé par la figure 1.

5. — Fidélité et justesse

Un instrument est « juste » s'il fournit une erreur systématique faible (E^S faible). Il est « fidèle » s'il fournit une erreur aléatoire faible (E^A faible) : les résultats de tous les mesurages réalisés dans les mêmes conditions seront très proches les uns des autres (faible dispersion des mesures). Un instrument qui est à la fois juste et fidèle est « précis ». La figure 2 schématise fidélité et justesse en prenant l'exemple d'un tir sur une cible. Le centre de la cible représente la valeur vraie M_{vraie} de la grandeur à mesurer. Les erreurs aléatoires E_i^A sont caractérisées par la dispersion des points autour de leur barycentre. L'erreur systématique E^S est donnée par la distance entre ce barycentre et le centre de la cible.

13. La prochaine fois que vous entendrez : « je pèse moins lourd sur la balance de Paul que sur celle de Gertrude », vous comprendrez qu'il y a une erreur systématique entre les deux balances.

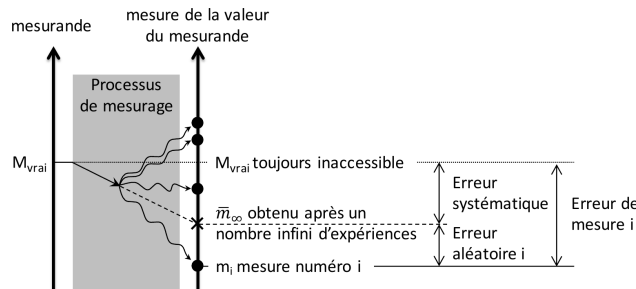


FIGURE 1 – Erreur de mesure. Quatre points de mesure sont représentés. Il peut en exister plus dans le cas général. Afin de simplifier le schéma, la définition de l'erreur aléatoire et de l'erreur de mesure est matérialisée uniquement pour la mesure numéro i .

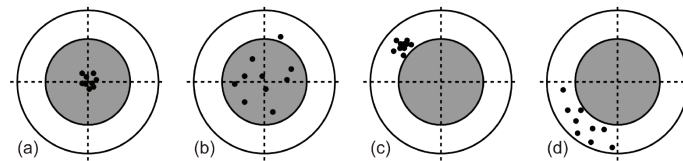


FIGURE 2 – Erreurs aléatoires et systématiques illustrées par un tir sur une cible. (a) faible dispersion autour du centre : le tir est **précis (fidèle et juste)**. (b) grande dispersion autour du centre : le tir est juste mais non fidèle. (c) faible dispersion et tir décentré : le tir est fidèle mais non juste. (d) grande dispersion et tir décentré : le tir n'est ni fidèle ni juste.

Dans la réalité, on ne connaît pas M_{vraie} (le centre de la cible) et l'objectif est de l'estimer en analysant les résultats (l'ensemble des points). **Il faut bien comprendre qu'on ne recherche pas forcément à avoir la plus petite dispersion.** Par exemple, dans l'exemple de la figure, on préférera le cas (b) au cas (c) car en faisant une moyenne sur un grand nombre de mesurages, on pourra approcher M_{vraie} dans le cas (b) alors qu'on ne le pourra pas dans le cas (c).

6. — Incertitude de mesure

6.1. — Introduction d'une variable aléatoire

Lors d'un mesurage, il y a en général plusieurs sources de variabilité du résultat. Autrement dit, il y a plusieurs contributions à l'erreur de mesure E_i et donc à l'incertitude de mesure $u(m)$:

1. la grandeur à mesurer n'est pas bien définie. Exemple : le poids d'une personne n'est pas bien défini (il dépend de ce qu'a récemment mangé ou bu la personne).
2. les conditions environnementales évoluent (température, pression, humidité).
3. l'instrument de mesure n'est pas idéal (temps de réponse, décalage du zéro, étalonnage).
4. l'instrument de mesure perturbe la mesure elle-même¹⁴.
5. l'expérimentateur n'est pas constant (fatigue, erreurs de parallaxe, effet de ménisque dans une pipette).

Certaines contributions ajoutent une erreur systématique au mesurage tandis que d'autres ajoutent une erreur aléatoire. Quoi qu'il en soit, **l'erreur de mesure existe toujours** et une façon

14. C'est sur ce principe que repose la mécanique quantique.

de décrire la variabilité des résultats expérimentaux est de les considérer comme des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire, c'est-à-dire des tirages aléatoires indépendants dont l'ensemble suit une certaine loi de probabilité. De cette manière, on introduit le hasard pour représenter notre impossibilité à prévoir la valeur m_i fournie par le mesurage numéro i .

6.2. — Comment résumer un ensemble de mesurages ?

On pourrait pour chaque expérience, réaliser un grand nombre de mesurages et fournir l'ensemble des résultats. Par exemple, lister 1000 mesurages de la distance Terre-Lune. Cela serait compliqué à lire. De plus, il y a des expériences pour lesquelles il est compliqué de réaliser plusieurs mesurages¹⁵. On recherche donc un moyen de représenter l'ensemble des mesurages. La façon conventionnelle de faire est de fournir d'une part la valeur m la plus probable (ou valeur centrale) de l'ensemble des mesurages et d'autre part, **l'incertitude de mesure $u(m)$ qui caractérise la dispersion qu'on pourrait raisonnablement attribuer à la grandeur mesurée.** L'incertitude estime l'importance de l'erreur potentiellement commise. Cette grandeur répond donc à la question « de combien suis-je potentiellement en train de me tromper ? ». Par convention, on fournit **l'incertitude-type qui est égale à l'écart-type**¹⁶ de la variable aléatoire associée au processus de mesurage. Ci-dessus, le terme *raisonnablement* traduit le fait que **deux expérimentateurs ne feront pas forcément la même estimation de l'incertitude.**

Il existe aussi l'*incertitude relative* ou *précision*¹⁷ d'un mesurage. Elle est donnée par $u(m)/m$ et par convention on l'exprime en pourcent¹⁸. Si la qualité d'un mesurage est bonne, l'incertitude relative est faible. Cependant, il existe d'autres critères de qualité et une faible incertitude relative n'implique par forcément que le mesurage est de qualité¹⁹.

7. — Évaluer l'incertitude

Comme deux expérimentateurs ne feront pas forcément la même estimation de l'incertitude, il est obligatoire quand on donne un résultat expérimental d'expliquer le mesurage (quels instruments sont utilisés, quelles procédures pour relever les valeurs) et les hypothèses et raisonnements qui ont mené à l'évaluation de l'incertitude. **Sans cette justification, la mesure (valeur la plus probable et incertitude) n'a pas de valeur scientifique.** Dans ce paragraphe, on présente les deux types d'incertitudes qui existent :

- **Incertitudes de type A** : évaluées en employant des méthodes statistiques (moyenne arithmétique et écart-type d'une série de résultats).
- **Incertitudes de type B** : évaluées en utilisant une hypothèse a priori.

15. Si une personne monte plusieurs fois sur un même pèse-personne, le poids affiché sera toujours le même. Il existe pourtant une incertitude (voir le paragraphe 7.2 sur les incertitudes de type B).

16. L'écart-type est la racine carrée de la variance.

17. Attention, *précision* diffère du caractère *précis* d'un instrument qui est à la fois *fidèle* et *juste*.

18. On peut aussi la donner en puissance de 10. Ainsi, une précision de 0,1% est égale à une précision de 10^{-3} .

19. Rappel de logique : $A \Rightarrow B$ équivaut à "non B" $\Rightarrow$ "non A" mais n'est pas équivalent à $B \Rightarrow A$ ni à "non A" $\Rightarrow$ "non B".

7.1. — Incertitudes de type A

L'évaluation de type A est utilisée quand n mesurages du mesurande M_{vraie} , réalisés dans les mêmes conditions expérimentales, donnent des résultats différents. Si les résultats ne sont pas différents, il faut considérer des incertitudes de type B.

7.1.1. — Incertitudes sur une mesure unique

On modélise le résultat m_i du mesurage numéro i comme suit :

$$m_i = M_{\text{vraie}} + r_i$$

avec r_i une réalisation d'une variable aléatoire R qui décrit les fluctuations d'un mesurage à l'autre. Cela revient à écrire que m_i est une réalisation de la variable aléatoire M telle que :

$$M = M_{\text{vraie}} + R$$

On utilise souvent une hypothèse forte selon laquelle les fluctuations se compensent et sont d'espérance mathématique nulle ($\mathbb{E}[R] = 0$)²⁰. On peut alors écrire :

$$\mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[M_{\text{vraie}}] + \mathbb{E}[R] = M_{\text{vraie}} \quad (1)$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire M estime alors le mesurande recherché.

D'après les hypothèses précédentes, si on trace l'histogramme de n valeurs mesurées m_i , il y a un maximum d'effectifs autour de l'espérance de M qui vaut M_{vraie} ²¹. Et pour quantifier la dispersion autour de cette valeur, on utilise généralement l'écart-type σ_M qui est égal à l'écart-type σ_R de R et, par définition, à la racine carrée de la variance de M :

$$\sigma_M = \sigma_R = \sqrt{\mathbb{E}[(M - \mathbb{E}[M])^2]} = \sqrt{\mathbb{E}[M^2] - \mathbb{E}[M]^2}$$

L'incertitude-type $u^A(m)$ sur une mesure unique est égale à σ_M . Cependant, σ_M , qui vaut σ_R , n'est pas accessible dans la pratique et on l'estime en calculant l'écart-type expérimental. **Si on a n mesurages m_i , l'écart-type expérimental s_{exp} s'écrit**²²

$$s_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (m_i - \overline{m}^{(n)})^2}$$

avec $\overline{m}^{(n)}$ la moyenne arithmétique expérimentale des n mesurages :

$$\overline{m}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \quad (2)$$

Le mesurage unique m_i vaut M_{vraie} à une incertitude-type $u^A(m)$ près telle que

$$u^A(m) \simeq s_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (m_i - \overline{m}^{(n)})^2} \quad (3)$$

20. Cela revient à supposer que l'erreur systématique E^S est nulle.

21. Si on suppose 1000 mesurages qui suivent une loi gaussienne centrée en 1,0 et d'écart-type 1,0, il y aura environ 40 valeurs dans l'intervalle $[1,0; 1,1]$ alors qu'il y en aura moins de 5 dans l'intervalle $[2,0; 2,1]$.

22. Pour se souvenir du facteur $1/(n-1)$, on peut garder en mémoire qu'avec une seule mesure ($n=1$) on ne peut pas estimer l'écart-type (qui tend alors vers l'infini).

7.1.2. — Incertitude sur la moyenne de plusieurs mesures

On a montré à l'équation 1 que l'espérance mathématique de la variable aléatoire M est égale au mesurande M_{vraie} recherché. En d'autres termes, si on pouvait calculer cette espérance mathématique, nous trouverions la valeur recherchée M_{vraie} . Dans la pratique, nous n'avons pas accès à l'espérance mathématique mais nous pouvons l'estimer à partir d'une série de n mesurages m_i en calculant leur moyenne arithmétique expérimentale²³ $\overline{m}^{(n)}$ dont l'expression est donnée par l'équation 2. De cette manière, on estime le mesurande M_{vraie} en calculant la grandeur $\overline{m}^{(n)}$ qui dépend des n mesurages, c'est-à-dire des n réalisations de la variable aléatoire M . Par conséquent, $\overline{m}^{(n)}$ est elle-même la réalisation d'une variable aléatoire X dont l'espérance mathématique $\mathbb{E}[X]$ est :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[M] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_{\text{vraie}} = M_{\text{vraie}}$$

et en considérant les n mesurages m_i indépendants, l'écart-type σ_X est

$$\sigma_X = \frac{\sigma_M}{\sqrt{n}}$$

Dans le cas d'incertitudes de type A, en supposant l'ensemble des n mesurages indépendants et centrés sur le mesurande M_{vraie} , la moyenne arithmétique $\overline{m}^{(n)}$ fournit une estimation du mesurande M_{vraie} avec une incertitude-type $u(\overline{m}^{(n)})$ qu'on estime par

$$u(\overline{m}^{(n)}) = \frac{u(m)}{\sqrt{n}} \simeq \frac{s_{\text{exp}}}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

7.2. — Incertitudes de type B

7.2.1. — Cas général

Dans certains cas, plusieurs mesurages donnent toujours le même résultat. Par exemple, si un expérimentateur mesure la longueur d'un cheveu à l'aide d'un réglét et trouve 14 cm, chacun de ses mesurages faits dans les mêmes conditions donnera 14 cm. Pour estimer les incertitudes sur ce mesurage, l'expérimentateur doit *estimer la différence entre ses mesurages et ceux qu'une autre personne obtiendrait en faisant la même expérience*. Cela revient à estimer la variabilité des paramètres susceptibles de modifier le mesurage. Idéalement, on devrait faire faire le mesurage dans les mêmes conditions à un grand nombre d'expérimentateurs représentatifs de la population des expérimentateurs²⁴. On comprend bien qu'on ne peut pas faire cela pour chaque mesurage et il faut alors que l'expérimentateur ait un regard critique²⁵ sur son mesurage et fournisse toute information qui explique la valeur mesurée et l'incertitude associée.

Généralement, nous avons très peu d'information et nous savons uniquement avec certitude que le mesurage est compris entre deux valeurs m_{min} et m_{max} , c'est-à-dire dans un intervalle de demi-étendue $a = (m_{\text{max}} - m_{\text{min}})/2$. Le *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure*

23. Il est démontré que la moyenne arithmétique est le meilleur estimateur de l'espérance.

24. Par exemple, ne pas prendre que des droitiers ou que des gauchers, prendre des expérimentateurs dans plusieurs conditions de stress, de fatigue, etc

25. *Critique* n'est pas forcément négatif. Comprendre *objectif*.

(édition 2008) recommande de supposer que la valeur mesurée peut être égale à tout nombre compris entre $m_{\min}$ et $m_{\max}$ avec la même probabilité. Le mesurage est donc la réalisation d'une variable aléatoire M uniformément répartie entre $m_{\min}$ et $m_{\max}$ dont l'écart-type σ_M donne l'incertitude-type $u^B(m)$.

L'incertitude-type $u^B(m)$ d'une évaluation de type B pour un intervalle $[m_{\min}, m_{\max}]$ de demi-étendue a et supposant une distribution uniforme s'écrit :

$$u^B(m) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{m_{\max} - m_{\min}}{\sqrt{12}} \quad (5)$$

Dans la pratique, plusieurs cas de figures se présentent :

- le constructeur de l'appareil de mesure fournit directement l'incertitude-type $u^B(m)$ dans la notice (rare) ;
- le constructeur fournit une incertitude $u_{\text{constructeur}}(m)$ sans autre précision ; il s'agit par convention de la demi-étendue de l'intervalle des valeurs possibles ; dans ce cas, on trouve l'incertitude-type avec $u^B(m) = u_{\text{constructeur}}(m) / \sqrt{3}$;
- le constructeur ne fournit rien et il faut évaluer l'appareil de mesure avec d'autres instruments de mesure.

Toute évaluation de type B repose sur des choix subjectifs²⁶ : choix des valeurs $m_{\min}$ et $m_{\max}$, choix d'une distribution uniforme, prise en compte d'imperfections de l'expérimentateur, etc. C'est pour cela que **quand on fournit une mesure de type B, il est essentiel de préciser les hypothèses qui ont présidé à l'établissement de l'incertitude-type.**

7.2.2. — Un exemple

L'exemple classique d'une situation où une évaluation de type B est nécessaire se présente quand on mesure une distance à l'aide d'une règle. L'énoncé « mesurez la longueur de votre petit doigt » n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît. L'expérimentateur devra préciser :

- entre quels points il fait la mesure. Est-ce que la longueur de l'ongle est incluse ? Où commence la mesure vers la paume de la main (jusqu'au métacarpe inclus ou jusqu'à la peau qui séparent les doigts) ?
- quel instrument de mesure est utilisée (règle en plastique, un réglet métallique, un mètre ruban, autre) ?

Ne serait-ce qu'en considérant ces deux points, on comprend qu'il est indispensable de compléter la valeur mesurée par toutes les informations qui permettraient à un autre expérimentateur de reproduire le mesurage.

Par exemple, Zygomar fait part de son mesurage.

« J'utilise une règle en plastique graduée tous les millimètres. Je mesure la longueur ℓ de mon auriculaire tendu et posé sur la table, du bout de mon ongle jusqu'à la peau qui sépare l'auriculaire de l'annulaire. Je trouve que ℓ est comprise de façon certaine entre $\ell_{\min} = 5,9$ cm et $\ell_{\max} = 6,1$ cm. En supposant une répartition uniforme des mesures possibles dans l'intervalle $[\ell_{\min}, \ell_{\max}]$ (incertitude de type B), j'obtiens $\ell = (6,000 \pm 0,058)$ cm. »

26. Plusieurs expérimentateurs ne font pas forcément la même évaluation.

Cette description de la mesure inclut tout ce dont le lecteur a besoin pour comprendre et pouvoir reproduire la mesure :

1. L'appareil de mesure

Ici, une règle en plastique. Il est essentiel d'avoir un maximum d'information sur l'appareil de mesure. Par exemple, on sait qu'une règle en plastique peut introduire un biais systématique car l'écart entre graduations n'est pas exactement d'un millimètre²⁷.

2. Conditions et protocole

Zygomar décrit exactement ce qui est mesuré (de quel point à quel point) et dans quelle condition (doigt tendu et posé sur la table).

3. Mesure et hypothèses

Zygomar donne l'intervalle certain et en déduit la mesure en indiquant l'hypothèse faite (incertitude de type B avec uniformité des mesures possibles dans l'intervalle certain).

7.3. — Combinaison des deux types d'incertitudes

Si au cours d'un mesurage, on estime que l'incertitude-type²⁸ $u(m)$ a deux origines – une incertitude-type $u^A(m)$ de type A et une autre $u^B(m)$ de type B – on écrit :

$$u(m) = \sqrt{(u^A(m))^2 + (u^B(m))^2} \quad (6)$$

7.4. — La fraude scientifique

Si vous faites un mesurage et qu'au moment d'évaluer l'incertitude-type vous mettez une valeur *comme ça* pour faire plaisir à l'encadrant de TP ou à votre patron, vous êtes coupable de fraude scientifique. Bien entendu, il n'y a pas mort d'homme mais les recherches en science sont un travail collectif et il est essentiel de pouvoir faire confiance aux résultats des collègues (ingénieurs, techniciens, chercheurs) pour mener ses propres recherches. C'est pour cela que **tout résultat d'un mesurage doit être fourni avec une incertitude-type et les hypothèses qui ont présidé à son établissement et l'expérimentateur doit être un exemple de réflexion critique, d'honnêteté intellectuelle et de compétence professionnelle.**

8. — Propagation des incertitudes

Très souvent, le résultat d'un mesurage $m \pm u(m)$ ne fournit pas directement la grandeur G d'intérêt et un calcul intermédiaire est nécessaire.

8.1. — Méthode par encadrement

Supposons qu'on mesure, avec une incertitude-type de type B de distribution uniforme, la longueur du côté d'un carré, $\ell \pm u(\ell) = (1,00 \pm 0,10)$ m, et qu'on souhaite estimer le périmètre $p \pm u(p)$ et la surface $\Sigma \pm u(\Sigma)$ de ce carré.

Le périmètre

Une première méthode est d'encadrer la valeur mesurée ℓ et d'en déduire un encadrement de

27. Contrairement aux graduations d'un réglet métallique dont l'écartement est plus régulier et plus proche de 1 mm ou 0,5 mm selon le réglet.

28. Dans le *Guide of the expression of uncertainty in measurement* (GUM), l'incertitude combinée s'écrit $u_c(m)$. Ici, nous allégeons l'écriture en $u(m)$.

la valeur recherchée p . Par exemple, avec une probabilité de 58%²⁹, la valeur vraie ℓ_{vraie} se trouve dans l'intervalle $\ell \pm u(\ell)$:

$$\begin{aligned} \ell - u(\ell) &< \ell_{\text{vraie}} < \ell + u(\ell) \\ 0,90 \text{ m} &< \ell_{\text{vraie}} < 1,10 \text{ m} \end{aligned}$$

Comme le périmètre est égal à $p_{\text{vraie}} = 4 \ell_{\text{vraie}}$, on peut multiplier chaque membre de l'inégalité pour obtenir l'encadrement

$$\begin{aligned} 4\ell - 4u(\ell) &< p_{\text{vraie}} < 4\ell + 4u(\ell) \\ 3,60 \text{ m} &< p_{\text{vraie}} < 4,40 \text{ m} \end{aligned}$$

ce qui s'écrit de manière plus synthétique $p = 4\ell \pm 4u(\ell)$ ou $p = (4,00 \pm 0,40) \text{ m}$. Ainsi, la mesure (la plus probable) du périmètre est $p = 4\ell$ et l'incertitude-type sur p est $u(p) = 4u(\ell)$.

La surface

Si maintenant on souhaite estimer la surface $\Sigma_{\text{vraie}} = \ell_{\text{vraie}}^2$ du carré, on peut calculer le carré des membres de l'inégalité pour obtenir

$$\begin{aligned} (\ell - u(\ell))^2 &< \Sigma_{\text{vraie}} < (\ell + u(\ell))^2 \\ 0,81 \text{ m}^2 &< \Sigma_{\text{vraie}} < 1,21 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Cette fois-ci, la mesure (la valeur la plus probable) est $\Sigma = (1,21 + 0,81)/2 = 1,01 \text{ m}^2$ et l'incertitude-type, qui est égale à la demi-étendue de l'intervalle, vaut $u(\Sigma) = (1,21 - 0,81)/2 = 0,20 \text{ m}^2$. On remarque que la mesure Σ trouvée par l'encadrement n'est pas exactement le carré de la mesure ℓ . D'autre part, comment relier l'incertitude-type $u(\Sigma)$ à l'incertitude-type $u(\ell)$?

Une chose est sûre : **l'incertitude sur le carré de ℓ diffère du carré de l'incertitude sur ℓ !**

$$u(\ell^2) \neq [u(\ell)]^2$$

Il est impératif d'écrire cela sur un post-it et de le coller sur son miroir de salle de bain car c'est une erreur malheureusement plus que classique !

8.2. — Calcul de l'incertitude dépendant d'une variable unique

Généralisons le problème. **Considérons un mesurande M et une grandeur d'intérêt G qui dépend de M de telle sorte que $G = f(M)$ avec f une fonction.** Plutôt que d'utiliser la méthode parfois fastidieuse des encadrements, on utilise un développement de Taylor à l'ordre un³⁰ qui estime la mesure $g \pm u(g)$ de G qu'on peut obtenir à partir d'une mesure $m \pm u(m)$ de M :

$$\begin{cases} g = f(m) \\ u(g) = \left| \frac{df}{dm} \right| u(m) \end{cases} \quad (7)$$

Le périmètre

Reprenons l'exemple précédent où on cherche le périmètre $p \pm u(p)$ d'un carré à partir de la mesure $\ell \pm u(\ell) = (1,00 \pm 0,10) \text{ m}$ de la longueur d'un côté. La fonction f telle que $p_{\text{vraie}} = f(\ell_{\text{vraie}})$ est $f(M) = 4M$. On applique les formules de l'équation 7 et on trouve :

$$\begin{cases} p = 4\ell \\ u(p) = 4u(\ell) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 4,00 \text{ m} \\ u(p) = 0,40 \text{ m} \end{cases}$$

29. Voir le paragraphe 9.2.2 pour savoir d'où vient cette valeur.

30. Rassurez-vous. Ici, on ne vous demande que de vous souvenir du résultat, pas de savoir le démontrer.

qui est bien le résultat obtenu par la méthode des encadrements.

La surface

Pour la surface $\Sigma_{\text{vraie}} = \ell^2_{\text{vraie}}$, l'application des formules de l'équation 7 donne

$$\begin{cases} \Sigma &= \ell^2 \\ u(\Sigma) &= 2\ell u(\ell) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma &= 1,00 \text{ m}^2 \\ u(\Sigma) &= 0,20 \text{ m}^2 \end{cases}$$

L'incertitude-type calculée par les deux méthodes (encadrement et développement de Taylor) est la même. La mesure $\Sigma = \ell^2$ est en revanche légèrement différente ($1,00 \text{ m}^2$ au lieu de $1,01 \text{ m}^2$) mais la différence reste faible par rapport à l'incertitude $u(\Sigma)$.

Pour comprendre l'origine de la différence entre les deux méthodes, explicitons les calculs faits dans la méthode par encadrement :

$$\begin{aligned} (\ell - u(\ell))^2 &< \Sigma_{\text{vraie}} < (\ell + u(\ell))^2 \\ \ell^2 + u(\ell)^2 - 2\ell u(\ell) &< \Sigma_{\text{vraie}} < \ell^2 + u(\ell)^2 + 2\ell u(\ell) \end{aligned}$$

Ce résultat, exact car sans hypothèse, de la mesure de la surface $\Sigma \pm u(\Sigma)$ indique que

$$\begin{cases} \Sigma &= \ell^2 + u(\ell)^2 \\ u(\Sigma) &= 2\ell u(\ell) \end{cases}$$

Dans le développement de Taylor, on remarque qu'il manque le terme³¹ $u(\ell)^2$. Cela est dû à l'hypothèse faite dans le développement de Taylor qui considère que le terme $u(\ell)$ est petit par rapport à ℓ . On peut par conséquent négliger le terme $u(\ell)^2$ devant ℓ^2 et devant $2\ell u(\ell)$ sans trop se tromper sur le résultat $\Sigma \pm u(\Sigma)$.

8.3. — Calcul de l'incertitude dépendant de plusieurs variables

8.3.1. — Cas général

La grandeur d'intérêt G dépend souvent de plusieurs paramètres ($X, Y, Z, \dots$) et peut s'écrire $G = f(X, Y, Z, \dots)$ avec f une fonction. Si on peut mesurer les paramètres $x \pm u(x)$, $y \pm u(y)$, $z \pm u(z)$, $\dots$, et en supposant que les incertitudes relatives restent *raisonnables*³² et sont indépendantes³³, on peut appliquer les formules suivantes :

$$\begin{cases} g &= f(x, y, z, \dots) \\ u(g) &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 u(x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 u(y)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 u(z)^2 + \dots} \end{cases} \quad (8)$$

Cette formule fait apparaître les dérivées partielles de la fonction f à plusieurs variables. La dérivée partielle par rapport à une variable x se calcule en dérivant comme d'habitude par rapport à x en considérant toutes les autres variables ($y, z, \dots$) constantes. Cette formule peut ne pas paraître simple mais dans la pratique elle se simplifie souvent.

Remarque : en considérant une seule variable, les équations 8 se ramènent aux équations 7.

31. L'incertitude aléatoire $u(\ell)$ sur ℓ conduit à une incertitude systématique $u(\ell)^2$ sur Σ .

32. Disons que $|u(x)/x|$ et les autres quantités équivalentes restent de l'ordre de quelques pour cent au maximum.

33. Au sens des probabilités, cela signifie que la connaissance d'une variable aléatoire n'influe pas sur la distribution des autres. Autrement dit, la valeur du paramètre x ne change pas la valeur d'un autre paramètre y .

Exemple : volume d'un cylindre

On mesure de manière indépendante la hauteur et le diamètre d'un cylindre et on obtient $h \pm u(h) = (4,0 \pm 0,10)$ m et $D \pm u(D) = (1,0 \pm 0,10)$ m. Pour estimer le volume $\mathcal{V}_{\text{vraie}}$ du cylindre, on utilise son expression en fonction du diamètre D_{vraie} et de la hauteur h_{vraie}

$$\mathcal{V}_{\text{vraie}} = \frac{h_{\text{vraie}} \pi D_{\text{vraie}}^2}{4}$$

et on applique les équations 8 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = \frac{h \pi D^2}{4} \\ u(\mathcal{V}) = \sqrt{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 u(h)^2 + \left(\frac{h \pi D}{2}\right)^2 u(D)^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = 3,14 \text{ m}^3 \\ u(\mathcal{V}) = 0,63 \text{ m}^3 \end{array} \right.$$

8.3.2. — Cas d'une loi en puissance

Dans l'exemple précédent, factorisons $\mathcal{V}$ dans l'expression de l'incertitude. On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = \frac{h \pi D^2}{4} \\ u(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \sqrt{\left(\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{2u(D)}{D}\right)^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = \frac{h^1 \pi D^2}{4} \\ \frac{u(\mathcal{V})}{\mathcal{V}} = \sqrt{\left(\frac{1 u(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{2 u(D)}{D}\right)^2} \end{array} \right.$$

La dernière écriture ne fait intervenir que les incertitudes relatives sur $\mathcal{V}$, D et h et les puissances auxquelles sont élevées les variables h et D dans l'expression de $\mathcal{V}$ (en bleu et rouge).

De manière générale, considérons une grandeur X qui est égale au produit de N variables a_i élevées aux puissances β_i . On peut alors écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_N^{\beta_N} \\ \frac{u(X)}{X} = \sqrt{\left(\frac{\beta_1 u(a_1)}{a_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\beta_N u(a_N)}{a_N}\right)^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \prod_{i=1}^N a_i^{\beta_i} \\ \frac{u(X)}{X} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\beta_i u(a_i)}{a_i}\right)^2} \end{array} \right.$$

8.4. — Cas particuliers

On peut se contenter de connaître les équations 8 et de les appliquer à chaque fois qu'on doit calculer une incertitude qui dépend de plusieurs variables. Pour gagner du temps et éviter les erreurs de calculs, il est très fortement conseillé d'apprendre les formules du tableau 1 qui découlent des équations 8 pour des cas particuliers qu'on rencontre très fréquemment.

Fonction g	Incertitude $u(g)$	Commentaire
$g = x + y$	$u(g) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}$	x et y doivent être indépendants. Somme quadratique des incertitudes absolues.
$g = x - y$	$u(g) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}$	x et y doivent être indépendants. Somme quadratique des incertitudes absolues.
$g = x y$	$\frac{u(g)}{g} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$	x et y doivent être indépendants. Somme quadratique des incertitudes relatives.
$g = \frac{x}{y}$	$\frac{u(g)}{g} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$	x et y doivent être indépendants. Somme quadratique des incertitudes relatives.
$g = x^\alpha y^\beta$	$\frac{u(g)}{g} = \sqrt{\left(\frac{\alpha u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\beta u(y)}{y}\right)^2}$	x et y doivent être indépendants. Somme quadratique des incertitudes relatives pondérées.
Formules générales		
$g = \sum_{i=1}^N (\pm a_i)$	$u(g) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u(a_i)^2}$	Les a_i sont indépendants. Somme quadratique des incertitudes absolues.
$g = \prod_{i=1}^N a_i^{\beta_i}$	$\frac{u(g)}{g} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\beta_i u(a_i)}{a_i}\right)^2}$	Les a_i sont indépendants. Somme quadratique des incertitudes relatives pondérées.

TABLE 1 – Cas particuliers de propagation des incertitudes.

9. — Niveau de confiance et incertitude élargie

9.1. — Distribution, moyenne et écart-type

Au paragraphe 6.2, nous avons réduit l'ensemble des mesures à deux nombres :

- **la mesure m** : valeur la plus probable qui est égale à la moyenne des valeurs mesurées³⁴ ;
- **l'incertitude-type $u(m)$** : égale à l'écart-type de la distribution de probabilité des mesures effectuées (incertitudes de type A) ou que l'on pourrait effectuer sous certaines hypothèses (incertitudes de type B).

Cependant, plusieurs distributions peuvent avoir la même moyenne et le même écart-type σ sans pour autant être égales : par exemple, les trois distributions représentées sur la figure 3.

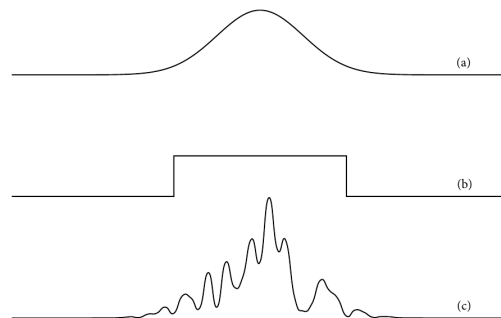


FIGURE 3 – Trois distributions de même moyenne et de même écart-type. (a) gaussienne. (b) uniforme. (c) quelconque.

9.2. — Niveau de confiance

Si on connaît la distribution de probabilité, on peut compléter le résultat $m \pm u(m)$ en donnant la probabilité α pour que le mesurande (la valeur vraie) M_{vraie} soit inclus dans l'intervalle $[m - u(m), m + u(m)]$:

$$P(m - u(m) < M_{\text{vraie}} < m + u(m)) = \alpha$$

La valeur α donne ainsi le niveau de confiance avec lequel on peut dire que M_{vraie} est effectivement dans l'intervalle de mesure. Cette valeur dépend de la distribution.

9.2.1. — Distribution gaussienne

Si la distribution est gaussienne (loi normale comme le (a) de la figure 3), on peut démontrer que l'intervalle $m \pm u(m)$ correspond à un niveau de confiance de 68,27% :

- dans environ 68% des cas, le mesurande M_{vraie} se trouve entre $m - u(m)$ et $m + u(m)$;
- dans environ 16% des cas, le mesurande est plus grand que $m + u(m)$;
- dans environ 16% des cas, le mesurande est plus petit que $m - u(m)$;

Il faut bien entendu que $u(m)$ soit estimée correctement pour pouvoir écrire cela.

³⁴. Dans des cas moins simples que nous ne rencontrerons pas cette année, la valeur la plus probable n'est pas égale à la moyenne.

9.2.2. — Distribution uniforme

Si la distribution est uniforme (cas (b) de la figure 3), l'intervalle $m \pm u(m)$ correspond à un niveau de confiance de $1/\sqrt{3} \approx 57,74\%$.

9.3. — Incertitude élargie

Dans la plupart des domaines, une probabilité de 68 % ou 58 % n'est pas suffisante pour prendre une décision : médecine, commerce, industrie, etc. Pour augmenter la probabilité α que le mesurande M_{vraie} soit effectivement inclus dans l'intervalle de mesure affiché $m \pm u_\alpha(m)$, il faut augmenter la largeur de l'intervalle, et donc l'incertitude, d'un facteur k :

$$u_\alpha(m) = k u(m)$$

Bien entendu, plus le niveau α est proche de 1 (certitude absolue que M_{vraie} est dans l'intervalle $m \pm u_\alpha(m)$), plus l'intervalle est étendu et plus le facteur k d'élargissement est grand et moins on a d'information sur la valeur M_{vraie} .

9.3.1. — Distribution gaussienne

Si la distribution des mesures est gaussienne, l'intervalle :

- $m \pm 1,960 u(m)$ correspond à un niveau de confiance de 95 %³⁵ ;
- $m \pm 2 u(m)$ correspond à un niveau de confiance de 95,45 % ;
- $m \pm 3 u(m)$ correspond à un niveau de confiance de 99,73 % ;

9.3.2. — Distribution uniforme

Si la distribution est uniforme, l'intervalle :

- $m \pm 1.645 u(m)$ correspond à un niveau de confiance de 95 % ;
- $m \pm 1.653 u(m)$ correspond à un niveau de confiance de 95,45 % ;
- $m \pm 1.727 u(m)$ correspond à un niveau de confiance de 99,73 % ;

On remarque que les facteurs k d'élargissement et la probabilité α dépendent fortement de la distribution de probabilité (tout comme $u(m)$ en dépend).

9.3.3. — Intérêt de l'incertitude élargie

L'incertitude élargie n'est qu'une convention, une habitude de travail. Multiplier $u(m)$ par un facteur k en supposant (ou mesurant) une distribution de probabilité pour obtenir $u_\alpha(m)$ ne fournit aucune nouvelle information. Cela permet simplement de présenter le résultat sous une forme à laquelle l'utilisateur (le médecin, le mécanicien, l'architecte, le trader) est habitué.

Quoi qu'il en soit, il faut se souvenir que le niveau de confiance α est incertain car la connaissance de la loi de probabilité (qui n'est pas nécessairement gaussienne) et la connaissance de l'incertitude $u(m)$ sont limitées.

35. Il s'agit de l'intervalle conventionnel dans le domaine bio-médical.

10. — Représentation graphique par un physicien

Nous voyons des graphiques partout de nos jours : à la télévision, dans les journaux, sur les affiches. Le physicien utilise également des graphiques pour présenter ses résultats expérimentaux et théoriques (dans un compte rendu de TP, une conférence, un article). Pour que les graphiques soient utilisables par la communauté scientifique, il faut respecter certaines règles!

10.1. — Représentation des points de mesure

Supposons que Jessica Netdanlfrigo étudie l'évolution d'une grandeur Y en fonction d'une grandeur X . Elle réalise des mesurages simultanés de Y et X en faisant varier X et, à la fin de ses mesurages elle a un ensemble de N couples de valeurs associées à leur incertitude-type $[x_i \pm u(x_i), y_i \pm u(y_i)]$ avec i variant de 1 à N . Soient q_X et q_Y les unités des grandeurs X et Y .

Quand il représente ses mesures sur un graphique cartésien, le physicien doit :

1. Représenter chaque **point de mesure** par une croix dont la taille des branches est égale à l'incertitude-type.
2. Nommer les axes en précisant l'unité.
3. Donner l'échelle sur chaque axe (au moins trois valeurs ce qui permet de savoir si l'échelle est linéaire, logarithmique, autre).

Attention : on ne trace pas une « courbe expérimentale » mais des points expérimentaux!

Si on relie les points de mesure par une ligne, on sous-entend qu'on a mesuré l'ensemble des points qui constituent la ligne. Cette règle n'est pas toujours respectée par les scientifiques. Cela ne doit pas vous empêcher de prendre de bonnes habitudes! La représentation des données ressemble donc au graphique de la figure 4.

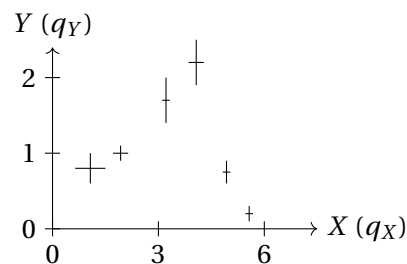


FIGURE 4 – Représentation des **points de mesure** de la grandeur Y d'unité q_Y en fonction de la grandeur X d'unité q_X . La longueur des branches des croix est égale à l'incertitude-type.

On peut ajouter un symbole au centre de la croix pour différencier plusieurs séries de mesures sur un même graphique mais les croix donnant les incertitudes doivent toujours être tracées.

10.2. — Représentation d'une courbe théorique

Jessica, qui a obtenu la figure 4, aimerait superposer la prévision théorique de Jess Ichèzdenl-salon selon laquelle $Y = f(X)$ avec f une fonction. Comme il s'agit d'une prédiction théorique, on peut calculer les valeurs prédites de Y pour toutes les valeurs de X que l'on souhaite. Ainsi, **on peut tracer une courbe théorique** comme le fait Jessica sur la figure 5.

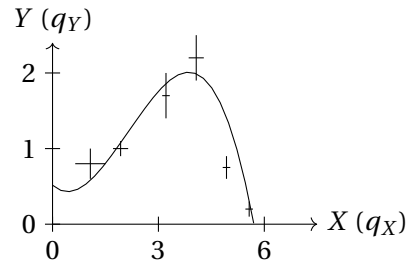


FIGURE 5 – *Superposition d'une courbe théorique aux points de mesures de la figure 4.*

11. — Ajustement des moindres carrés pondérés

11.1. — Cas général

Une loi théorique dépend d'un certain nombre de paramètres p et on peut écrire : $Y = f(X, p)$. Sur la figure 5, Jess et Jessica ont fixé les valeurs des paramètres p en fonction de ce qu'ils savaient avant l'expérience de Jessica mais, en faisant varier les paramètres p , Jessica obtient le faisceau de courbes présentées sur la figure 6. Elle se demande quelles sont les valeurs des para-

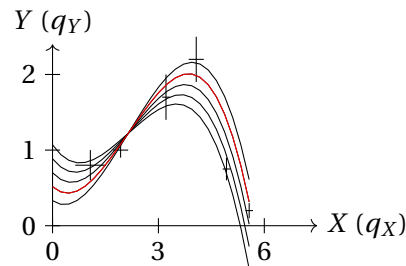


FIGURE 6 – *Superposition des courbes théoriques aux points de mesures de la figure 4 pour plusieurs valeurs des paramètres du modèle théorique. La courbe rouge est celle de la figure 5.*

mètres p qui reproduisent au mieux les observations et permettront donc des prédictions plus fines. Pour répondre à cette question, on cherche les valeurs p qui minimisent un critère quantitatif qui traduit l'assertion « la loi théorique prédit correctement les mesures expérimentales ». On dit qu'on **ajuste la loi théorique aux données expérimentales**³⁶.

Une méthode est celle des **moindres carrés pondérés** pour laquelle le critère à minimiser est la somme³⁷ $\chi^2(p)$ des carrés des distances entre les N points de mesures $[x_i, y_i]$ et les N valeurs prédites $[x_i, f(x_i, p)]$ (le numérateur dans la formule qui suit) pondérés par un terme σ_i^2 qui dépend des incertitudes de mesures $u(x_i)$ et $u(y_i)$ (le dénominateur) :

$$\chi^2(p) = \sum_{i=1}^N \frac{|y_i - f(x_i, p)|^2}{\sigma_i^2}$$

où, en notant f' la fonction dérivée de f par rapport à x :

$$\sigma_i^2 = u(y_i)^2 + [f'(x_i, p) u(x_i)]^2$$

36. On entend souvent qu'on *fit* la loi théorique aux données. Évitions cet anglicisme.

37. χ se prononce *ki*.

Si les incertitudes sur la mesure numéro i sont plus grandes que sur les autres mesures, σ_i^2 est grand et le terme numéro i de la somme est petit par rapport aux autres : on donne moins de poids à ce terme qu'aux autres dans la somme car on sait que les mesures x_i et y_i peuvent être éloignées des valeurs des mesurandes X et Y .

Dans le cas général, trouver les valeurs de p qui minimisent $\chi^2(p)$ n'est pas un problème mathématique simple : la fonction peut avoir plusieurs minima locaux, il faut calculer la fonction f' à chaque fois qu'on change la valeur de p , il faut déterminer l'incertitude-type sur les valeurs optimales de p , etc.

Remarquons que la plupart des outils informatiques d'ajustement ignorent les incertitudes sur les abscisses x_i pour simplifier l'expression du terme de pondération en $\sigma_i^2 = u(y_i)^2$. Ces outils fournissent une réponse incomplète (puisqu'ils ignorent une partie des informations mesurées) mais nous sommes parfois obligés de les utiliser³⁸. C'est pour cette raison que **pour minimiser la perte d'information, on représente généralement sur l'axe des abscisses les mesures pour lesquelles les incertitudes sont les plus petites.**

11.2. — Régression linéaire

Si la loi théorique est affine, il y a deux paramètres η et ξ ³⁹ tels que⁴⁰

$$Y = f(X, \eta, \xi) = \eta X + \xi$$

Pour ajuster η et ξ , on calcule χ^2 dont l'expression se simplifie en

$$\chi^2(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^N \frac{|y_i - \eta x_i - \xi|^2}{u(y_i)^2 + \eta^2 u(x_i)^2}$$

Chercher les paramètres (associés à leur incertitude-type) $\eta_{\text{opt}} \pm u(\eta_{\text{opt}})$ et $\xi_{\text{opt}} \pm u(\xi_{\text{opt}})$ qui minimisent χ^2 s'appelle faire une régression linéaire. Là encore, la plupart des outils informatiques ignorent les incertitudes sur les abscisses. **En TP, vous aurez à disposition la fonction python `linfitxy` qui prend en compte toutes les incertitudes.**

11.3. — Nombre de mesures et nombre de paramètres

De nombreuses personnes, et malheureusement certains scientifiques, oublient le sens mathématique d'un ajustement. Par exemple, il n'est pas rare de voir l'ajustement de N points de mesure par une loi qui dépend de $M \geq N$ paramètres p . Sans autre information que ces N mesures, cela n'a aucun sens.

Par exemple, comme par deux points passent toujours une droite, on est sûr de trouver une loi affine (donc, à deux paramètres) qui ajuste parfaitement $N = 2$ mesures au sens des moindres carrés ($\chi^2 = 0$). **Cela signifie que pour démontrer qu'une loi n'est pas affine (ou qu'elle l'est) il faut au minimum $N = 3$ mesurages.**

De manière générale, sur N points de mesures, on ajuste une loi qui dépend au maximum de $N - 1$ paramètres.

38. Votre employeur peut vous obliger à travailler avec un logiciel qui n'est pas parfait.

39. η se prononce *éta* et ξ *ksi*.

40. On qualifie parfois de linéaire la loi $Y = \eta X + \xi$, d'où le nom de régression linéaire. C'est un anglicisme. La loi linéaire est de la forme $Y = \beta X$ avec β une constante (l'ordonnée à l'origine est nulle). On devrait donc parler de régression affine, mais personne ne le fait.

12. — Test en Z

12.1. — Pourquoi un test statistique?

Vous savez désormais comment estimer les incertitudes (types A et B) d'un mesurage, les combiner s'il y en a plusieurs, et écrire le résultat de la mesure $m \pm u(m)$ en suivant les normes d'écriture. En résumé, vous êtes un bon expérimentateur. Félicitations!

Reste à savoir comment vous pouvez utiliser les résultats de vos mesurages.

Imaginons que Adhémar et Hercule Oltractor mesurent indépendamment un même mesurande M_{vraie} dont leur frère Igor prédit la valeur théorique en modélisant le problème :

- Adhémar mesure $m_1 \pm u_1(m) = 1,71 \pm 0,26$ en supposant une distribution gaussienne;
- Hercule mesure $m_2 \pm u_2(m) = 1,60 \pm 0,10$ en supposant une distribution normale⁴¹;
- Igor prédit $m_{\text{th}} = 1,221$.

Deux questions se posent :

1. Est-ce que chaque mesure est en accord avec la prédiction théorique?
2. Est-ce que les deux mesures sont en accord entre elles?

Mauvaise nouvelle : il est impossible de répondre avec certitude à ces questions!

Bonne nouvelle : un test statistique permet d'y répondre avec un certain niveau de certitude.

12.2. — Test statistique, hypothèse nulle et hypothèse alternative

12.2.1. — Test statistique

Un test statistique utilise les résultats expérimentaux pour trancher entre deux hypothèses :

- l'hypothèse nulle H_0 selon laquelle un paramètre de la population (la moyenne, l'écart-type, etc.) vaut une valeur particulière fixe;
- l'hypothèse alternative H_1 qui est n'importe quelle autre hypothèse différente de H_0 .

C'est l'hypothèse nulle H_0 qui est soumise au test et toute la démarche du test s'effectue en considérant que H_0 est vraie.

Chaque test statistique fixe des règles de décision qui nous permettent d'accepter ou de rejeter l'hypothèse nulle. Toutefois, comme la décision est basée sur une information partielle (les résultats de l'expérience), il est statistiquement impossible de prendre la bonne décision avec une probabilité certaine (c'est-à-dire de 100%). Ainsi, la décision aboutit à choisir entre H_0 et H_1 et il y a donc quatre cas possibles résumés dans la table suivante avec leur probabilité

	H_0 vraie	H_1 vraie
H_0 choisie	$1 - \alpha$	β
H_1 choisie	α	$1 - \beta$

Les paramètres α et β sont les probabilités d'erreur de première espèce et deuxième espèce :

- α , seuil de signification, est la probabilité de choisir H_1 après le test alors que H_0 est vraie;
- β est la probabilité de choisir H_0 après le test alors que H_1 est vraie : sa valeur dépend de la nature du test et de l'hypothèse alternative H_1 ; la valeur $1 - \beta$ est la puissance du test.

41. Une loi normale est une loi gaussienne.

12.2.2. — Choix de l'hypothèse nulle

Le choix de H_0 peut être dicté par divers mobiles :

- une seule hypothèse H_0 peut être formulée d'après les informations qu'on a à disposition : par exemple, on coupe un barreau et on veut que sa longueur soit $L_1 = 1,34$ m ;
- comme on ne veut pas rejeter H_0 trop souvent, l'hypothèse doit être raisonnable, solidement établie et non-contredite par d'autres expériences : si l'objectif d'une expérience est de tester une loi physique bien établie, l'hypothèse H_0 est que la loi physique testée représente correctement les résultats de la nouvelle expérience⁴² ;
- H_0 est en générale une hypothèse prudente : on évite de tester l'hypothèse selon laquelle un nouveau médicament guérit 1000 fois plus de patients que le médicament actuel ;
- l'hypothèse H_0 est choisie pour des raisons subjectives.

12.2.3. — Choix de la signification α

La valeur de la probabilité α dépend du risque de première espèce encouru, c'est-à-dire du risque avec lequel on accepte de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie. Dans certains cas, on choisit α très faible pour minimiser le risque de se tromper. Par exemple, pour annoncer la découverte du boson de Higgs, les scientifiques ont utilisé $\alpha = 10^{-6}$. Dans d'autres cas, on s'autorise un risque plus important : en médecine, on utilise souvent $\alpha = 0,05$ ou $\alpha = 0,01$.

12.2.4. — Hypothèse alternative

Considérons l'hypothèse nulle H_0 : le paramètre $\mu = \mu_0$ avec μ_0 une constante fixée.

Il existe plusieurs hypothèses alternatives H_1 à H_0 et le choix de H_1 modifie la probabilité β . On peut réaliser

- un test bilatéral en écrivant $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- un test unilatéral à gauche en écrivant $H_1 : \mu < \mu_0$
- un test unilatéral à droite en écrivant $H_1 : \mu > \mu_0$

Ce semestre, nous utiliserons uniquement des tests bilatéraux.

12.3. — Test de comparaison à une moyenne théorique : test en z bilatéral

Reprenons l'exemple du paragraphe 12.1 et plus précisément, la comparaison du résultat obtenu par Adhémar $m_1 \pm u_1(m) = 1,71 \pm 0,26$ à la prédiction théorique $m_{th} = 1,221$.

Cela revient à comparer la moyenne m_1 des mesures⁴³ à la prédiction m_{th} . On applique alors un **test de comparaison à une moyenne**.

L'hypothèse H_0 s'écrit : $m_1 = m_{th}$.

Adhémar écrit que ses mesures sont les réalisations d'une variable aléatoire M de distribution gaussienne de moyenne m_1 et d'écart-type $\sigma = u_1(m)$. On définit alors la variable aléatoire Z :

$$Z = \frac{M - m_{th}}{\sigma} \quad (9)$$

42. Même si l'objectif est de démontrer que la loi n'explique pas les nouvelles mesures.

43. qui estime l'espérance mathématique de la variable aléatoire M .

Z représente la distance entre la variable M et la valeur m_{th} en nombre d'écart-types σ .

Si H_0 est vérifiée, la variable Z suit une loi gaussienne centrée⁴⁴ et réduite⁴⁵. Elle a une probabilité faible de prendre de grandes valeurs.

Par exemple, considérons une réalisation z de Z et cherchons la probabilité pour que $|z|$ soit supérieure à une valeur donnée z_{seuil} :

$$\mathcal{P}(|z| \geq z_{seuil}) = 1 - \mathcal{P}(|z| < z_{seuil}) = 1 - \mathcal{P}(-z_{seuil} < z < z_{seuil}) = 1 - \int_{-z_{seuil}}^{z_{seuil}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

On peut calculer cette expression à l'aide d'un logiciel ou en utilisant une table comme celle de la figure 7. Celle-ci donne la valeur de $\mathcal{P}(|z| \geq z_{seuil})$ (valeurs dans le tableau) en fonction de z_{seuil} (dixième du nombre dans la première colonne et centième dans la première ligne). Ainsi, si on souhaite que la probabilité soit 0,05, on trouve que z_{seuil} vaut 1,96.

Pour comparer une mesure $m_1 \pm u(m_1)$ qui suit une loi gaussienne à une valeur théorique m_{th} , on applique un test en z bilatéral pour tester l'hypothèse nulle $\{H_0 : m_1 = m_{th}\}$ en calculant

$$|z| = \left| \frac{m_1 - m_{th}}{u(m_1)} \right| \quad (10)$$

On rejette l'hypothèse nulle H_0 au risque $\alpha = 5\%$ si $|z|$ est supérieure à $z_{seuil} = 1,96$.

Faisons l'application numérique avec les valeurs proposées par Adhémar et Igor :

$$|z_1| = \left| \frac{m_1 - m_{th}}{u(m_1)} \right| = \left| \frac{1,71 - 1,221}{0,26} \right| = 1,88$$

On ne peut pas rejeter l'hypothèse $\{H_0 : m_1 = m_{th}\}$ au risque $\alpha = 5\%$. On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse de compatibilité entre la mesure de Adhémar et la prédiction de Igor au risque de 5%. Autrement dit, la valeur théorique et la valeur mesurée sont compatibles au risque 5%. Remarquez qu'on n'affirme pas que H_0 est vérifiée car il y a toujours le risque de 5%.

On peut également comparer la mesure de Hercule à la valeur prédite par Igor et on trouve :

$$|z_2| = \left| \frac{m_2 - m_{th}}{u(m_2)} \right| = \left| \frac{1,60 - 1,221}{0,10} \right| = 3,79$$

On peut rejeter l'hypothèse $\{H_0 : m_2 = m_{th}\}$ au risque $\alpha = 5\%$. On rejette donc l'hypothèse de compatibilité entre la mesure de Hercule et la prédiction de Igor au risque 5%.

12.4. — Test de comparaison entre deux moyennes : test en z bilatéral

Pour comparer les deux résultats expérimentaux obtenus indépendamment par Adhémar et Hercule Oltractor on utilise un test de comparaison entre deux moyennes.

L'hypothèse H_0 s'écrit : $m_1 = m_2$. Ainsi, H_0 suppose que les deux valeurs moyennes sont égales.

44. Son espérance est nulle.

45. Son écart-type vaut 1.

centièmes	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
dixièmes										
0,0	1,00000	0,99202	0,98404	0,97607	0,96809	0,96012	0,95216	0,94419	0,93624	0,92829
0,1	0,92034	0,91241	0,90448	0,89657	0,88866	0,88076	0,87288	0,86501	0,85715	0,84931
0,2	0,84148	0,83367	0,82587	0,81809	0,81033	0,80259	0,79486	0,78716	0,77948	0,77182
0,3	0,76418	0,75656	0,74897	0,74140	0,73386	0,72634	0,71885	0,71138	0,70395	0,69654
0,4	0,68916	0,68181	0,67449	0,66720	0,65994	0,65271	0,64552	0,63836	0,63123	0,62413
0,5	0,61708	0,61005	0,60306	0,59611	0,58920	0,58232	0,57548	0,56868	0,56191	0,55519
0,6	0,54851	0,54186	0,53526	0,52869	0,52217	0,51569	0,50925	0,50286	0,49650	0,49019
0,7	0,48393	0,47770	0,47152	0,46539	0,45930	0,45325	0,44725	0,44130	0,43539	0,42953
0,8	0,42371	0,41794	0,41222	0,40654	0,40091	0,39533	0,38979	0,38430	0,37886	0,37347
0,9	0,36812	0,36282	0,35757	0,35237	0,34722	0,34211	0,33706	0,33205	0,32709	0,32217
1,0	0,31731	0,31250	0,30773	0,30301	0,29834	0,29372	0,28914	0,28462	0,28014	0,27571
1,1	0,27133	0,26700	0,26271	0,25848	0,25429	0,25014	0,24605	0,24200	0,23800	0,23405
1,2	0,23014	0,22628	0,22246	0,21870	0,21498	0,21130	0,20767	0,20408	0,20055	0,19705
1,3	0,19360	0,19020	0,18684	0,18352	0,18025	0,17702	0,17383	0,17069	0,16759	0,16453
1,4	0,16151	0,15854	0,15561	0,15272	0,14987	0,14706	0,14429	0,14156	0,13887	0,13622
1,5	0,13361	0,13104	0,12851	0,12602	0,12356	0,12114	0,11876	0,11642	0,11411	0,11183
1,6	0,10960	0,10740	0,10523	0,10310	0,10101	0,09894	0,09691	0,09492	0,09296	0,09103
1,7	0,08913	0,08727	0,08543	0,08363	0,08186	0,08012	0,07841	0,07673	0,07508	0,07345
1,8	0,07186	0,07030	0,06876	0,06725	0,06577	0,06431	0,06289	0,06148	0,06011	0,05876
1,9	0,05743	0,05613	0,05486	0,05361	0,05238	0,05118	0,05000	0,04884	0,04770	0,04659
2,0	0,04550	0,04443	0,04338	0,04236	0,04135	0,04036	0,03940	0,03845	0,03753	0,03662
2,1	0,03573	0,03486	0,03401	0,03317	0,03235	0,03156	0,03077	0,03001	0,02926	0,02852
2,2	0,02781	0,02711	0,02642	0,02575	0,02509	0,02445	0,02382	0,02321	0,02261	0,02202
2,3	0,02145	0,02089	0,02034	0,01981	0,01928	0,01877	0,01827	0,01779	0,01731	0,01685
2,4	0,01640	0,01595	0,01552	0,01510	0,01469	0,01429	0,01389	0,01351	0,01314	0,01277
2,5	0,01242	0,01207	0,01174	0,01141	0,01109	0,01077	0,01047	0,01017	0,00988	0,00960
2,6	0,00932	0,00905	0,00879	0,00854	0,00829	0,00805	0,00781	0,00759	0,00736	0,00715
2,7	0,00693	0,00673	0,00653	0,00633	0,00614	0,00596	0,00578	0,00561	0,00544	0,00527
2,8	0,00511	0,00495	0,00480	0,00465	0,00451	0,00437	0,00424	0,00410	0,00398	0,00385
2,9	0,00373	0,00361	0,00350	0,00339	0,00328	0,00318	0,00308	0,00298	0,00288	0,00279
3,0	0,00270	0,00261	0,00253	0,00245	0,00237	0,00229	0,00221	0,00214	0,00207	0,00200
3,1	0,00194	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00163	0,00158	0,00152	0,00147	0,00142
3,2	0,00137	0,00133	0,00128	0,00124	0,00120	0,00115	0,00111	0,00108	0,00104	0,00100
3,3	0,00097	0,00093	0,00090	0,00087	0,00084	0,00081	0,00078	0,00075	0,00072	0,00070
3,4	0,00067	0,00065	0,00063	0,00060	0,00058	0,00056	0,00054	0,00052	0,00050	0,00048
3,5	0,00047	0,00045	0,00043	0,00042	0,00040	0,00039	0,00037	0,00036	0,00034	0,00033
3,6	0,00032	0,00031	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022
3,7	0,00022	0,00021	0,00020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015
3,8	0,00014	0,00014	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010
3,9	0,00010	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007

FIGURE 7 – Table du test statistique en z bilatéral.

Pour comparer deux résultats indépendants qui suivent des lois gaussiennes de moyennes m_1 et m_2 et de variances $(u(m_1))^2$ et $(u(m_2))^2$, on applique un test en z bilatéral pour tester l'hypothèse nulle $\{H_0 : m_1 = m_2\}$ en calculant :

$$|z| = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{(u(m_1))^2 + (u(m_2))^2}} \quad (11)$$

On rejette l'hypothèse nulle H_0 au risque $\alpha = 0,05 = 5\%$ si $|z|$ est supérieure à $z_{\text{seuil}} = 1,96$.

Appliquons ce test aux mesures de Adhémar et de Hercule : $|z| = \frac{1,71 - 1,60}{\sqrt{0,26^2 + 0,10^2}} = 0,39$

On ne peut pas rejeter l'hypothèse $\{H_0 : m_1 = m_2\}$ au risque 5%. Donc, les deux valeurs mesurées sont compatibles au risque 5%.

12.5. — Attention aux pièges

12.5.1. — Importance des incertitudes

La valeur $m_2 = 1,60$ est plus proche de la valeur théorique $m_{\text{th}} = 1,221$ que la valeur $m_1 = 1,71$. En travaillant mal, on pourrait conclure que la mesure m_2 est plus compatible avec la valeur théorique m_{th} que la mesure m_1 car : $m_2 - m_{\text{th}} < m_1 - m_{\text{th}}$. D'un point de vue statistique, ce raisonnement ne vaut rien. Il est même erroné dans cet exemple comme on l'a démontré dans les paragraphes précédents et un bon physicien esquivera toujours ce piège ! On remarque au passage l'importance d'estimer correctement les incertitudes.

12.5.2. — Les raccourcis interdits

On a montré que

1. $m_1 \pm u(m_1)$ et m_{th} sont compatibles au risque 5%.
2. $m_1 \pm u(m_1)$ et $m_2 \pm u(m_2)$ sont compatibles au risque 5%.

Un piège classique est de conclure de ces deux résultats que $m_2 \pm u(m_2)$ et m_{th} sont compatibles. Ceci est bien entendu une erreur comme nous l'avons démontré grâce au troisième test qui montre que $m_2 \pm u(m_2)$ et m_{th} ne sont pas compatibles au risque 5%.