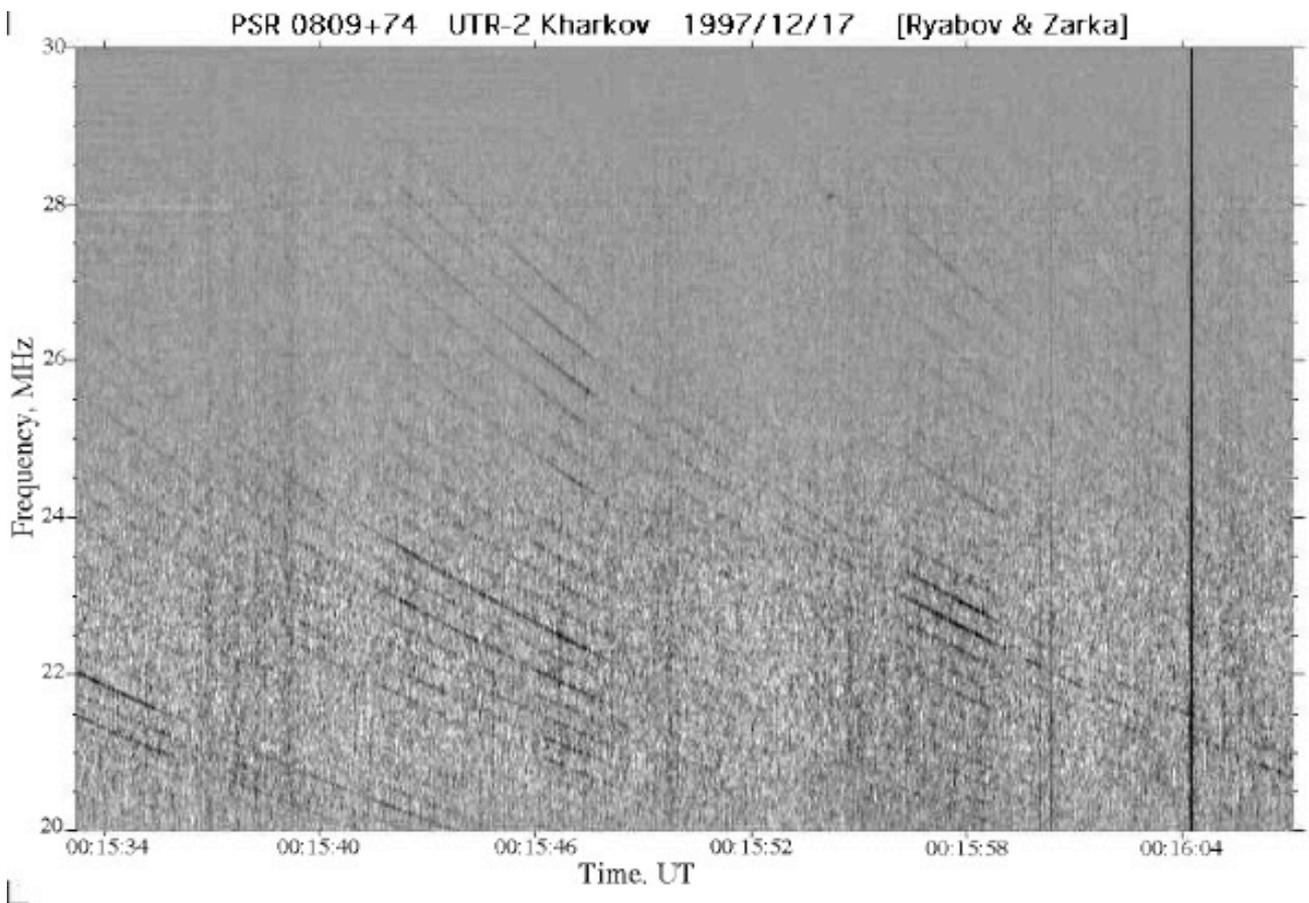


Exercice 1 [Propagation : Dispersion]

- Le pulsar du crabe a une période $P = 33$ msec. Il est situé à une distance de ≈ 1.9 kpc. La densité électronique moyenne dans le milieu interstellaire est $\langle N_e \rangle = 0.03 \text{ cm}^{-3}$.
- a) comparer le retard dû à la dispersion entre 410 et 1420 MHz (bandes protégées) à la valeur de la période.
- b) quelles contraintes en déduisez-vous sur la bande d'observation Δf ?

Exercice 2 [Propagation : Dispersion]

- Estimer, à partir du spectre dynamique ci-dessous, la mesure de dispersion du pulsar PSR 0809+74. En déduire $\langle N_e \rangle$ dans la direction de ce pulsar, situé à une distance d'environ 200 pc.

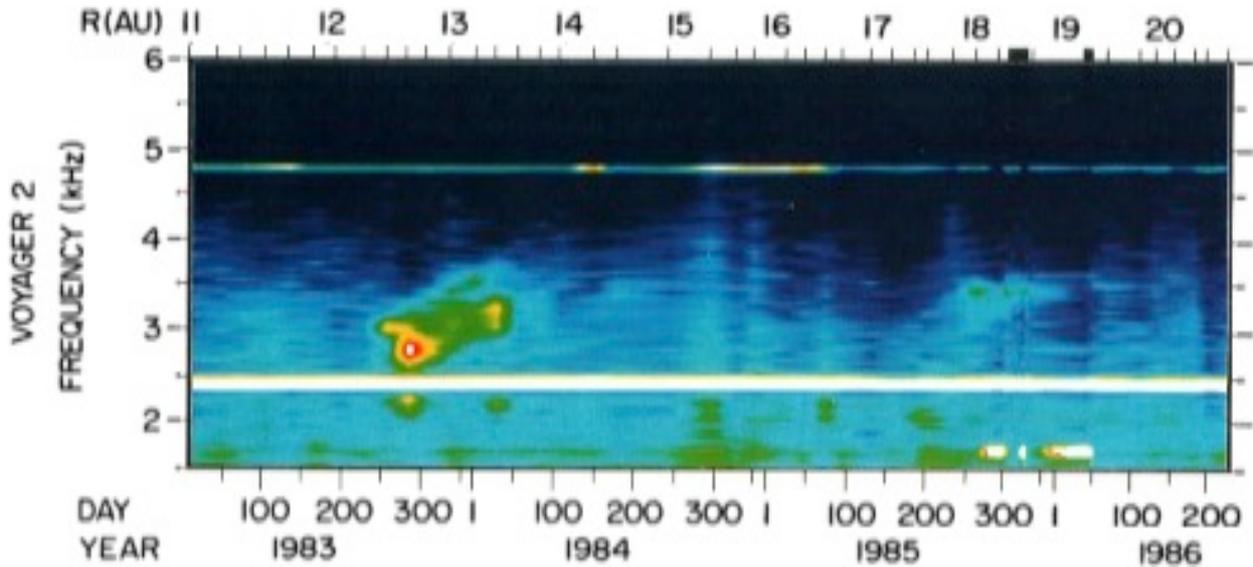


Exercice 3 [Propagation : Fréquence de coupure]

• Les sondes Voyager ont commencé à détecter courant 1983, quand leur distance au Soleil était ≥ 12 UA, une émission à 2-3 kHz (voir fig. ci-dessous), attribuée aux frontières externes du système solaire (≥ 100 UA).

→ Pourquoi cette émission n'a-t-elle pas été détectée plus tôt alors que dès sa détection, elle présentait une intensité très supérieure au bruit de fond ?

NB: $N_e \approx 10 \text{ cm}^{-3}$ dans le vent solaire à l'orbite terrestre et décroît en $1/L^2$ avec L la distance au Soleil.



Exercice 4 [Propagation : Dispersion ; Analyse de Fourier]

• Les sondes interplanétaires envoient leur information sous forme numérisée par radio à $f_0 \sim 10$ GHz :
(1 = impulsion / créneau de durée Δt ; 0 = absence d'émission de durée Δt)

→ Quelle contrainte sur le débit d'information est imposée par le milieu interplanétaire (où $N_e \approx 5 \text{ cm}^{-3}$ à l'orbite terrestre et décroît en $1/L^2$ avec L la distance au Soleil) et l'ionosphère terrestre (qu'on assimilera à une couche de 1000 km d'épaisseur où $N_e \approx 10^5 \text{ cm}^{-3}$) ?

Exercice 5 [Propagation : Dispersion, Effet Faraday]

• Pour un pulsar situé à 880 pc, on mesure la différence de temps d'arrivée du pulse à 334 et 356 MHz : $\Delta t = 0.33$ sec. L'angle du plan de polarisation linéaire entre ces 2 fréquences est 150° .

→ En tirer [DM], $\langle N_e \rangle$, B_{\parallel} dans le milieu interstellaire dans la direction de ce pulsar.

Exercice 6 [Propagation]

• Une onde radioélectrique de pulsation (fréquence angulaire) ω se propage dans un plasma magnétisé (sans collision). On note la fréquence plasma (angulaire) par ω_p , et la gyrofréquence (angulaire) par ω_c .

a) Montrer que pour $\omega \rightarrow 0$, un mode de polarisation circulaire peut toujours se propager, tandis que l'autre est restreint à une gamme limitée d'angles de propagation par rapport au champ magnétique. Trouver l'équation de dispersion de ce premier mode en propagation « quasi-// ».

b) Montrer que sa vitesse de groupe s'exprime: $v_g(\omega) \approx 2c (\omega / \omega_c)^{1/2} / \omega_p$.

Exercice 7 [Propagation : Dispersion, Effet Faraday]

- On observe avec une antenne linéaire un pulsar de période P dont l'émission radio est polarisée linéairement.
- a) Établir l'expression du délai temporel entre 2 minima (ou maxima) d'intensité reçue le long d'un pulse. Commentez.
- b) Imaginez une observation permettant de mesurer très précisément la valeur de B_{\parallel} du MIS dans la direction de ce pulsar.

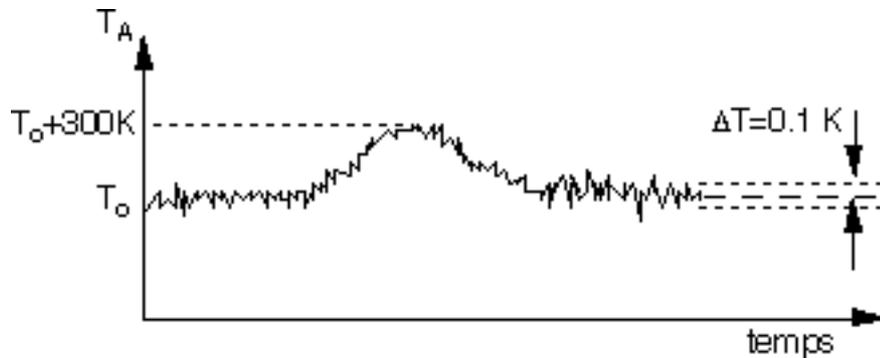
Exercice 8 [Polarisation, Effet Faraday, rapport S/B, scintillations] (Examen 2000)

- On veut mesurer la direction du plan de polarisation linéaire d'une source radio (un satellite artificiel en orbite elliptique autour de la Terre) à une fréquence f . Or, l'environnement terrestre (ionosphère et magnétosphère) provoque à cette fréquence une rotation du plan de polarisation d'un angle α .
- 1) Expliquer brièvement l'origine de cette rotation, et établir l'expression qui donne le temps d'intégration nécessaire pour que l'on puisse mesurer l'orientation du plan de polarisation linéaire de la source avec une précision de $\delta\alpha$ et un rapport signal/bruit (S/B) fixé.
- Le satellite en question émet vers une station de réception un signal polarisé linéairement, de fréquence 100 MHz.
- 2) Déduire du calcul ci-dessus la bande passante et le temps d'intégration à utiliser pour mesurer α avec une précision $\delta\alpha=0.1^\circ$ et un rapport S/B=3
 - à travers l'ionosphère terrestre, d'épaisseur ~ 300 km, où on prendra des valeurs supposées uniformes pour N_e et B_Z : $N_e=10^6 \text{ cm}^{-3}$ $B_Z=0.3$ Gauss
 - à travers la magnétosphère, où l'on supposera $N_e=100 \text{ cm}^{-3}$ et $B_Z=0.05$ Gauss, sur une épaisseur de 2 rayons terrestres ($1 R_T \approx 6400$ km).Lequel des deux milieux peut-on négliger ?
- On observe aussi que le plan de polarisation tourne au cours du temps. A un moment donné, quand la sonde est à haute latitude géomagnétique et que sa vitesse radiale par rapport à la station est de 4 km/s, le plan de polarisation tourne de 0.1° par minute.
- 3) En supposant que les lignes du champ magnétique terrestre sont à ce moment essentiellement alignées avec la direction du satellite, et que la valeur du champ à l'altitude du satellite est ~ 0.1 Gauss, estimer la densité électronique à l'altitude du satellite. Ce taux de variation de l'orientation du plan de polarisation restera-t-il constant au cours de l'orbite ? Et pour une orbite circulaire ?
- Une autre expérience spatiale consiste à envoyer un signal radio de fréquence 0.1 MHz d'une sonde vers une autre distante de 1000 km, et à mesurer son déphasage par rapport à des tops de référence portés par une fréquence beaucoup plus élevée.
- 4) Si la fréquence plasma électronique du milieu où se trouvent les sondes est de 25 kHz, et que l'on mesure une variation moyenne du déphasage égale à 10^{-4} radians/s, estimer la vitesse de séparation des sondes.
- 5) Si de plus le déphasage montre des variations aléatoires d'environ 0.6 radians, estimer les fluctuations (relatives et absolues) de la densité électronique ambiante.
- 6) Si on représente l'ionosphère terrestre (nocturne, par exemple) par une couche de 100 km d'épaisseur où la densité électronique vaut $\approx 10^5 \text{ cm}^{-3}$, montrer que des fluctuations aléatoires $\delta N_e/N_e$ de l'ordre de 10% au-dessus de sites d'observations distants de plus de quelques centaines de km interdisent de réaliser des observations VLBI au-dessous d'une fréquence limite que l'on estimera.

Exercice 9 [Gain, T_A , T_B , rapport S/B]

(Examen 2000)

• On utilise un radiotélescope en forme de disque de 20 m de rayon, de rendement 80%, équipé d'une antenne focale polarisée linéairement, pour observer à 1,6 GHz l'émission continue de la nébuleuse du Crabe. La variation de la température d'antenne lors du passage de la source devant le radiotélescope est représentée sur la figure ci-dessous.



- 1) Calculer en dB le gain de l'antenne, et expliquez brièvement ce qu'il représente.
- 2) Calculer la densité de flux de la nébuleuse à 1,6 GHz (l'émission n'est pas polarisée).
 - Le récepteur utilisé a une bande passante de 10 MHz et une constante d'intégration de 0,1 s.
- 3) Déterminer la température de système T_S du radiotélescope (en justifiant vos approximations si vous en faites). Qu'en déduisez vous sur le système de réception ?
 - La nébuleuse est assimilée à une source circulaire de brillance uniforme, de 4 minutes d'arc de diamètre apparent.
- 4) Calculer sa brillance et sa température de brillance. Que représente exactement cette dernière ?
 - Juste avant le passage de la nébuleuse devant le télescope, une vache noire volant à 2000m d'altitude traverse le lobe du radiotélescope. Elle met 0,5 s à le traverser. On suppose qu'elle a une taille de 50 cm (c'est une vache volante et miniature) et une température de 40°C.
- 5) Avec quelle certitude détecte-t-on son passage sur l'enregistrement ? Et si cela s'était produit pendant l'observation de la nébuleuse ? Et (qualitativement) si la vache avait été blanche ?
 - On observe à 1420 MHz, avec le même radiotélescope et la même bande passante que ci-dessus, le pulsar PSR1913+16, dont la densité de flux à cette fréquence est $\sim 2 \cdot 10^{-29} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$. Sa période est de 0,06 s et la largeur de chaque impulsion est d'environ 10 msec.
- 6) En supposant qu'on puisse l'observer 1 heure par jour, estimer pendant combien de jours il faudra intégrer le signal pour pouvoir détecter ce pulsar avec un rapport signal/bruit de 3. Comment fera-t-on en pratique pour intégrer ce signal ?
- 7) Trouver la bande passante (spectrale) requise pour pouvoir détecter ce pulsar en une seule journée avec un rapport signal/bruit de 1.

Exercice 10 [Équation du RADAR & application]

• Une antenne RADAR émet une puissance P vers une surface circulaire réfléchissante orientée perpendiculairement à la ligne de visée.

a) Montrez que la puissance de l'écho reçu s'exprime:

$$P_{\text{écho}} = P \times G \times S \times s \times a \times g / (4\pi R^2)^2$$

où G est le gain de l'antenne, S sa surface, R la distance de la cible, g le gain de la cible (considérée comme une antenne), s sa surface et a son albédo (on suppose que l'angle solide sous-tendu par la cible est petit devant le lobe de l'antenne - quelle implication cela a-t-il sur la fréquence de travail ?)

• On veut mesurer précisément la période de rotation de la surface de Vénus par RADAR, en mesurant l'élargissement Doppler (spectral) d'un signal continu à 10 GHz envoyé vers la planète. L'antenne a un diamètre de 72 m. La puissance de l'émetteur est de 500 kW dans une bande passante de 10 kHz. La température du système est 200 K. Les autres sources de bruit peuvent être négligées. Vénus a un rayon de 6150 km, et se trouve au plus près à 6×10^7 km de la Terre. On prendra $g \times a = 0.1$ pour Vénus.

b) Sachant que la période de rotation de la planète est de l'ordre de 200 jours, quelle doit être la bande passante du signal émis pour pouvoir mesurer la période à 10% près ? Quelle sera la puissance émise ? Quelle bande passante proposez-vous pour le récepteur et pourquoi ? Pendant combien de temps faut-il intégrer l'écho pour avoir un rapport Signal/Bruit d'environ 5 (on considèrera les cas au centre et au bord de la raie) ?

Exercice 11 [T_A , T_B , rapport S/B, polarisation] (Examen 2002)

• On veut observer avec le réseau décimétrique de Nançay, en polarisation circulaire droite, une radiosource non polarisée, entre 10 et 100 MHz. Le réseau a dans cette gamme un gain constant de 25 décibels ($G \approx 300$) en polarisation circulaire droite.

La température du fond du ciel, supposée uniforme, est donnée par la formule: $T_{\text{ciel}} \text{ (K)} = 10^{23} \nu^{-2.5}$ où ν est la fréquence.

Le spectre de la radiosource est donné par : $S \text{ (Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}) = 1.5 \times 10^{-18} \nu^{-0.8}$

Le récepteur utilisé a une bande passante $B=20$ kHz et une constante d'intégration $\tau=2$ sec.

- Calculer la puissance en Watts captée par le réseau à 10 et à 100 MHz pour le fond du ciel et la radiosource.
- Calculer la valeur du rapport signal/bruit en fonction de la fréquence. Dans quelle gamme peut-on détecter la source avec un rapport signal-sur-bruit $S/B \geq 1$?
- Comment ces résultats sont-ils modifiés si la radiosource est polarisée à 20% circulairement à gauche (et 80% non polarisée) ?

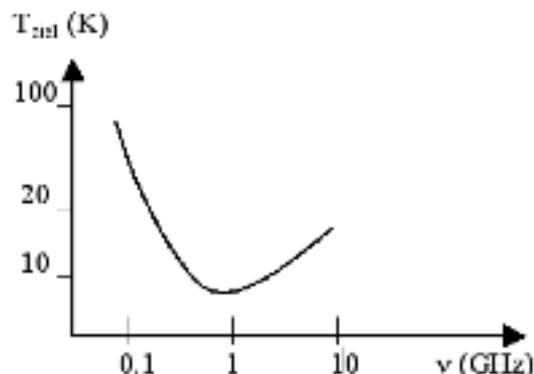
Exercice 12 [T_A , T_B , rapport S/B, communication] (Examen 2002)

• On considère une antenne directive d'aire effective A_1 émettant une puissance spectrale P (W/Hz) par unité de bande passante. Le rayonnement est reçu par une antenne directive d'aire effective A_2 située à une distance D .

a) En supposant que les axes des lobes sont bien alignés, montrer (en le justifiant précisément) que la température d'antenne de l'émetteur, mesurée à la distance D , s'exprime: $T_A = P A_1 A_2 / (k \lambda^2 D^2)$ où k est la constante de Boltzmann.

• On émet un créneau régulier de période 20 sec. On suppose que l'antenne émettrice, directive, a un diamètre de 400 m. L'émetteur a une puissance de 2 MW (mégawatts) dans une bande passante de 10 kHz. La température du système est de 100 K. La température d'antenne du ciel a le spectre donné sur la courbe et dans le tableau ci dessous :

ν (GHz)	T_{ciel} (K)
0.1	100
1	10
10	20



- A quelle fréquence doit-on émettre le signal afin de pénétrer le plus loin possible ?
- Jusqu'à quelle distance de la Terre le créneau peut-il être reconnu de façon "fiable" (discuter ce point) avec un équipement similaire à celui utilisé pour l'émission ?

• Un radiotélescope de 10 m de diamètre et de rendement 90% est utilisé pour observer la nébuleuse du Crabe à 500 MHz. A cette fréquence, la nébuleuse a un diamètre de 4 minutes d'arc et une densité de flux de 100 Jy. Ses coordonnées sont :

Ascension Droite = 04 h 35 m

Déclinaison = +22°

1) Calculer la température d'antenne de la nébuleuse.

• On fait un interféromètre avec 2 antennes identiques à la précédente. La base est de 600 m, orientée suivant la direction Nord-Ouest → Sud-Est.

2) Calculer la période des franges (en angle et en temps) quand la source passe au méridien.

3) Calculer le rapport entre l'amplitude des franges et les fluctuations du signal pour une bande passante d'observation de 1 MHz et un temps d'intégration de 1 s. On prendra une température de système de 500 K.

4) Calculer pour quel azimut (et quelle heure sidérale) les franges disparaissent.

• On se sert ensuite de l'interféromètre précédent, maintenant orienté selon la direction Est-Ouest, en faisant varier la longueur de sa base pour étudier une autre radiosource au voisinage du méridien, à la même fréquence. La réponse observée (variation de la visibilité ou du contraste), quand on fait varier la base d , est de la forme

$$V(d) = \cos(0.18 d) * \sin(0.14 d) / d \quad (\text{à une constante près, avec } d \text{ exprimée en m}).$$

5) Déterminer la distribution d'intensité de la source, et les dimensions relatives de ses composantes.

• Finalement, on veut construire un interféromètre à réseau, orienté en Est-Ouest, toujours à 500 MHz, formé de $N = 2^n$ antennes identiques aux précédentes. On veut que les lobes du réseau soient distants de 10 minutes d'arc.

6) Quelle doit être la distance entre 2 antennes voisines ?

7) Si on désire un pouvoir séparateur de l'ordre de 20 secondes d'arc, combien faudra-t-il d'antennes ?

Quel sera le pouvoir séparateur exact ? Quel sera le gain du réseau dans la direction des maxima du lobe ?

Quel serait le diamètre d'une parabole unique de même gain, et son pouvoir séparateur ?

Exercice 14 [T_A , T_B , rapport S/B, Interférométrie, VLBI, scintillations]

(Examen 2001)

• On observe Jupiter à 30 MHz avec le radiotélescope d'Arecibo. Le rendement du télescope à cette fréquence est de 0.5. Le récepteur utilisé a une réponse quadratique, une bande passante $B=100$ kHz et une constante d'intégration $\tau=0.1$ sec. Lors d'un "orage de bruit" Jovien, la tension de sortie du récepteur atteint un niveau 100 fois supérieur au niveau "calme".

a) Quelle est la densité de flux de Jupiter, sachant que la température de système est 1000 K et que le fond du ciel, supposé uniforme, a une température de brillance de 10^4 K à 30 MHz ? Quelle serait la plus faible densité de flux détectable avec l'instrument ?

b) On suppose que l'émission de Jupiter a un spectre plat (en densité de flux) entre 10 et 30 MHz, et est nul en dehors de cet intervalle. Calculer la puissance (Watts) émise par la source, en supposant l'émission omnidirectionnelle. On prendra une distance Terre-Jupiter égale à 4 UA lors de l'observation.

c) Une expérience de VLBI effectuée avec une base Est-Ouest de 3000 km permet de détecter des franges d'interférence lors de l'observation de l'"orage de bruit" ci-dessus. Quelle est la limite supérieure correspondante pour la dimension de la radiosource au niveau de Jupiter ? En supposant une source circulaire, calculer la limite inférieure de sa température de brillance à 30 MHz et à 10 MHz.

d) Si le contraste des franges détectées ci-dessus est <1 , en déduit-on obligatoirement que la dimension angulaire de la radiosource est voisine du pas des franges d'interférence ?

Exercice 15 [Interférométrie]

• On travaille à une fréquence de 1 GHz avec un interféromètre à 2 antennes mobiles, pouvant former des bases Nord-Sud et Est-Ouest de 1500 m de long.

a) On utilise d'abord la branche EO pour déterminer la dimension d'une radiosource. Quand on fait varier la distance entre les 2 antennes, l'amplitude des franges s'annule pour une distance $D_O = 1000$ m. En supposant que la distribution de brillance de la source dans la direction EO est un créneau, calculer sa largeur θ_{EO} .

b) Pour une autre source, les franges ne s'annulent pas. Pour la distance maximale (1500 m), l'amplitude est encore égale à 0.637 (la valeur 1 correspondant aux bases très courtes). Avec la même hypothèse qu'en a), déterminez la dimension EO de la source.

$$NB: 0.637 = 2/\pi = 1/(\pi/2)$$

c) Si la courbe de visibilité (ou de contraste) $V(d)$ oscille périodiquement avec l'écartement des antennes (d), selon $|V(d)| = |\cos(\pi \times d/500)|$, quelle est la structure de la source observée ?

d) On observe la source de a) avec la branche NS lors de son passage dans le plan méridien du lieu d'observation. En supposant que la source a les mêmes dimensions EO et NS, calculer pour quelle distance entre les antennes l'amplitude des franges va s'annuler.

(la radiosource est supposée se trouver dans l'équateur céleste et la latitude du lieu d'observation est 45°)

Exercice 16 [Interférométrie Radio]

(Examen 2008)

On construit un interféromètre avec 50 antennes identiques, pour travailler dans la gamme spectrale 30 – 80 MHz. Chacune de ces antennes est un réseau phasé constitué de 100 antennes élémentaires identiques, quasi-uniformément réparties dans un disque de 50 m de diamètre. Chaque antenne élémentaire est un simple dipôle en "V inversé" assorti d'un plan métallique réflecteur au sol. L'aire effective d'une antenne élémentaire est environ le double de celle d'un dipôle court. Toutes les antennes et réseaux sont fixes (aucune partie mobile).

• Expliquer brièvement la différence entre interféromètre et réseau phasé et commenter la pertinence d'un interféromètre de réseaux phasés.

• Quelle est l'aire effective d'une antenne élémentaire ? son gain ? son champ de vue ?

Quels sont l'aire effective, le gain et le champ de vue d'un réseau phasé de 100 antennes élémentaires ?

- Quelle est la portion de ciel étudiable par l'interféromètre à un instant donné ?
- Peut-on faire une image n'importe où dans le champ de vue d'une antenne élémentaire ?
- Justifiez le choix des antennes élémentaires.
- Pourquoi a-t-on réparti les antennes de chaque réseau phasé dans un disque de 50 m de diamètre ? Serait-il intéressant de répartir le même nombre d'antennes dans un disque de 100 m de diamètre ? de 25 m de diamètre ? Pourquoi ?

On distribue uniformément les 50 réseaux phasés dans un disque de 100 km de diamètre, et on utilise l'interféromètre ainsi obtenu pour faire l'image d'une source constituée d'un disque d'émission diffus de $\sim 2'$ de diamètre sur lequel se superposent des sources discrètes de $\sim 15''$ de diamètre (émission diffuse et sources discrètes ayant des spectres s'étendant aux fréquences <30 MHz et >80 MHz).

- Quel est le nombre de bases disponibles avec cet interféromètre ? Quelle est leur taille minimale ? maximale ? à quoi ressemble la couverture du plan (u,v) avec cette configuration d'interféromètre ? que signifie cette couverture ? est-elle optimale ?
- Quelle est l'image obtenue de la source décrite ci-dessus à 30 MHz ? à 80 MHz ?
- Comment distribuer les réseaux phasés pour améliorer les performances de l'interféromètre ?

On voudrait ajouter quelques réseaux pour obtenir des bases jusqu'à 1000 km.

- A quelle limitation de la résolution angulaire maximale effective va-t-on se heurter ?
- Redémontrer l'expression de la base interférométrique maximum utile due à la scintillation interstellaire et interplanétaire ?
- Où suggérez vous de placer ces réseaux additionnels ?

Exercice 17 [Interférométrie Radio]

(Examen 2009)

On veut effectuer une image 1D de la Voie Lactée à 60 MHz (c'est à dire un profil d'intensité le long de sa plus grande dimension, intégré sur sa dimension la plus petite). Les dimensions angulaires des sources observées peuvent atteindre 5° vers les grandes échelles et $0.1''$ aux petites échelles (cette dernière information étant déduite d'observations à beaucoup plus haute fréquence). Pour cela, on dispose de 5 antennes pour constituer un interféromètre.

- Quelles sont les contraintes posées par la structure de la cible à observer sur le positionnement des antennes : bases minimale B_{\min} et maximale B_{\max} ? (on tiendra compte des limitations spécifiques aux observations radio basses fréquences, et on arrondira les valeurs de B_{\min} et B_{\max}).
 - Comment les antennes doivent-elle être distribuées en tenant compte de ces distances minimale et maximale ? Quel est l'avantage d'une disposition des antennes selon une progression géométrique de leur distance à l'antenne de référence, par rapport à une distribution uniforme ?
 - Si on opte pour une progression géométrique, combien de bases non-redondantes sont formées ? Donnez les coordonnées des antennes en fonction de B_{\min} et B_{\max} . Comment seront vues par l'instrument les échelles angulaires comprises entre $1'$ et $10'$?
 - Commentez la qualité de l'image attendue avec cet interféromètre. Quel est son principal inconvénient ? Quelles sont les possibilités pour l'améliorer ? (commentez les diverses options)
- Chacune des 5 antennes peut être formée soit d'une parabole orientable, soit d'un réseau phasé de dipôles (placés chacun horizontalement 2.5 m au-dessus d'un plan métallique réflecteur ayant pour effet de doubler son gain dans la direction du ciel).
- Quel est le nombre de dipôles formant une antenne de performances équivalentes à une parabole de 60 m de diamètre ? Calculez l'aire effective, le gain (linéaire et en dB) et la dimension du lobe principal (en sr et sa section en $^\circ$). Quels sont les avantages et inconvénients de chaque solution ? Comment la prise en compte de la dimension de chaque antenne modifie-t-elle la distribution des antennes de l'interféromètre ?
 - Question subsidiaire : d'où vient la différence de section angulaire du lobe calculée directement à l'aide du diamètre de l'antenne ou via la formule $A\Omega = \lambda^2$?

Exercice 18 [Spectroscopie de raie]

• Une radio source ayant une distribution spectrale continue est située derrière un nuage interstellaire étendu composé d'hydrogène neutre. On les observe avec un radiotélescope de surface efficace 500 m^2 . Quand la source est dans le lobe du télescope, la température d'antenne est 156.1 K , sauf à 21 cm où elle est de 215.5 K . Quand le télescope pointe vers le nuage à côté de la source, la température d'antenne à 21 cm est 213.2 K .

Si la température du système est 150 K et la température du fond de ciel 2.7 K , et sachant par ailleurs que la source a un diamètre angulaire de 0.1° , trouver:

- la température de brillance de la source et du nuage,
- la profondeur optique du nuage à 21 cm de longueur d'onde.

Exercice 19 [A_{eff} , lobe, T_A , T_B , rapport S/B, Maser]

(Examen 1999)

• On considère une antenne parabolique de 30 m de diamètre, ayant un rendement de 80% (20% de pertes ohmiques), connectée à un récepteur spectral multicanal. La bande passante de chaque canal est de 10 kHz . On travaille à la longueur d'onde de la vapeur d'eau ($\lambda = 1.35 \text{ cm}$). A cette longueur d'onde, la température du système antenne+récepteur est de 320 K .

a) Calculez l'aire efficace de l'antenne, son pouvoir séparateur et l'angle solide de son lobe à la longueur d'onde de travail.

• On observe l'émission d'une raie de H_2O dans un nuage interstellaire. Cette source a un diamètre de 1 UA et est située à 100 pc du Soleil. Sa température de brillance est $T_B = 10^{10} \text{ K}$.

b) Calculez la densité de flux provenant de la source (supposée non polarisée), et sa température d'antenne.

c) La raie d' H_2O couvrant plus d'un canal du récepteur, calculez pour un canal entièrement couvert le temps d'intégration nécessaire pour obtenir un rapport Signal/Bruit de 10 à la sortie du récepteur. Quel serait le temps d'intégration nécessaire si la même source se trouvait à 1 kpc ?

d) Comment expliquer une température de brillance aussi élevée ? Quel est le mécanisme d'émission en jeu ? (répondre succinctement).

e) En l'absence de source d'émission continue dans les parages, et en négligeant la contribution du fond du ciel à 2.7 K (justifiez-le), et en vous plaçant dans le cadre de l'approximation de Rayleigh-Jeans, écrivez l'équation reliant la température de brillance de la source T_B , l'épaisseur optique du nuage τ , et le rapport des populations N_a & N_b des niveaux concernés par la transition de H_2O . Quelle est la profondeur optique du nuage pour un rapport $N_a/N_b \approx 2$? Déduisez-en la température d'excitation. Commentez brièvement.

On veut étudier la faisabilité d'observations de type VLBI à très basse fréquence ($f \sim 22$ MHz) avec des bases de l'ordre de 1000 km.

- Quelle est la difficulté fondamentale à laquelle se heurtent de telles observations ?

Pour cela on va observer une radiosource test avec 2 antennes séparées d'environ 1000 km.

- Quelle condition l'extension angulaire de cette source doit-elle remplir ?

On choisit Jupiter, qui émet un rayonnement sporadique intense (densité de flux $S \sim 10^6$ Jy) aux fréquences $f \leq 40$ MHz. Les sources de ce rayonnement sont distribuées le long des lignes de champ magnétique Jovien sur une distance δr (km) $\sim \delta f$ (kHz), c'est-à-dire que la source d'une émission de bande passante 1 MHz s'étend sur ~ 1000 km.

- Est-ce une « bonne » source test ? (Justifiez votre réponse).

On observe Jupiter aux fréquences voisines de 22 MHz simultanément avec (i) le demi réseau décimétrique de Nançay (RDN) – un réseau phasé dense de 72 dipôles log-spiraux sensibles à la polarisation circulaire droite, et (ii) une station de test de LOFAR – un réseau phasé clairsemé de 32 dipôles polarisés linéairement selon la direction Est-Ouest. Chaque dipôle (du RDN ou de LOFAR) a une aire effective de $\lambda^2/3$ (avec λ la longueur d'onde). L'aire totale du RDN est limitée à 3500 m².

- D'où provient la limitation de l'aire effective du RDN ? Combien vaut-elle à 22 MHz ? Et pour LOFAR ? Quel est le gain équivalent pour chaque instrument ? Que signifie-t-il ?

L'observation simultanée ci-dessus est effectuée en échantillonnant à 80 MHz le signal du faisceau phasé en direction de Jupiter. Au RDN, ce phasage est effectué de manière analogique, alors que pour LOFAR, il est effectué en numérique après échantillonnage du signal reçu par chaque antenne.

- Expliquez brièvement comment on procède en pratique pour phaser chaque instrument. Quels sont les avantages et les inconvénients de chaque méthode ?

On applique avant échantillonnage un filtrage passe-bande 10-40 MHz.

- Justifiez le choix de cette bande. Quelle serait la conséquence de l'utilisation d'une bande 0-40 MHz ? et de 10-60 MHz ? Est-il nécessaire d'employer une électronique à très bas bruit ?

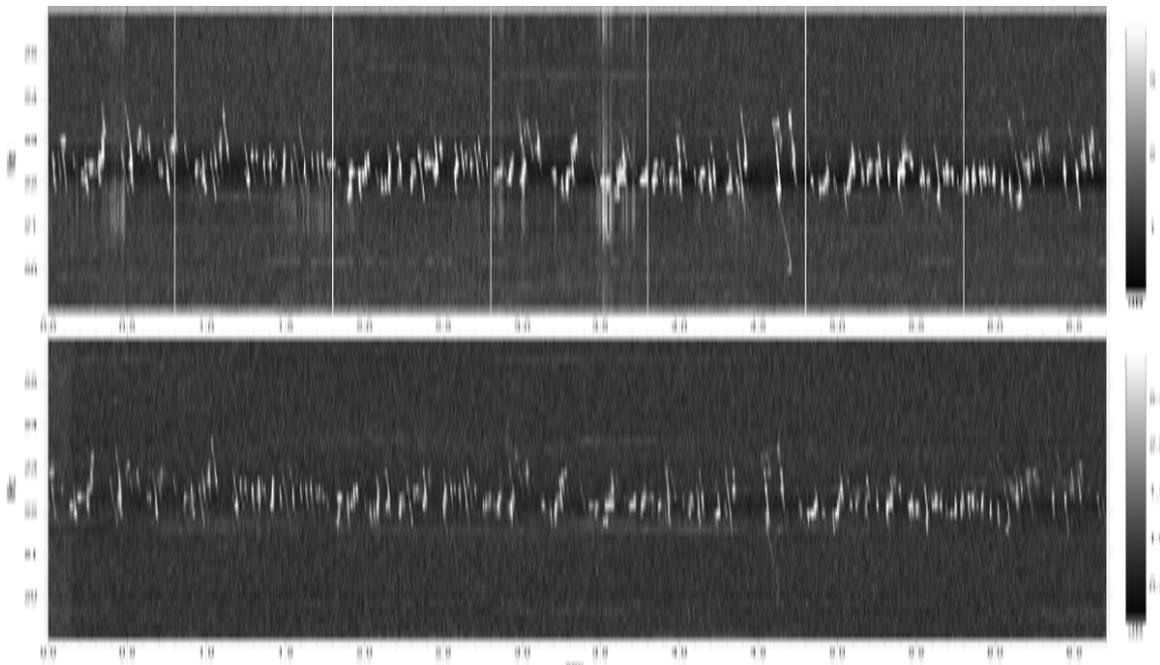


Figure 1 : Spectres dynamiques de l'émission décimétrique de Jupiter dans la bande 19-26 MHz, enregistrés au RDN (en haut) et avec LOFAR (en bas) durant ~ 6.6 sec. La densité de flux reçue est représentée en clair sur fond sombre (échelles de droite). Les barres verticales au RDN sont des marqueurs de temps contrôlés par GPS.

La figure 1 montre 2 exemples de spectres dynamiques de sursauts brefs de Jupiter obtenus (quasi-)simultanément au RDN et avec LOFAR, par FFT glissante appliquée sur la forme d'onde enregistrée.

On voit des franges horizontales (bandes alternativement sombres et brillantes), de période ~ 150 kHz, uniquement sur le spectre dynamique du bas (LOFAR).

• Expliquez pourquoi. Qu'en déduisez vous sur l'émission décimétrique de Jupiter ?

On supposera dorénavant que l'émission de Jupiter en question est polarisée linéairement. On va tenter d'obtenir des franges d'interférence entre les 2 signaux (RDN et LOFAR). Pour ce faire, on va filtrer chaque signal (en forme d'onde) dans la même bande utile, et calculer le coefficient de corrélation croisée de ces 2 signaux filtrés.

• En quoi la valeur de ce coefficient de corrélation informe-t-elle sur la faisabilité d'observations de type VLBI aux fréquences étudiées ? Comment choisir au mieux la bande utile de filtrage de chaque signal ? Proposez brièvement et qualitativement une méthode permettant d'obtenir les formes d'ondes filtrées.

• Quelle est la précision nécessaire pour les horloges utilisées sur chaque site (on fera une hypothèse raisonnable sur la durée d'observation requise en s'inspirant de la figure 1) ? Comparez cette précision à la précision relative de 10^{-8} pouvant être obtenue à partir du « temps GPS ». Qu'en concluez vous ?

• Comment effectuer la corrélation croisée entre les 2 signaux pour éviter les pertes dues à la cohérence temporelle du signal (à très courte échelle, les sursauts radio de Jupiter sont des successions de paquets d'ondes durant chacun de l'ordre de 50 microsecondes) et à la connaissance imparfaite de la base RDN-LOFAR ? Peut-on se contenter de corriger du décalage géométrique calculé ?

Quelle que soit la méthode employée et l'échantillon de données choisis (bande passante, intervalle de temps), on n'obtient jamais de coefficient de corrélation ≥ 0.71

• Expliquez pourquoi, de préférence en vous appuyant sur une brève démonstration quantitative.

On assimile l'ionosphère terrestre à une couche de 200 km d'épaisseur et de densité électronique moyenne $N_e = 5 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}$, affectée de fluctuations aléatoires d'amplitude relative $(1/N_e) \times \delta N_e / \delta t \sim 10\%$ par minute. Ces fluctuations sont décorréliées à ~ 1000 km de distance.

• Quel est l'indice de réfraction moyen de l'ionosphère à $f = 22$ MHz ? Durant combien de temps la phase relative des 2 signaux permet-elle d'obtenir des franges ?

• Quel est le rapport signal / bruit d'observations de Jupiter à 22 MHz avec une station de test de LOFAR, avec une bande passante $b = 1$ kHz et un temps d'intégration $\tau = 1$ msec ? Qu'en déduisez vous sur les possibilités d'imagerie rapide de l'environnement de Jupiter ?

On pense que la source des sursauts radio de Jupiter de la figure 1 se déplace à $\sim c/10$ le long des lignes de champ magnétique Jovien.

• Sera-t-il possible d'imager le mouvement de cette source pendant le temps calculé à la question 12 ? Comment procéder autrement ?

Exercice 21 [Gain, Résolution, rapport S/B]

(Examen 2001)

• On suppose qu'à grande échelle, l'Univers est uniformément rempli de radiosources "canoniques", identiques, ayant une densité de flux (ou une brillance) proportionnelle à $\lambda^{2/3}$, où λ est la longueur d'onde. On considère un radiotélescope ayant les caractéristiques suivantes:

- aire effective = A

- bande passante (de réception) $\Delta\lambda$ proportionnelle à λ

- température de système = $T_{\text{sys}} = \text{constante}$

a) Montrer que le nombre de sources angulairement résolubles par le télescope est au mieux proportionnel à A/λ^2 .

b) Montrer que le nombre de sources détectables par ce télescope, avec un rapport signal/bruit supérieur ou égal à 1, est proportionnel à $A^{3/2} \lambda^{1/4}$.

c) Montrer que, pour une aire effective donnée, il existe une longueur d'onde optimale à laquelle on peut à la fois détecter et résoudre le plus grand nombre de sources. Pourquoi n'est-il pas intéressant, en général, de chercher à diminuer le bruit du système de réception pour des longueurs d'ondes supérieures à cette valeur optimale ?

L'expérience radio embarquée sur la sonde Voyager 1 a permis de découvrir les émissions radio des éclairs d'orages atmosphériques de Saturne (en 1980). Le récepteur balaye la bande 0-40 MHz par pas de 200 kHz (200 pas). La largeur de bande instantanée du canal mesuré est 200 kHz, et le temps d'intégration 25 msec. On supposera que l'antenne utilisée est assimilable à un dipôle court devant les longueurs d'ondes reçues ($L \ll \lambda$). Les éclairs d'orages de Saturne apparaissent en radio comme des impulsions brèves (durée caractéristique = 60 msec) et large bande: quand Voyager était du côté "jour" de la planète, les impulsions étaient détectées de 6 MHz à 40 MHz, et quand Voyager était du côté "nuit" de la planète, de 100 kHz à 40 MHz.

1) Comment expliquez-vous cette différence de gamme spectrale observée entre "jour" et "nuit" ? Qu'en déduisez vous ?

- La puissance spectrale moyenne mesurée pour ces impulsions est 100 W/Hz, et leur diagramme d'émission est isotrope. Ces impulsions ont été détectées jusqu'à une distance de 150 R_S (1 R_S = 1 Rayon Saturnien = 60000 km) de Saturne.

2) Quel était le flux minimum détectable par l'expérience radio de Voyager (que l'on considèrera comme indépendant de la fréquence) ? Quelle était la température de système à 10 MHz ? à 40 MHz ? Comment se compare-t-elle à la température du ciel (fond galactique), que l'on peut écrire (au dessus de ~3 MHz) $T_C(K) = 1.2 \times 10^8 / f^{2.5}$ avec f en MHz (au-dessous de 3 MHz, T_C re-décroît).

- Cette température de système très élevée provenait d'un intense bruit parasite dû à l'électronique de la sonde Voyager elle-même. La sonde Cassini a été réalisée avec une plus grande attention portée à l'électronique de bord. En conséquence, la température de système de son expérience radio n'est que de $4 \times 10^6 / f^2$ K avec f en MHz. L'antenne utilisée est encore supposée être un dipôle court.

3) Détecte-t-on l'émission radio du fond galactique avec Cassini ? Quel va alors être le facteur limitant la sensibilité de Cassini pour ré-observer les éclairs d'orages de Saturne ? Sachant que la largeur de bande instantanée sur Cassini est de 25 kHz, et le temps d'intégration 20 msec, calculez la température de bruit et le flux minimum détectable (à 10 MHz). Si la puissance spectrale typique des éclairs d'orages n'a pas changé depuis l'époque de Voyager, depuis quelle distance maximale pourra-t-on les détecter ?

- Depuis la Terre, on veut tenter d'étudier les éclairs d'orages de Saturne avec le futur radiotélescope LOFAR. Il s'agit d'un interféromètre qui effectue la corrélation d'une antenne principale (en fait un réseau phasé d'aire effective $7 \times 10^7 / f^2$ m² avec f en MHz) avec chacune des antennes secondaires (réseaux phasés d'aire effective $2.8 \times 10^6 / f^2$ m²). Dans un premier temps on utilise l'antenne principale seule. La température de système ne dépassera pas quelques milliers de K.

4) Quelle est la densité de flux radio des éclairs d'orages de Saturne observés depuis la Terre (distance Terre-Saturne ~10 UA, avec 1 UA = 1.5×10^{11} m) ? Dans l'état actuel des connaissances, quelle est la fréquence optimale d'observation ?

- LOFAR peut observer avec un temps d'intégration quelconque ≥ 1 msec, et une bande passante instantanée au choix entre 1 kHz et 4 MHz.

5) Quels paramètres d'observation choisir (justifiez) ? Avec quel rapport signal/bruit permettront-ils de détecter les éclairs d'orages de Saturne ? Pourra-t-on tirer parti de la vitesse maximum de 1 msec pour résoudre temporellement les éclairs ?

- On utilise maintenant les couples (antenne principale - antenne secondaire) pour faire de l'imagerie. La distance maximale entre les 2 antennes d'un tel couple est 400 km.

6) Quelle est l'aire effective d'un tel couple d'antennes ? Donne-t-il encore une sensibilité suffisante pour détecter les éclairs ? Quelle est la résolution angulaire maximale atteinte à 40 MHz ? Comparez la à la taille de Saturne dans le ciel (~20") et commentez. Pourquoi peut-on difficilement augmenter beaucoup la dimension des bases au-delà de 400 km ?

Exercice 23 [Polarisation, T_A , T_B , rapport S/B, Résolution, Récepteur, Propagation] (*Examen 2003*)

• Jupiter émet un rayonnement radio sur ondes décamétriques, dû à l'émission à la fréquence cyclotron locale d'électrons se déplaçant le long des lignes de champ magnétique de la planète. Le spectre moyen de ce rayonnement est quasi-constant, des très basses fréquences ($\ll 1$ MHz) jusqu'à 40 MHz. La densité de flux moyenne mesurée à une distance de 1 UA est $2 \times 10^{-19} \text{ Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$. Ce rayonnement est 100% polarisé elliptiquement.

1) Que veut-on dire par "100% polarisé elliptiquement" ? (répondre succinctement).

2) Estimer une limite inférieure à la température de brillance de la source à 10 et 30 MHz si la taille maximum de cette source est le disque de Jupiter. Idem si le diamètre de la source est 1000 km. Qu'en déduisez vous sur le mécanisme de production de ce rayonnement ?

3) Dans le 2^{ème} cas (source de diamètre 1000 km), quelle est la dimension minimale du radiotélescope nécessaire pour résoudre la radiosource ? Quelle est la seule technique d'observation utilisable à cet effet ? Quelles difficultés rencontre sa mise en œuvre aux longueurs d'onde décamétriques ? (répondre succinctement).

4) La température du fond du ciel (radio basses fréquences), supposée uniforme, est donnée par la formule:

$$T_{\text{ciel}}(\text{K}) = 10^8 \times f^{-2.5} \quad \text{avec } f \text{ en MHz.}$$

La température du système de réception est 300 K.

Donner l'expression de la température de bruit et du flux minimum détectable (non polarisé) en fonction de la fréquence (f), de l'aire effective du télescope utilisé (A_e), de la bande passante d'observation (b), et du temps d'intégration des mesures (τ).

5) A quelle distance maximale d_{max} (en parsecs) l'émission radio de Jupiter (supposée non polarisée) est elle détectable avec un rapport signal/bruit de N ? A quelle fréquence vaut-il mieux travailler ? Application numérique à cette fréquence avec $N = 5$, $b = 1$ MHz, $\tau = 1$ minute, et $A_e = 10^4 \text{ m}^2$ (Réseau décamétrique de Nançay), 10^4 m^2 (Réseau décamétrique de Kharkov), 10^6 m^2 (Réseau LOFAR en projet). Comment sont modifiés les résultats si le réseau est polarisé de manière identique à l'émission de Jupiter ? Commentez (brièvement) ces résultats.

6) Observée à haute résolution temporelle ($\tau < 1$ sec), l'émission de Jupiter se résout en sursauts brefs, dont l'intensité instantanée augmente en $\sim 1/\tau$ (on considère que l'intensité reste constante et égale à la valeur moyenne ci-dessus pour $\tau \geq 1$ sec). Augmente-t-on le pouvoir de détection en observant plus vite ? Application numérique pour $\tau = 1$ msec. Quel type de récepteur recommandez vous et pour quelles raisons ? Quel est l'avantage d'observer avec un temps d'intégration faible du point de vue de la stabilité du récepteur ?

7) Dans le milieu interstellaire proche (15-20 pc), on peut considérer qu'une mesure de dispersion typique est $[\text{DM}] \sim 0.5 \text{ pc.cm}^{-3}$. Quel sera l'effet de la dispersion sur les observations des sursauts ci-dessus ? Quelle est en conséquence la bande passante d'observation optimale pour $\tau = 1$ msec ?

8) L'effet de l'élargissement temporel peut-il être négligé ("temporal broadening" τ_d , variant en $f^{-4.4}$ avec $\tau_d \sim 1$ sec à 10 MHz) ?

Exercice 24 [Rapport S/B, polarisation]

(Examen 2009)

On veut observer sur ondes métriques un pulsar dont les caractéristiques sont les suivantes :

- densité de flux S (au niveau de la Terre) durant l'impulsion (0 en dehors de l'impulsion), supposée indépendante de la fréquence
- période P , durée de l'impulsion δP ($\ll P$)
- mesure de dispersion [DM]

Le radiotélescope utilisé a une aire effective A et les mesures sont effectuées à la fréquence f avec une bande passante δf et un temps d'intégration δt . La température du système est $T_S = 150$ K, et celle du fond du ciel est $T_F = 1.15 \times 10^8 / f^{2.5}$ K avec f en MHz.

1) Quelle est limite sur δt si on veut pouvoir observer la nature pulsante de la source ?

On posera par la suite $\delta t = C \times P$.

2) Quelle est limite sur δf si on veut pouvoir observer la nature pulsante de la source ?

3) Quelle est la condition de détection du pulsar pour $\delta t \leq \delta P$? pour $\delta t > \delta P$? On l'écrira sous une forme générale. Justifiez la présence ou l'absence d'un facteur « 2 » dans cette expression.

4) En déduire qu'il existe une fréquence minimum f_{\min} (dépendant de S , P , [DM] ...) au-dessous de laquelle cette observation est impossible. On pourra simplifier le calcul par une hypothèse adéquate sur T_F et T_S , que l'on justifiera a posteriori.

A.N. : calculer f_{\min} pour $S = 1$ Jy, $P = 0.25$ s, $\delta P/P = 0.1$, $C = 0.1$, [DM] = 100 pc.cm⁻³, $A = 10^4$ m², et une détection à 3σ .

5) Calculer avec les mêmes valeurs, mais pour $f = 200$ MHz, la bande passante maximale δf . Calculer l'étalement de l'impulsion due à la dispersion pour $f = 200$ MHz et $\delta f = 2$ MHz.

6) Comment varie f_{\min} pour un pulsar identique mais 2 fois plus éloigné ?

7) Comment varie f_{\min} si $\delta P < \delta t$? A.N. avec $\delta P/P = 1\%$ et $C = 0.5$. Quelle est la valeur optimale de C pour δP donnée ?

8) L'impulsion est polarisée linéairement. Qu'observe-t-on avec une antenne linéaire à $f = 200$ MHz avec une bande passante $\delta f = 2$ MHz ? (on prendra $B_{\parallel} = 2$ μG). Comment optimiser δf ?