

# Chapitre 0

## Introduction à la modélisation des milieux continus

### 0.1 Fluides classiques et système de Navier-Stokes

#### 0.1.1 Introduction

##### Remarque préliminaire sur les notations utilisées

Les opérateurs vectoriels de divergence, rotationnel et gradient seront exprimés ici en utilisant l'opérateur nabla défini par  $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ , i.e.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{U} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \\ \operatorname{rot} \vec{U} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{U} \\ \operatorname{grad} f &= \vec{\nabla} f\end{aligned}$$

$\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker (=0 pour  $i \neq j$  et 1 si  $i = j$ ). La convention de sommation sur les indices répétés **n'est pas utilisée ici**.

$d/dt$  désigne la dérivée particulaire : lorsqu'une fonction  $f$  est exprimée en fonction des coordonnées d'une particule en mouvement  $\vec{x}(t)$ , de vitesse  $d\vec{x}/dt$ , on appelle dérivée particulaire de  $f(\vec{x}, t)$ , sa dérivée totale en  $t$ , i.e. incluant le mouvement de la particule, ainsi :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} f \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$$

##### Origine mécanique

Les équations générales qui régissent le mouvement d'un fluide homogène visqueux sont, dans  $\Omega$  (domaine de l'espace  $\mathbb{R}^3$  occupé par le fluide) :

$$\text{conservation de la masse} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (1)$$

$$\text{conservation de la quantité de mouvement} \quad \rho \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (2)$$

$$\text{loi de comportement} \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(u)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(u) \quad (3)$$

où  $\vec{U}(\vec{x}, t)$  est le vecteur vitesse de composantes  $(u_1, u_2, u_3)$  dans le repère considéré.  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  est le vecteur position (coordonnées d'Euler) de la particule considérée à l'instant  $t$ .

$\rho(\vec{x}, t)$  est la **masse volumique** ( $\rho > 0$ ).

$\vec{f}(\vec{x}, t) = (f_1, f_2, f_3)$  est la densité volumique des forces extérieures agissant sur le fluide (généralement les forces de pesanteur)

$p(\vec{x}, t)$  est la **pression** du fluide ( $p \geq 0$ ).

$\sigma_{ij}(\vec{x}, t)$  sont les composantes du **tenseur symétrique des contraintes**.

$\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  sont les composantes du **tenseur des vitesses de déformation**.

$\lambda$  et  $\mu$  sont des **coefficients de viscosité**.

Les lois de conservation sont générales pour l'ensemble des milieux «continus», c'est-à-dire ceux que l'on peut raisonnablement considérer d'un point de vue macroscopique. Les lois de comportement<sup>1</sup> et les lois d'états (de nature thermodynamique) que nous ajouterons ensuite (milieu incompressible, barotrope, stratifié etc. . .) sont au contraire spécifique du milieu considéré.

### Conditions aux limites

Les équations ci-dessus ne fournissent qu'une description locale (ou différentielle) d'un milieu «sans bord» et doivent, pour pouvoir à la fois être intégrées (en espace et/ou en temps) et être applicables à des cas réels, être accompagnées de **conditions aux limites**. Ces conditions aux limites, découlant respectivement des lois de conservation de la masse et la quantité de mouvement s'écrivent

$$\vec{U} = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (4)$$

si  $\Gamma = \partial\Omega$  (frontière du volume  $\Omega$ ) est une paroi fixe (sinon c'est la vitesse relative qui est nulle)

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = F_i \text{ sur } \Gamma \quad (5)$$

$\vec{n}$  étant le vecteur unitaire de la normale extérieure à  $\Omega$  et  $\vec{F}$  la densité surfacique d'efforts appliqués au point considéré par la paroi  $\Gamma$  sur le fluide<sup>2</sup>.

### Problème mathématique/numérique associé

Le problème mathématique/numérique correspondant aux équations posées précédemment va donc consister à intégrer un système d'équations aux dérivées partielles dont les **données** sont (au minimum) :

-la forme du volume  $\Omega$  (par exemple le contenant du fluide ou l'espace  $\mathbb{R}^3$  moins l'obstacle en aérodynamique, etc. . .)

-les forces extérieures  $\vec{f}$ , souvent négligées

-les coefficients de viscosité  $\lambda$  et  $\mu$

et les **inconnues** sont :

<sup>1</sup>On peut imaginer (et il existe) des lois de comportement plus complexes que l'éq.(3) pour un fluide : disons simplement que pour décrire les fluides dits «classiques» ou «newtoniens» considérés ici, les contraintes sont supposées dépendre linéairement des déformations, ce qui conduit à des lois de comportement de type (3). Dans tous les autres cas, le fluide sera dit «non newtonien».

<sup>2</sup>Des conditions supplémentaires de continuité sont généralement nécessaires, notamment pour décrire des systèmes comportant plusieurs fluides, à la traversée d'une surface de contact (séparation entre deux fluides non miscibles et en particulier, surface libre en contact avec l'atmosphère). Ces conditions sont relativement simples à énoncer ( par exemple égalité des vitesses et des pressions de part et d'autre de la surface de contact), mais il faut savoir que le problème d'écoulement fluide est alors très sérieusement compliqué par le fait que la surface de contact est une inconnue supplémentaire du problème, ce qui nécessite des traitements analytiques et/ou numériques au cas par cas. C'est pourquoi nous n'aborderons pas ici ce type de problèmes et nous nous limiterons au cas où le volume  $\Omega$  est limité par une paroi solide ou au cas complémentaire (fluide infini baignant un objet solide), ou un mélange des deux

- principalement la vitesse  $\vec{U}$ ,
- secondairement la masse volumique  $\rho$  et la pression  $p$ .

En réalité, le problème mathématique comme sa résolution numérique (ou éventuellement analytique) seront très différents selon les particularités des fluides considérés (loi de comportement et d'état) mais aussi selon les simplifications/approximations que nous pouvons effectuer (c'est-à-dire que nous pouvons justifier). C'est pourquoi nous allons passer en revue quelques cas (il y en a bien d'autres que ceux présentés ici) et décrire plus précisément pour chacun de ces cas le problème numérique à résoudre.

### 0.1.2 Cas d'un fluide incompressible : Les équations de Navier-Stokes

La loi d'état d'un milieu incompressible s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (6)$$

Cette incompressibilité et l'homogénéité (i.e.  $\rho$  est invariant par rapport à l'espace) du fluide font que la conservation de la masse signifie simplement  $\rho = \rho_0 = \text{constante}$  et que le tenseur des contraintes est réduit à :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(u) \quad (7)$$

d'où la nouvelle forme de (2) :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i + \mu \Delta u_i \quad (8)$$

ou son expression vectorielle<sup>3</sup> :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} + \vec{\nabla} p / \rho_0 = \vec{f} / \rho_0 + \nu \Delta \vec{U} \quad (9)$$

où  $\nu = \mu / \rho_0$  est la **viscosité cinématique** du fluide.

Le système d'équations non-linéaire {(6),(9)} est connu sous le nom de **Navier-Stokes** ; il comporte quatre équations aux dérivées partielles (dont trois du second ordre) pour la détermination de quatre inconnues :  $u_1, u_2, u_3$  et  $p$ , des données initiales sur  $\vec{U}$  et  $p$  et les conditions aux limites de type (4),(5), plus éventuellement des conditions de continuité si la frontière  $\Gamma$  comporte une surface libre (voir note 2).

### 0.1.3 Cas d'un fluide parfait : équations d'Euler

Le fluide est dit parfait lorsque les effets de viscosité peuvent être négligés : la loi de comportement (3) est alors réduite à

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (10)$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right) + \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad (11)$$

et sont appelées «**équations d'Euler**».

<sup>3</sup>le terme non-linéaire dans (9) s'écrit aussi :  $(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = \vec{\nabla} U^2 / 2 - \vec{U} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{U}$

**Cas incompressible, homogène**

Dans ce cas, il faut ajouter comme précédemment :

$$\rho = \rho_0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (12)$$

Les cinq relations (11) et (12) permettent avec des conditions aux limites adéquates, la détermination des inconnues  $u_i$  et celle de la pression à une constante près.

**Fluide compressible barotrope**

Si le fluide est compressible, (12) est remplacé par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (13)$$

il faut donc une information supplémentaire : par exemple le fluide peut être **barotrope**, c'est-à-dire qu'il existe une loi d'état  $p = g(\rho)$  de nature thermodynamique reliant la pression à la densité du milieu. Ce type de loi englobe en particulier les deux cas classiques :

-  $p = \text{Cte} \times \rho$  d'un gaz parfait à chaleur spécifique constante en évolution isotherme.

-  $p = \text{Cte} \times \rho^\gamma$  d'un gaz parfait à chaleur spécifique constante en évolution adiabatique.

Les conditions aux limites (4),(5) sont dans ce cas surabondantes ; il faut tenir compte ici du fait que l'ordre des dérivées des équations du mouvement est passé de deux à un avec la disparition du Laplacien de  $\vec{U}$ . On se contentera de la condition (condition de glissement sur une paroi fixe  $\Gamma$  limitant le volume  $\Omega$ ) :

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = 0 \quad (14)$$

**0.1.4 Linéarisation des équations de Navier-Stokes****approximation de Stokes**

Une version linéaire des équations de Navier-Stokes apparaît assez naturellement lorsque le mouvement est suffisamment lent pour que  $u_i$  et  $\partial u_i / \partial u_j$  soient considérés comme petits ; on est alors conduit à la simplification suivante du système de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{U} &= \vec{f} / \rho_0 - \vec{\nabla} p / \rho_0 \\ \vec{U} &= 0 \text{ sur } \Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

Ce système constitue l'approximation de Stokes<sup>4</sup> et s'utilise surtout pour modéliser des écoulements lents et stationnaires ( $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0$ ), comme par exemple l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible qui sera traité section 0.1.5.

**Linéarisation des équations d'Euler**

Dans le cas d'un fluide parfait compressible, et sous les mêmes conditions que précédemment (mouvement «lent»), nous allons voir par un exemple traité dans la section 0.1.5 qu'on peut aboutir à formuler le problème d'écoulement fluide sous la forme d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles.

<sup>4</sup>ce système nécessite a priori aussi une condition initiale sur l'état du système à un temps  $t_0$ , mais comme il est surtout utilisé dans le cas stationnaire, nous l'avons omise ici

Cependant, à la différence de l'approximation de Stokes -qui consiste à négliger le terme non-linéaire dans les équations de Navier-Stokes, il s'agit ici de «linéariser» cet opérateur, et cela s'effectue au cas par cas, selon la nature du problème considéré (en particulier loi d'état du fluide et géométrie du domaine  $\Omega$  et de sa frontière) et des conditions aux limites. Ces systèmes linéarisés sont utiles par exemple pour étudier l'écoulement de l'air autour du fuselage et des voilures dans les allures à faible vitesse par rapport à celle du son, des circulations de fluides dans les corps poreux ou encore pour «approcher» les modèles comportant des équations de transport ou de diffusion (dans le cas de la magnétohydrodynamique par exemple).

Notons, pour conclure sur ce «survol» des équations qui régissent la mécanique des fluides<sup>5</sup>, qu'on est amené à utiliser l'une ou l'autre des approches qui précèdent en fonction des besoins de précision du calcul et de la puissance de calcul/mémoire dont on dispose ; par exemple pour les calculs de l'industrie aéronautique en «soufflerie numérique», on réalise un compromis entre le degré d'approximation retenu pour l'équation du fluide «air» et le niveau de complication avec lequel on représente la géométrie de l'avion ; on utilisera ainsi :

- l'équation de Navier-Stokes pour traiter l'écoulement autour d'un profil d'aile
- l'équation d'Euler pour un sous-ensemble de l'avion
- l'équation linéarisée pour traiter l'avion entier.

### 0.1.5 Cas des écoulements stationnaires exemples de problèmes linéaires

Un écoulement est dit stationnaire ou permanent si la vitesse ne dépend pas explicitement<sup>6</sup> du temps, i.e.  $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0$ .

Dans un écoulement stationnaire, le problème de Navier-Stokes est réduit à :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} &= 0 \\ (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla}p/\rho_0 &= \vec{f}/\rho_0 + \nu\Delta\vec{U} \\ \vec{U} &= 0 \text{ sur } \Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

Tandis que le mouvement stationnaire d'un fluide parfait barotrope s'écrit (équations d'Euler indépendantes du temps) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{U}) &= 0 \\ (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p &= \frac{\vec{f}}{\rho} \\ p &= g(\rho) \\ \vec{U} \cdot \vec{n} &= 0 \text{ sur } \Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

Nous allons donner trois exemples où l'une ou l'autre des équations précédentes conduisent à des systèmes **linéaires** d'équations aux dérivées partielles (agrémenté parfois d'un système d'équations non-différentiel mais non-linéaire à résoudre).

<sup>5</sup>Ce survol des grandes équations de la mécanique des fluides classique est empruntée pour l'essentiel au premier chapitre de *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, de R. Dautray et J-I Lions, Ed. Masson, Paris, 1987, qui constitue une véritable encyclopédie de l'analyse mathématiques des grandes équations posées en Physique, mais est d'un niveau mathématique très élevé et à ce titre peu utilisable comme simple «boîte à outil» pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes par exemple. On trouvera par contre une description assez complète et très pragmatique des méthodes numériques utilisées spécifiquement en mécanique des fluides dans *Computational methods for fluid flow*, de R. Peyret et T.D. Taylor, Springer-Verlag, New-York, 1990

<sup>6</sup>Attention, le vecteur accélération des particules n'est pas nul, on a en effet :  $\frac{du_i}{dt} = \vec{U} \cdot \vec{\nabla}u_i$

### Écoulement stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible

On considère l'écoulement engendré par un obstacle solide indéformable au sein d'un fluide parfait incompressible, et on suppose le champ de vitesse irrotationnel (ou si l'on préfère on ne s'intéresse qu'à la partie irrotationnel de l'écoulement). Dans ce cas, il existe un potentiel  $\Phi$  tel que  $\vec{U} = \vec{\nabla}\Phi$ ;  $\Phi$  ne dépendant que de la position  $\vec{x}$  dans le cas stationnaire. Toujours dans ce cas  $\Omega$  (= extérieur de l'obstacle) est non borné et  $\Gamma$  est la paroi de l'obstacle.

L'incompressibilité d'une part et les conditions aux limites de (18) d'autre part se traduisent alors par :

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 \\ \Delta\Phi &= 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma\end{aligned}\tag{18}$$

qui contient une équation du type de l'équation de Poisson (c'est-à-dire du type formel  $\Delta u = f$  ou 0), et l'équation d'Euler conduit à :

$$\vec{\nabla} \left( \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} \right) = \vec{f}\tag{19}$$

de telle sorte que, si les forces extérieures (souvent le poids du fluide) dérivent d'un potentiel  $\Upsilon$ , on a la relation

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} - \Upsilon = \text{constante}\tag{20}$$

Les relations (19) et (20) doivent permettre la détermination de  $\vec{U}$  puis de  $p$ , dans la mesure où  $p$  est connu en un point ou à l'infini.

### Écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite cylindrique

C'est un problème classique à une dimension. Des pressions  $p_1$  et  $p_2$  constantes sont imposées respectivement aux deux extrémités de la conduite de grande longueur  $L$  et l'on suppose que les forces volumiques extérieures (poids du liquide) sont négligeables par rapport au gradient de pression (i.e.  $\vec{f} = 0$ ). On modélise la conduite par un cylindre infini et l'on remplace alors les données effectives  $p_1, p_2$  et  $L$  par celle de la chute linéique de pression  $R > 0$  définie par  $-R = (p_2 - p_1)/L$ .

On cherche alors une vitesse  $u_1$  (dans la direction du tuyau, les autres composantes étant nulles) solution du problème de Navier-Stokes 17 qui se réduit alors à :  $\partial p / \partial x_1 = \mu \Delta u_1$ , les autres dérivées partielles de  $p$  étant nulles.  $p$  ne dépend donc que de  $x_1$ , cependant que  $u_1$  ne dépend que de  $x_2$  et  $x_3$  (identiquement), on a donc  $\frac{\partial p}{\partial x_1} = 2\mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(u_1) = \text{constante} = -R$ .

Finalement, compte-tenu de la condition d'adhérence de (17), le problème se réduit à chercher la vitesse d'écoulement  $u$  en fonction de la distance  $r$  au centre de la conduite en résolvant l'équation différentielle ordinaire :

$$2 \frac{d^2 u}{dr^2} = -\frac{R}{\mu}\tag{21}$$

avec la condition  $u(\pm a) = 0$ , où  $a$  est le rayon de la conduite, et dont la solution parabolique ne fait aucun mystère si  $R > 0$ . En fait, la viscosité du fluide exerçant une action de freinage sur les particules, il n'est pas étonnant qu'il faille imposer une chute de pression dans la conduite pour qu'il existe une solution stationnaire. Notons par contre que si l'on veut traiter du même problème à pression constante, la vitesse d'écoulement devra dépendre du temps et conduira, avec des raisonnements analogues au cas stationnaire mais en utilisant les équations de Navier-Stokes (9), à des **équations de diffusion visqueuse** du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = 0\tag{22}$$

u désigne toujours une vitesse scalaire dans la direction de l'axe de la conduite, et ne dépend comme précédemment que de  $x_2$  et  $x_3$ . Mais ce problème nécessite, même dans sa version la plus simple esquissée ici, un traitement mathématique et numérique relativement compliqué.

### Écoulement plan stationnaire d'un gaz parfait barotrope

Nous nous intéressons ici à la perturbation (supposée petite) d'un écoulement uniforme par un obstacle cylindrique, de longueur supposée infinie, dont l'axe est perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Le fluide est supposé parfait et compressible barotrope. On choisit la section droite de l'obstacle comme plan  $Ox_1x_2$ .

Soit donc  $\vec{U}_\infty$  la vitesse uniforme de l'écoulement avant perturbation ( $Ox_1$  est choisi parallèle à  $\vec{U}_\infty$  et  $U_\infty$  est le module de cette vitesse). On note  $\rho_\infty, p_\infty$  et  $C_\infty$  les masse volumique, pression et vitesse du son du fluide initial. La quantité  $M = U_\infty/C_\infty$  est appelé le **nombre de Mach de l'écoulement** non perturbé.

On définit la perturbation à l'aide d'un paramètre «infiniment petit» noté  $\epsilon$  dont la signification physique (à préciser dans chaque cas à traiter) est liée ici au fait que  $U_\infty$  est grand et l'obstacle est petit par rapport au domaine «sans limite» dans lequel il est plongé. Les grandeurs caractérisant l'écoulement perturbé sont alors :  $U_\infty + \epsilon u_1, \epsilon u_2, p_\infty + \epsilon p, \rho_\infty + \epsilon \rho$ .

La linéarisation du système d'Euler stationnaire (18), conduit alors au système :

$$U_\infty \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \rho_\infty \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (23)$$

$$U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad (24)$$

$$U_\infty \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad (25)$$

à résoudre sur  $\Omega$  qui est alors le complémentaire dans  $\mathbb{R}^2$  de la section droite de l'obstacle. Mais  $p = g(\rho)$ , loi d'état du fluide barotrope considéré, implique :  $p_\infty + \epsilon p = g(\rho_\infty + \epsilon \rho)$  et donc au premier ordre :

$$p = \left( \frac{dg}{d\rho} \right)_\infty = C_\infty^2 \rho \quad (26)$$

Les conditions naturelles à l'infini sont :

$U_\infty + \epsilon u_1 = U_\infty; \epsilon u_2 = 0; p_\infty + \epsilon p = p_\infty; \rho_\infty + \epsilon \rho = \rho_\infty$ . Ce qui implique :  $u_1|_\infty = 0; u_2|_\infty = 0; p|_\infty = 0; \rho|_\infty = 0$ . Compte-tenu de (24), on a donc :

$$p = -\rho_\infty U_\infty u_1 \quad (27)$$

De (25) on déduit alors :  $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = 0$  et donc la possibilité d'introduire un potentiel  $\phi(x_1, x_2)$  tel que  $u = \vec{\nabla} \phi$ ; on considère plus précisément :  $\phi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} u(\xi, x_2) d\xi$ . Alors (23) implique que  $\phi$  satisfasse :

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (28)$$

équation elliptique, parabolique ou hyperbolique suivant que la vitesse à l'infini (i.e. le mouvement de l'obstacle) est subsonique ( $U_\infty < C_\infty$ ), transsonique ( $U_\infty = C_\infty$ ) ou supersonique ( $U_\infty > C_\infty$ ).

La condition aux limites naturelle sur l'obstacle, puisque le fluide est parfait, est une **condition de glissement** de type (14) sur la frontière  $\Gamma$  de l'obstacle. Cette condition doit être aussi linéarisée et s'explique au cas par cas, ce qu'on ne fera pas ici. Notons seulement que ces conditions de glissement se traduiront par des conditions en  $u$  donc en dérivées premières de  $\phi$  sur la frontière  $\Gamma$  de l'obstacle.

En bilan, l'écoulement perturbé est donc déterminé à partir du potentiel  $\phi$ , solution de (28), avec  $\vec{\nabla}\phi = 0$  à l'infini, moyennant des conditions sur les dérivées premières de  $\phi$  sur  $\Gamma$ . Une fois  $\phi$  calculé, on en déduit :

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi; \quad p = -\rho_\infty U_\infty u_1; \quad \rho = \frac{p}{C_\infty^2} \quad (29)$$

## 0.2 Transmission de la chaleur dans un fluide

### 0.2.1 Introduction

Nous n'avons tenu compte jusqu'ici que de deux lois de conservation : celle de la masse et celle de la quantité de mouvement ; ceci supposait implicitement que la température du fluide était connue et constante (au moins en première approximation). Or on sait que les variations de température entraînent des dilatations et que ceci engendre en particulier dans les fluides des mouvements de convection (l'air chaud, plus léger, a tendance à monter et à laisser sa place à l'air plus froid) ; de même les coefficients caractéristiques d'un milieu dépendent de la température (par exemple l'huile chaude et plus fluide que l'huile froide). Inversement, les frottements internes ou externes au cours d'un mouvement engendrent des variations de température. Tout ceci montre que les variations de pression, masse volumique, de vitesse ou déplacement et de température sont couplées ; il est donc nécessaire d'introduire de nouvelles relations pour tenir compte de ce couplage.

Ces relations vont, comme précédemment, se diviser en deux familles : la première famille de relation, valable pour un milieu continu en général, exprime les deux principes fondamentaux de la thermodynamique : **loi de conservation de l'énergie** et la croissance irréversible de l'entropie d'un système, que nous n'utiliserons pas explicitement ici. La seconde famille de relations sera au contraire caractéristique du milieu : elles traduiront d'une part l'expression de l'énergie en fonction des variables thermodynamiques du milieu (loi d'états déjà rencontrées dans des cas simples de fluides incompressible ou compressible barotrope) et les **lois de dissipation** du milieu, qui sont des lois de comportement.

### 0.2.2 Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie s'écrit localement (dans  $\Omega$  domaine de l'espace occupé par le fluide) :

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} + R \quad (30)$$

où  $E(\vec{x}, t)$  désigne l'**énergie interne** spécifique (i.e par unité de masse) du milieu ;

$\vec{Q}(\vec{x}, t)$  est le **flux de chaleur** ;

$R(\vec{x}, t)$  est une **densité volumique définissant un taux de chaleur fourni par des éléments extérieurs au milieu considéré** (rayonnement, effet Joule, réaction chimique exothermique... etc) ; ce terme appelé «source» est une donnée du problème et est en fait nul dans un certain nombre d'applications<sup>7</sup>

Les termes  $\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u)$  (à cause de la symétrie de  $\sigma_{ij}$ ) et  $\frac{1}{\rho} (R - \vec{\nabla} \cdot \vec{Q})$  apparaissant dans le second membre de (30) après division par  $\rho$ , sont respectivement le **taux d'énergie spécifique dû aux efforts intérieurs** et le **taux de chaleur spécifique reçue**.

La **condition aux limites** associée à cette loi de conservation de l'énergie est :

$$Q = -\vec{Q} \cdot \vec{n} = \varpi - \vec{F} \cdot \vec{V} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (31)$$

<sup>7</sup>Lorsque  $R$  et  $\vec{Q}$  sont nuls en même temps, l'évolution du milieu est dite **adiabatique**.

$\varpi$  est le taux de chaleur surfacique fournit par l'extérieur de  $\Omega$  au point frontière considéré

$\vec{F}$  est la densité surfacique d'efforts de contact (pressions, frottements,...) exercés par l'extérieur de  $\Omega$  au point frontière considéré

$\vec{V}$  désigne la vitesse relative du milieu par rapport à la paroi ;  $\vec{F} \cdot \vec{V}$  est donc l'énergie dissipée par frottement sur la paroi.

### 0.2.3 Lois de comportement thermomécaniques d'un fluide

On cherche à généraliser la loi de comportement (3) pour qu'elle rende également compte de la relation entre les contraintes et les caractéristiques thermodynamiques du fluide, comme le flux de chaleur et la température. On va le faire en caractérisant la diffusion de l'énergie dans le milieu due aux effets (supposés découplés) de la viscosité du fluide et de la conduction thermique du fluide. Dans la loi de comportement (3) le terme  $\tau_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u)$  représente les **contraintes visqueuses** et aboutit, via l'équation de conservation de l'énergie (30), à définir une diffusion d'énergie d'origine purement mécanique  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \varepsilon_{ij}$  dite de **dissipation visqueuse**.

Pour préciser le terme de dissipation thermique, on adopte souvent en première approximation la **loi de conduction de Fourier** qui de façon générale s'écrit :

$$Q_i = \sum_{j=1}^3 -K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (32)$$

où le tenseur de **conduction thermique**  $K_{ij}$  dépend en général de la température. En fait dans le cas d'un milieu isotrope, cas des fluides en général :  $K_{ij} = k \delta_{ij}$  et donc

$$\vec{Q} = -k \vec{\nabla} T \quad (33)$$

Dans ce cas, on peut montrer que le terme de **dissipation thermique**  $\Phi_{th}$  s'écrit :

$$\Phi_{th} = \frac{k}{T} |\vec{\nabla} T|^2 \quad (34)$$

#### Cas particulier d'un fluide visqueux, homogène, incompressible, à chaleur spécifique constante : Équation de la chaleur

La donnée des coefficients de dissipation  $k$  et  $\mu$ , supposés généralement constants quand le fluide est incompressible, suffit pour définir le comportement qui s'écrit

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) \\ q_i &= -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (35)$$

La relation d'incompressibilité  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$  tient lieu de loi d'état car elle implique en particulier :  $\rho_0 = \text{constante}$ . Il suffit donc de connaître  $E(T)$ , ou ce qui revient au même, la chaleur spécifique du fluide. Si elle est constante et égale à  $c$ , on a :  $E = cT$ .

On a vu que le système d'équations de Navier-Stokes permet la détermination de  $\vec{U}$  et du gradient de  $p$ . Les effets thermiques sont bien ici découplés des effets mécaniques. En l'absence de source de chaleur ( $R = 0$ ), l'équation de l'énergie (30) s'écrit, compte-tenu des relations précédentes :

$$\rho_0 c \frac{dT}{dt} = 2\mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + k \Delta T \quad (36)$$

soit

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T + \rho_0 c \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T = 2\mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (37)$$

moennant des conditions initiales et aux limites adaptées (notamment du type de (31)), cette relation permet de déterminer  $T$  lorsque  $U$  est préalablement calculé par résolution de Navier-Stokes.

Dans le cas particulier d'un fluide parfait ( $\mu = 0$ ) et si l'on peut faire une hypothèse de petites perturbations (faibles vitesses et faibles gradients de température), l'équation précédente se réduit à **l'équation dite de la chaleur**, qui est du même type mathématique que les équations de diffusion visqueuse (22) déjà évoquées précédemment :

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = 0 \quad \text{ou} \quad f \quad (38)$$

s'il existe une source de chaleur volumique  $f$ .

## 0.3 Élasticité linéaire

### 0.3.1 Analogie avec la mécanique des fluides

Lorsqu'on cherche à définir la notion de déformation d'un milieu continu, ce concept est différent, selon qu'on peut introduire la notion de vitesse des particules qui forment le milieu (cas des fluides) ou lorsqu'on ne dispose que de la notion de déplacement par rapport à une position initiale privilégiée (cas des solides déformables). Dans le premier cas, on peut caractériser de façon naturelle la vitesse de déformation par un tenseur qui s'exprime en fonction de la vitesse d'une particule par

$$\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (39)$$

Dans le cas des solides déformables, on montre facilement que la déformation peut être caractérisée par un champ de tenseur, dit de Green-Lagrange, qui s'exprime de façon non-linéaire par rapport aux dérivées partielles du déplacement. Cependant, pour les milieux solides, les déplacements varient très lentement lorsqu'on passe de l'état initial à l'état déformé : on peut alors négliger les termes non-linéaires (quadratiques) du tenseur de Green-Lagrange et obtenir un tenseur des déformations linéarisées qui, considéré comme un opérateur différentiel sur le champ des déplacements a exactement la même expression que le tenseur des vitesses de déformation opérant sur le champ des vitesses en mécanique des fluides. Autrement dit, pour un solide se déformant lentement, le tenseur des déformations est donné par l'équation (39) avec  $\vec{U}$  représentant le champ des déplacements par rapport à l'état initial du solide.

Comme dans le cas d'un fluide visqueux, on aura à écrire a priori la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, mais sous l'hypothèse de petites perturbations, la divergence des déplacements est très petite et la conservation de la masse se réduit alors approximativement à la conservation de la masse volumique du solide lors de sa déformation  $\rho \simeq \rho_0$ . Compte tenu que  $\vec{U}$  est un champ de déplacement, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (40)$$

$\sigma_{ij}(\vec{x}, t)$  sont les composantes du **tenseur symétrique des contraintes**.

$\vec{f}(\vec{x}, t) = (f_1, f_2, f_3)$  est la densité volumique des forces extérieures agissant sur le solide (généralement les forces de pesanteur)

### 0.3.2 Élasticité linéaire isotrope ou élasticité classique

La théorie de l'élasticité linéaire se situe d'une part dans le cadre de la description des solides lentement déformables<sup>8</sup> esquissée ci-dessus, et d'autre part on impose que la **loi de comportement élastique** reliant le tenseur des contraintes à celui des déformations est **linéaire**. Lorsque de plus le solide élastique a un comportement isotrope (c'est-à-dire ne privilégie aucune direction de l'espace), on obtient la **loi de comportement de Hooke** :

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) \quad (41)$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. Le système linéaire que constitue l'équation (41) s'inverse facilement :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (42)$$

où on a posé  $E = (3\lambda + 2\mu)\mu/(\lambda + \mu)$  qui est le **module d'Young** et  $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$  qui est le **coefficient de Poisson**.

Dans la pratique, ce sont les module d'Young et coefficient de Poisson qui sont connus expérimentalement pour un matériau homogène donné et on en déduit les coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (43)$$

Toujours dans le cas d'un matériau homogène, les différents coefficients introduits ci-dessus sont des constantes et dans ce cas, la conservation de la quantité de mouvement (40) s'écrit vectoriellement :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \mu \Delta \vec{U} - (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) = \vec{f} \quad (44)$$

ou sous la forme équivalente

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \mu \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \vec{f} \quad (45)$$

On en dira pas davantage<sup>9</sup> concernant les problèmes dynamiques (i.e. dépendant du temps) de l'élasticité linéaire, si ce n'est qu'on peut deviner au vu de l'équation (44) qu'ils peuvent mener sous certaines hypothèses et cas particulier (notamment d'étude des vibrations dans un milieu élastique) à l'**équation modèle des ondes** de type (expression formelle où  $u$  désigne un champ inconnu scalaire)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \text{ ou } 0 \quad (46)$$

### 0.3.3 Problèmes stationnaires

Le terme stationnaire n'a pas la même signification en mécanique des fluides et en mécanique des solides. Dans le premier cas, le mot stationnaire ne signifie pas absence de mouvement mais indépendance de la vitesse par rapport au temps. Dans le second cas l'inconnue cinématique est le déplacement et le mot stationnaire signifie équilibre statique : on est alors en **élastostatique** (ce qui est une vue de l'esprit

<sup>8</sup>On suppose également que les effets mécaniques et thermiques sont découplés et peuvent être étudiés séparément

<sup>9</sup>voir le cours spécifique d'élasticité linéaire et éléments finis

puisque un déplacement s'effectue dans un laps de temps) ou en mouvement suffisamment lent pour que chaque configuration puisse être considérée comme en équilibre ; on parle alors d'élasticité quasi-statique. De toutes façons, le terme d'accélération disparaît et le système (40) qui traduit la conservation de la quantité de mouvement est réduit à :

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (47)$$

où  $\sigma_{ij}$  apparaît l'inconnue principale, mais dont la formulation vectorielle (c'est-à-dire en considérant le seul champ de déplacement  $\vec{U}$  comme inconnu) déduite de (44) ou (45) aboutit aux **équations de Navier** :

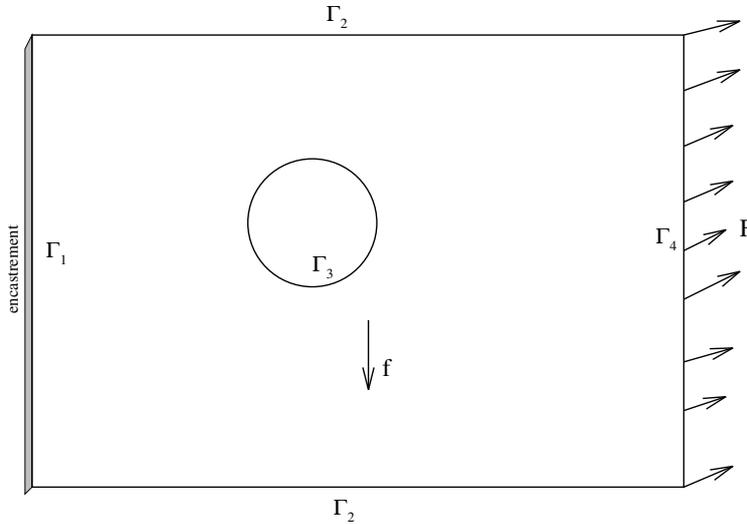
$$-\mu \Delta \vec{U} - (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) = \vec{f} \quad (48)$$

équations<sup>10</sup> auxquelles on doit ajouter des conditions aux limites sur les bords du solide qui portent soit sur le champ des déplacements (par exemple encastrement d'un des bords, où l'on posera donc la condition  $\vec{U} = 0$ ), soit sur le champ des contraintes (pression ou traction appliquée sur un des bords du solide et une condition de type (5)), soit sur les deux champs<sup>11</sup>, comme on le verra dans l'exemple traité ci-dessous.

## 0.4 Introduction à la méthode des éléments finis

### 0.4.1 Un exemple simple de problème d'élastostatique

Il s'agit de trouver quels sont les contraintes générées à l'intérieur du plaque  $\Omega$  trouée, pesante et encadrée sur un bord, du fait d'une traction ou compression dans son plan. Ce problème est régi par les équations de



Navier en deux dimensions et s'écrit avec les notations qui précèdent (où on pose  $u = u_i, i = 1, 2$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(u) + f_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (49)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \sum_{k=1}^2 \varepsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{ij}(u) \quad (50)$$

<sup>10</sup>ou, de manière équivalente :  $-(\lambda + 2\mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \mu \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \vec{f}$

<sup>11</sup>en fait dans la plupart des problèmes, les contraintes et les déplacements ne peuvent être déterminés indépendamment l'un de l'autre, d'où le succès des «formulations variationnelles» pour résoudre ces problèmes

$$u_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (51)$$

$$\sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(u) \cdot n_j = F_i \quad \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \quad (52)$$

Les données sont le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  du matériau, et les deux composantes des efforts surfaciques  $f_i(x, y)$  (poids de la plaque) en chaque point  $(x, y)$  de  $\omega$ , ainsi que les deux composantes des efforts linéiques  $F_i(x, y)$  (traction/compression) appliqués en chaque point de  $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ . Les inconnues sont tout d'abord les deux composantes du déplacement  $u_i(x, y)$  en chaque point  $(x, y)$  de la plaque  $\omega$ , puis le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  relié aux déplacements par la loi de comportement de Hooke (50) et la définition du tenseur des déformations (39).

## 0.4.2 Formulation variationnelle du problème.

### Principe des travaux virtuels

Ce principe peut s'énoncer ainsi : lorsqu'on considère un champ de déplacement test  $v(x, y)$  défini sur le volume  $\Omega$  (nul sur  $\Gamma_1$ ), alors la somme des travaux «virtuels» opérés lors de ce déplacement par toutes les forces extérieures et intérieures au système est égale au travail virtuel des quantités d'accélération, c'est-à-dire nul si le système est à l'équilibre statique. Autrement dit, en élastostatique, le travail virtuel des efforts internes générés par les contraintes (dues à l'élasticité/rigidité du solide) doit compenser exactement le travail virtuel des efforts externes, ce qui s'écrit au vu de (49)

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(u) v_i d\Omega + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega = 0 \quad (53)$$

et en intégrant par partie, avec le théorème de la divergence généralisée<sup>12</sup>, et en tenant compte de (51,52), on obtient la formulation variationnelle du problème précédent :

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_4} F_i v_i d\zeta \right) \quad (54)$$

pour tout champ de vecteur déplacement test  $v$  défini sur  $\Omega$  et nul sur  $\Gamma_1$  et suffisamment régulier<sup>13</sup>. On voit que le terme de gauche dans (54) est une forme bilinéaire  $a(u, v)$  dans cet espace des champs de déplacements, et le terme de droite une forme linéaire  $l(v)$ .

La résolution du problème initial va donc se traduire par :

-trouver un déplacement  $u(x, y)$  défini sur  $\Omega$ , nul sur  $\Gamma_1$ , tel que  $a(u, v) = l(v)$ , quelque soit  $v$  défini sur  $\Omega$ , nul sur  $\Gamma_1$ . Sous des hypothèses de régularités des données (géométriques et physiques) toujours vérifiées dans la pratique et en particulier dans le cas qui nous occupe, la théorie assure l'existence et l'unicité d'une solution  $u$  (théorème de Lax-Milgram).

Il ne reste plus qu'à discrétiser l'espace vectoriel des champs de déplacement défini ci-dessus, c'est-à-dire poser le problème linéaire  $a(u, v) = l(v)$ , qui est posé a priori dans un espace vectoriel de dimensions infinies, sous la forme d'un problème linéaire en dimensions finies, qui s'écrira alors  $A.u = b$ , où est une matrice carrée de dimension finie  $n$  (dite «matrice de rigidité») et  $u$  (inconnue) et  $b$  (second membre dépendant des conditions aux limites) sont des vecteurs de dimension  $n$  : c'est l'objet de la méthode dite «des éléments finis»

<sup>12</sup>brièvement, pour tout tenseur  $t_{ij}$ , on a  $\int_{\Omega} \partial t_{ij} / \partial x_k d\Omega = \int_{\partial\Omega} t_{ij} \cdot n_k d\zeta$

<sup>13</sup>disons que  $v$  est supposé être une fonction de carré intégrable sur  $\Omega$

### 0.4.3 Une méthode des éléments finis appliquée au problème précédent

Pour conclure ce chapitre, et en même temps introduire le cours spécifique sur l'élasticité linéaire par la méthode des éléments finis, disons simplement que, dans notre exemple cette méthode consistera :

-à choisir une base d'éléments (comportant des éléments de volume ou ici de surface qui mailleront  $\Omega$ , et des nœuds(points) dans chacun de ces éléments pour définir une base de fonctions élémentaires) pour approximer l'espace des déplacements définis ci-dessus

-puis ensuite à assembler la matrice de rigidité du système  $A.u = b$  grâce à la loi de comportement (50), ainsi que le second membre  $b$  en tenant compte des poids et des tensions extérieures

-puis enfin à résoudre numériquement ce système par une méthode adaptée aux matrices creuses (citons ici la méthode de Crout), ce qui donnera le champ de déplacement  $u$  en tout nœud du système.

Le calcul des contraintes peut ensuite se faire en écrivant la loi de comportement (50) dans le même espace de dimension fini que celui utilisé pour calculer  $u$ , et donc sur des points liés au choix initial des éléments. Une des forces de la méthode est que le choix initial des éléments peut être revu à volonté (en particulier pour raffiner le calcul sur une partie du système sur laquelle on choisira un maillage plus serré), il suffit en effet de ré-exécuter le code correspondant à l'organigramme décrit ci-dessus. Notons cependant que la mise en œuvre numérique d'une telle méthode, même si elle est bien codifiée, n'est pas une mince affaire, mais il existe heureusement des logiciels qui feront ça pour vous<sup>14</sup>...

---

<sup>14</sup>mais que vous utiliserez d'autant mieux que vous avez une idée précise de ce qu'ils font

# Chapitre 1

## Introduction à la modélisation des milieux discrets : Le projet «méthodes numériques»

### 1.1 La spectroscopie du bruit thermique

#### 1.1.1 Bruit thermique mesuré aux bornes d'une antenne immergée dans un plasma en mouvement

##### Introduction générale

Rappelons tout d'abord que la densité spectrale d'un signal est donnée par la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation. Si ce signal est la tension recueillie aux bornes d'une antenne immergée dans un plasma -le vent solaire- ayant une vitesse d'expansion  $\vec{V}$ , et en notant  $\vec{J}(\vec{k})$  la T.F de la distribution de courant le long de l'antenne d'une part et  $E^2$  la fonction d'autocorrélation du champ électrostatique variable vu par l'antenne d'autre part, on aura :

$$V_\omega^2 = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k \left| \frac{\vec{k} \cdot \vec{J}(\vec{k})}{k} \right|^2 E^2(\vec{k}, \omega - \vec{k} \cdot \vec{V}) \quad (1.1)$$

À des fréquences très supérieures à la fréquence gyromagnétique (par exemple dans un plasma peu magnétisé), on a :

$$E^2(\vec{k}, \omega) = 2\pi \frac{\sum_j q_j^2 \int d^3v f_j(\vec{v}) \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{k^2 \epsilon_0^2 |\epsilon_L(\vec{k}, \omega)|^2} \quad (1.2)$$

$f_j(\vec{v})$  étant la distribution de vitesse de la  $j^{\text{e}}$  espèce de particule, de charge  $q_j$ , et  $\epsilon_L(\vec{k}, \omega)$  la fonction diélectrique longitudinale du plasma. Le terme  $\vec{k} \cdot \vec{J}$  dépend de la forme et de la direction de l'antenne<sup>1</sup>. On veut surtout ici montrer l'équation (1.2) qui permet de comprendre pourquoi on peut, moyennant un certain nombre de conditions<sup>2</sup> satisfaites par l'instrument URAP d'Ulysse dans le vent solaire, « remonter » à la

<sup>1</sup>le signal réel collecté en entrée du récepteur n'est pas exactement  $V_\omega^2$  puisqu'il dépend aussi des impédances du récepteur et de l'antenne. On verra plus de détails dans la section 1.2, mais notons que la référence de base pour ces calculs de bruit thermique pour différents types d'antenne est : *Tool Kit Antennae and Thermal Noise Near the Plasma Frequency*, N. Meyer-Vernet and C. Perche, *Journal of Geophysical Research*, Vol.94, pp 2405-2415, 1989.

<sup>2</sup>on verra qu'essentiellement l'antenne doit être plusieurs fois plus longue que la longueur de Debye  $L_D \propto \sqrt{T/n}$  pour résonner aux ondes de Langmuir.

distribution de vitesse des électrons et fournir un diagnostic assez précis des densités et températures du plasma ambiant.

En pratique, on procédera de la façon suivante : on se donnera un modèle de distribution des vitesses du plasma que l'on veut mesurer (pour ce projet de DESS on utilisera une simple maxwellienne<sup>3</sup>), on calculera la densité spectrale aux bornes de l'antenne en utilisant notamment les équations ci-dessus (qui seront détaillées en section 1.2), et on déduira les paramètres du plasma en ajustant le modèle aux spectres observés. Notons que ni le calcul théorique du signal recueilli par l'antenne, ni la méthode d'ajustement aux spectres expérimentaux ne sont «immédiats», et c'est justement la mise en œuvre de cette méthode globale de «modélisation/ajustement» **non-linéaire** qui va constituer le projet que vous aurez à réaliser. Ce projet servira aussi de fil conducteur pour apprendre à utiliser une bibliothèque numérique<sup>4</sup> et y puiser les codes adaptés à la résolution d'un problème donné.

### 1.1.2 Les mesures spatiales in situ à modéliser : Ulysse dans le vent solaire

Ulysse est une sonde d'exploration du système solaire et plus particulièrement d'observation du Soleil et de ses effets in situ dans un espace situé entre 5 et 1 UA du Soleil (UA=Unité Astronomique, qui est la distance moyenne Soleil-Terre, soit environ  $150.10^6$  km) et surtout à **haute latitude héliographiques**, c'est-à-dire en dehors du plan de l'Écliptique (plan de l'orbite terrestre où orbitent à peu près toutes les planètes du système solaire). Ulysse possède ainsi une orbite elliptique képlérienne autour du Soleil, dans un plan grosso modo perpendiculaire au plan de l'Écliptique, ce qui lui a permis d'observer les pôles du Soleil, son périhélie est situé à  $\sim 1.5$  UA et son aphélie à  $\sim 5$  UA ; la période orbitale d'Ulysse est d'environ 6 ans. Pendant toute la durée de sa mission<sup>5</sup> Ulysse est baigné dans un plasma chaud en expansion issu du soleil : **le vent solaire**.

Ulysse embarque une douzaine d'expériences et en particulier une expérience nommée URAP (pour *Unified Radio and Plasma Wave*). Cette expérience est un consortium de plusieurs instruments (et plusieurs équipes) conçus pour étudier le vent solaire et les émissions radio solaires et planétaires. Parmi ces instruments, on s'intéresse ici à l'instrument RAR (Radio Astronomy Receiver) destiné entre autres à mesurer **in situ** la densité et la température des électrons du vent solaire en routine.

L'instrument est constitué de deux antennes, dont l'une est un dipôle électrique de  $2 \times 36$  m dans le plan de rotation d'Ulysse (dite antenne S), et l'autre est un monopôle dans l'axe de rotation (dite antenne Z)<sup>6</sup>. Ces antennes sont reliées à un récepteur radio basse-fréquence qui balaye linéairement 64 canaux (de largeur de bande 0.75 kHz) de 1.25 à 48.5 kHz en 128 secondes et à un récepteur haute-fréquence qui balaye 12 canaux (de largeur  $\sim 3$  kHz), disposés grosso modo logarithmiquement de 52 à 940 kHz, en 48 secondes. Cet instrument acquiert donc toutes les deux minutes environ un spectre de puissance dans une gamme allant de 1 à 1000 kHz. On montre un tel spectre sur la figure 1.1. Mis bout à bout sur une durée donnée (généralement une journée), ces spectres produisent le matériau de base de tous les radio-astronomes pourvus d'antennes : le spectre dynamique radio ou radio-spectrogramme (cf. figures 1.2 et 1.3).

Le spectre dynamique montré sur les figures 1.2 ou 1.3 a le format standard des spectres produits en routine à Meudon<sup>7</sup> : il s'agit en fait, pour deux journées de mesure à bord d'Ulysse, de deux spectres dynamiques journaliers en valeurs dites «brutes », i.e. après l'amplification analogique du signal d'antenne

<sup>3</sup>en général, on utilise une distribution cœur+halo ; comme il ne s'agit pas d'une distribution exactement maxwellienne, on parle alors de *bruit quasi-thermique*

<sup>4</sup>On utilisera ici **Numerical Recipes** in Fortran(90) - The Art of Scientific Computing, W.H Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery

<sup>5</sup>Ulysse a été lancé fin 1990, est opérationnel actuellement et sa mission devrait officiellement s'achever en 2002

<sup>6</sup>qui ne présente pas d'intérêt pour notre étude, sinon que son signal est (malheureusement) quelquefois sommé à celui de l'antenne S

<sup>7</sup>précisément au *Département de Recherche Spatiale*

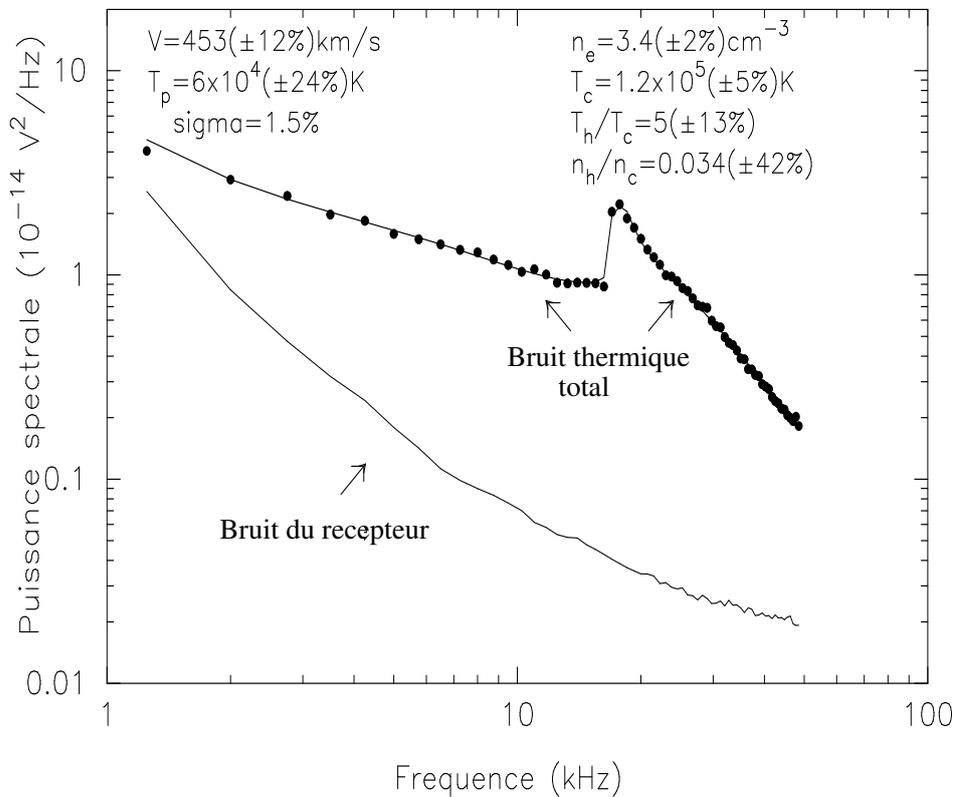


FIG. 1.1 – Spectre basse fréquence obtenu par Ulysse dans le vent solaire. Les points sont les mesures en valeurs physiques (i.e. en  $V^2/\text{Hz}$ ) de la puissance collecté par l’antenne S pour chacun des 64 paliers de fréquence. La ligne continue est un modèle de spectre calculé en tenant compte de 6 paramètres (densité et température des électrons froids et chauds + vitesse d’ensemble + température des protons)

de 0 à 5 Volts (voir l’échelle de couleur). Pour chacune des deux journées, le spectre du bas a été obtenu par le récepteur basse-fréquence (64 canaux), tandis que le spectre dynamique du haut est reconstitué sur une échelle logarithmique de 1 à 1000 kHz à partir des canaux disponibles à la fois en hautes et en basses fréquences (64 + 12 canaux). Dans le vent solaire et avec l’instrument radio d’Ulysse, on verra (et on l’a déjà indiqué sur la figure 1.1) que les paramètres les mieux déterminés sont la densité électronique totale et la température des électrons froids<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>Notons que le diagnostic du bruit quasi-thermique peut être étendu (cf figure 1.1) à l’estimation de la vitesse du vent solaire (dont les équations (1.1) et (1.2) dépendent) en tenant compte du bruit thermique des protons décalé Doppler (au dessous de la fréquence plasma).

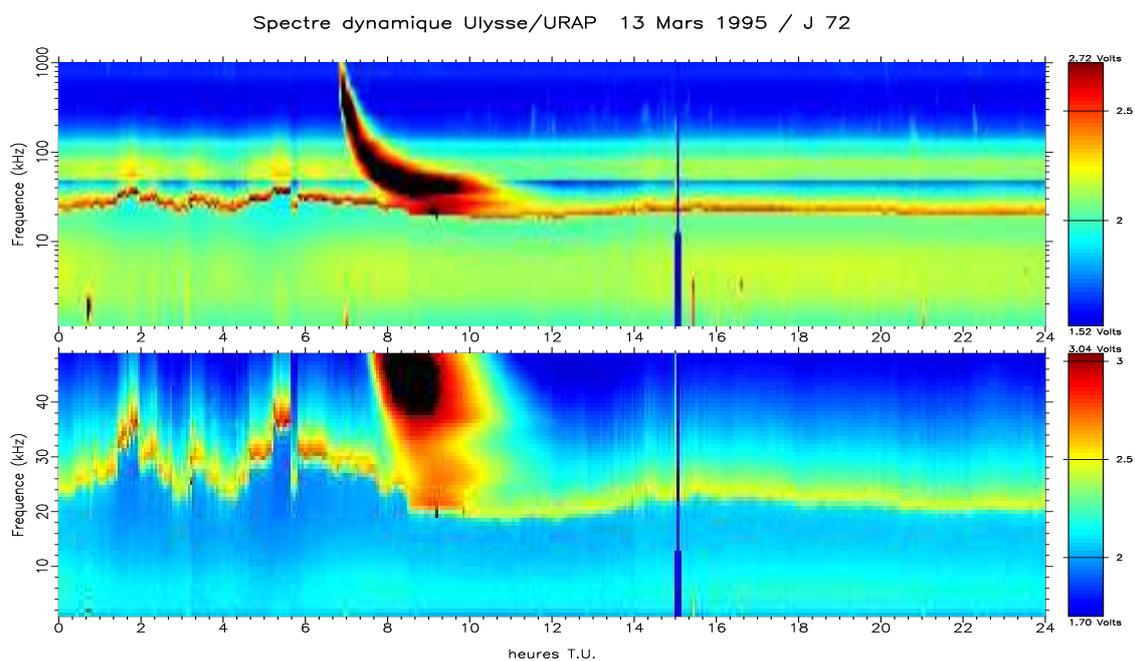


FIG. 1.2 – Spectre dynamique de routine obtenu par Ulysse durant la journée du 13 mars 1995 (i.e. pendant une période d’activité solaire minimale), dans le vent solaire près du plan de l’Écliptique

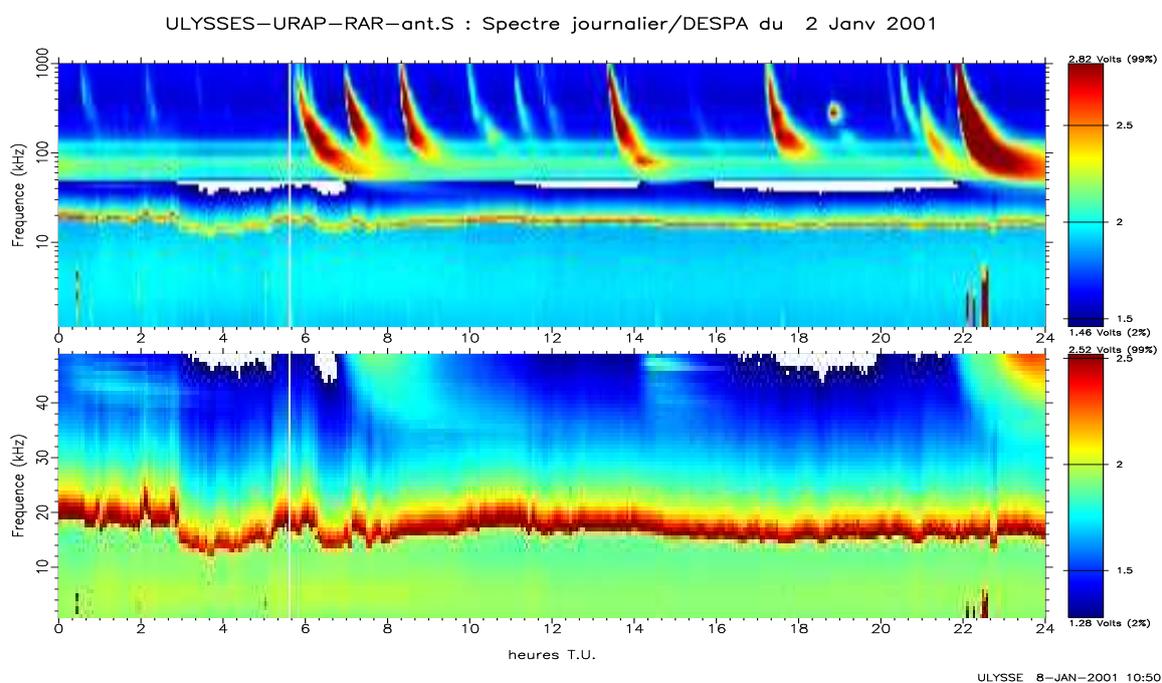


FIG. 1.3 – Spectre dynamique de routine obtenu par Ulysse durant la journée du 2 janvier 2001 (i.e. pendant une période d’activité solaire maximale), dans le vent solaire à haute latitude ( $\sim 60^\circ$ )

Le diagnostic de la densité totale des électrons est de toutes façons excellent car, à la fréquence plasma, qui est un zéro de la fonction diélectrique  $\epsilon_L$ , le bruit s'accroît considérablement (quelle que soit la distribution, voir Éq.1.2), formant un pic de puissance très marqué sur chaque spectre et, sur les spectrogrammes, une ligne continue fort intense par rapport au bruit de fond que l'on peut suivre très nettement sur les figures 1.2 et 1.3. Le diagnostic de température nécessite par contre, via l'ajustement, de connaître la forme précise du spectre immédiatement en amont et, sur une large gamme, en aval de la fréquence plasma. Par exemple, sur la figure 1.2, il sera plus difficile de porter un diagnostic de température précis pendant la période allant d'environ 8 à 11 heures T.U, car un type III solaire très intense vient polluer les spectres de bruit quasi-thermique au-dessus de la fréquence plasma (qui reste cependant très visible car elle se comporte comme une fréquence de coupure vis-à-vis de l'émission type III solaire).

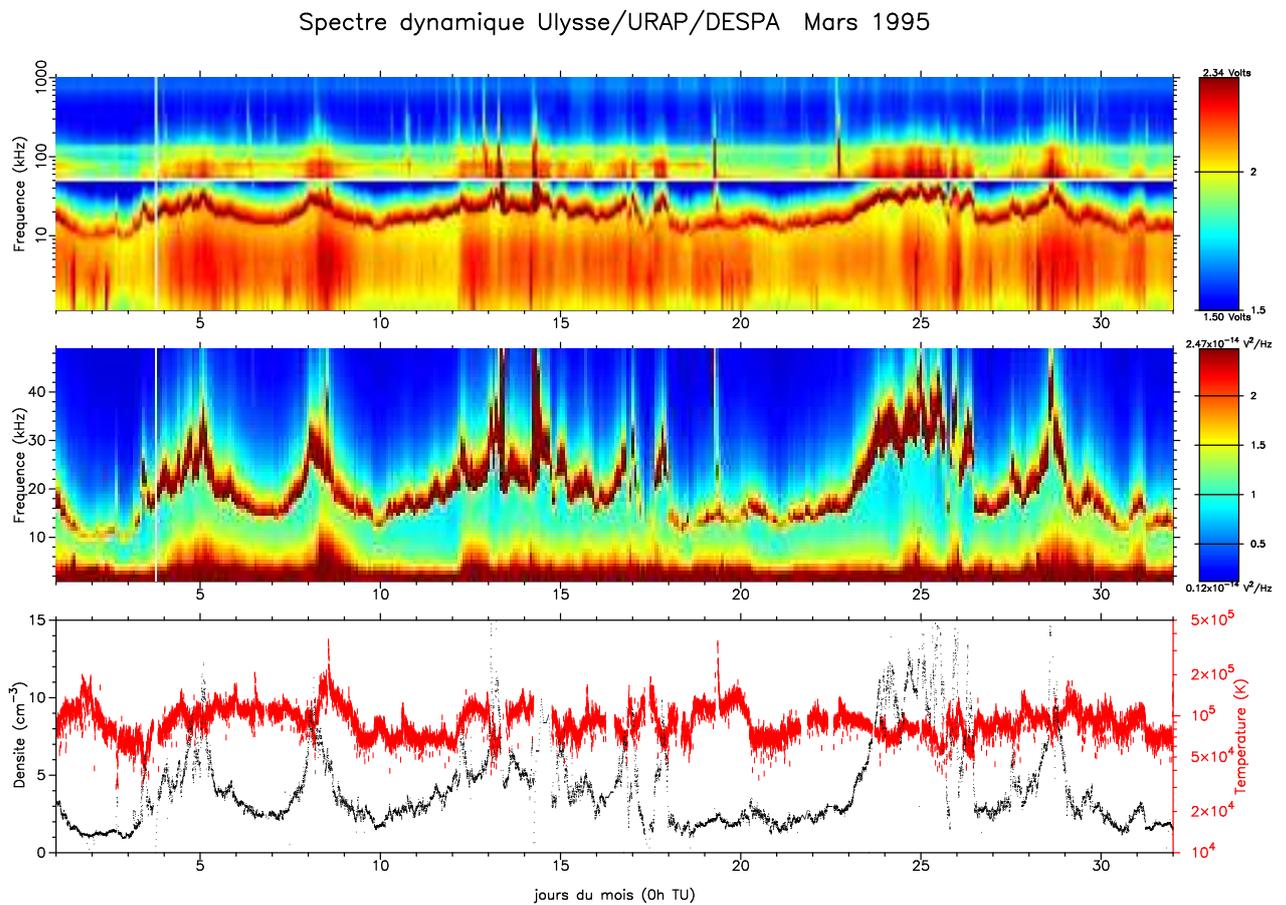


FIG. 1.4 – Spectre dynamique acquis au périhélie d'Ulysse en mars 95 (traversée de l'Écliptique, où le vent solaire dense s'étend en «jupe de ballerine» près du minimum d'activité solaire

On illustre sur la figure 1.4 le type de résultat que l'on cherche à obtenir par la spectroscopie du bruit thermique : une mesure sur de longue période de la densité et de la température dans le vent solaire, la plus fiable et la plus précise possible. Ce type de travail a permis (et permet toujours) de constituer une base de données nécessaire pour étudier les évolutions et les grandes structures du vent solaire, et pour comprendre *in fine* son origine et sa thermodynamique (pour plus d'informations, on peut consulter le site

<http://despa.obspm.fr/plasma/ulysses/ulysses.html>).

## 1.2 Le modèle numérique antenne/plasma

### 1.2.1 Modéliser la réponse d'antenne

Pour calculer  $\vec{J}(\vec{k})$ , qui est rappelons-le la transformée de Fourier de la distribution de courant le long de l'antenne, il faut tout d'abord tenir compte de la géométrie d'antenne. On trouve couramment deux types d'antennes électriques sur les sondes spatiales : les **paires d'antennes «fils»** qui forment un dipôle électrique (ou un équivalent si elles ne sont pas alignées, c'est-à-dire en V) et les **paires d'antennes «boules»** ou double-sphères.

#### Antenne fils

Ulysse/URAP est équipé d'un dipôle électrique filaire, c'est-à-dire deux cylindres conducteurs, chacun de longueur  $L$  et de rayon  $a \ll L$ , séparées par un isolant «infiniment mince». La «vraie» distribution de courant  $\vec{J}(\vec{x})$  est généralement inconnue et nous supposons que le matériau des brins est parfaitement homogène et conducteur et qu'ainsi la distribution de charge est constante sur chaque brin<sup>9</sup>. On aura, dans l'espace spectral, en considérant les antennes alignées sur l'axe  $Ox_1$  :

$$\vec{J}(\vec{k}) = \int dx J(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \frac{4}{k_1^2 L} \sin^2(k_1 L/2) [J_0(a\sqrt{k_2^2 + k_3^2})] \vec{e}_1 \quad (1.3)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

#### Antenne boules

Elles sont constituées de deux sphères de rayon  $a$ , séparées par une distance  $L \gg a$ , alignées sur  $Ox_1$  :

$$\vec{J}(\vec{k}) = -\frac{2i}{k_1 L} \sin(k_1 L/2) \left[ \frac{\sin(ka)}{ka} \right] \vec{e}_1 \quad (1.4)$$

#### La réponse d'antenne dans un plasma isotrope

Le terme dépendant de l'antenne, intervenant dans l'expression du bruit thermique, est  $|\vec{k} \cdot \vec{J}|^2$ . Supposons que nous ayons affaire à un plasma parfaitement isotrope : On peut définir la réponse d'antenne  $F$  à une longueur d'onde donnée  $k$  en intégrant le terme précédent dans toutes les directions de l'espace pour cette longueur d'onde :

$$F(k) = \frac{1}{32\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\vec{k} \cdot \vec{J}(\vec{k})|^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (1.5)$$

On aura ainsi pour une antenne fil de longueur  $L$  et rayon  $a$  :

$$F_{\text{fil}}(k) = \frac{Si(kL) - Si(2kL)/2 - 2 \sin^4(kL/2)/kL}{kL} [J_0^2(ka)] \quad (1.6)$$

où  $Si$  dénote le sinus intégral :  $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ .

On aura de même pour une antenne boule :

$$F_{\text{boule}}(k) = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\sin(kL)}{kL} \right) \left[ \frac{\sin^2(ka)}{k^2 a^2} \right] \quad (1.7)$$

<sup>9</sup>cette approximation est valide dès lors que  $\omega L/c \ll 1$  et que  $a/L_D \ll 1$

Remarque : En général, on s'intéresse à des longueurs d'ondes grandes devant le rayon des brins ou des sphères ( $ka \ll 1$ ), et les quantités entre crochets dans (1.6) et (1.7) sont pratiquement égales à 1.

## 1.2.2 Modéliser les fluctuations du champ électrique dans un plasma sans collision

### Une esquisse de la théorie cinétique des plasmas

Sous certains aspects, un plasma est un fluide parfait conducteur, c'est-à-dire qu'il peut être modélisé comme s'il s'agissait d'un milieu continu (voir le premier chapitre de ce cours), c'est-à-dire par les équations qui régissent les fluides classiques, auxquelles on ajoute les équations de Maxwell, la loi d'Ohm et l'action des forces de Lorentz, pour obtenir les équations de la magnétohydrodynamique ou MHD. Cependant, de nombreuses propriétés des plasmas (en particulier des plasma «chauds») ne peuvent être abordés par la MHD et leurs propriétés n'apparaissent seulement qu'au travers de leur comportement microscopique. Ces comportements sont mieux modélisés par les méthodes de la **théorie cinétique**, c'est-à-dire les méthodes qui prennent en compte le mouvement de chacune des particules qui composent le plasma : le milieu est dit alors **discret ou particulaire**. Pour pouvoir ensuite accéder avec de tels modèles aux quantités macroscopiques, on a recours aux méthodes statistiques. L'outil de base pour la description d'un modèle cinétique en  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  est la **fonction de distribution des vitesses de particules**  $f(\vec{v}, \vec{x}, t)$ .

L'équation de base de la théorie cinétique des plasmas<sup>10</sup> faisant intervenir la fonction de distribution des vitesses est l'**équation de Boltzmann**, qui s'écrit sous sa forme non-relativiste et pour une espèce  $\alpha$  de particules de distribution  $f_\alpha$  :

$$\frac{\partial \vec{f}_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} f_\alpha \cdot \vec{v} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left( \vec{E} + \frac{\vec{v} \wedge \vec{B}}{c} \right) \cdot \vec{\nabla}_v f_\alpha = \frac{df_\alpha}{dt} |_{\text{collisions}} \quad (1.8)$$

où  $q_\alpha$  et  $m_\alpha$  sont respectivement la charge et la masse de la particule d'espèce  $\alpha$  considérée et  $\vec{\nabla}_v$  dénote le vecteur  $(\partial/\partial v_1, \partial/\partial v_2, \partial/\partial v_3)$ .

Lorsqu'on néglige le terme de collisions, on obtient l'**équation de Vlasov** :

$$\frac{\partial \vec{f}_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} f_\alpha \cdot \vec{v} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left( \vec{E} + \frac{\vec{v} \wedge \vec{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (1.9)$$

Cette équation caractérise l'évolution dans le temps et l'espace de la distribution des particules d'un plasma non collisionnel. Les quantités macroscopiques (densité, température etc. . .) sont ensuite classiquement déduites de cette fonction de distribution par le calcul de ses **moments**<sup>11</sup>. Par contre les champs électrique et magnétique -ainsi que les équations de Maxwell qui les gouvernent- sont des notions non statistiques et localement non discrètes, dont le couplage avec une distribution statistique de particules doit être précisé. On montre, dans le cadre de la théorie cinétique de Vlasov-Maxwell que  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  peuvent être considérés comme respectivement des champs électrique et magnétique **moynnés** sur un volume de plasma statistiquement significatif pour la distribution considérée mais limité à une sphère de rayon égal à la longueur de Debye :

$$L_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 K_B T_\alpha}{q_\alpha^2 n_\alpha}} \quad (1.10)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide,  $K_B$  la constante de Boltzmann,  $T_\alpha$  et  $n_\alpha$  respectivement la température et la densité de l'espèce  $\alpha$ . Autrement dit, dans la description cinétique de Vlasov-Maxwell, un plasma est formé

<sup>10</sup>ou des gaz neutres (poser  $q_\alpha = 0$ ) : les équations de Navier-Stokes ou des «fluides classiques» ne sont en fait qu'une approximation «continue» de l'équation de Boltzmann

<sup>11</sup>le moment d'ordre  $q$  d'une distribution  $f(v)$  est formellement  $M_q = \int v^q f(v) d^3v$ ; la densité est le moment d'ordre 0

d'un ensemble de particules «test», chacune «habillée» d'une sphère ou gaine de Debye, et l'évolution de la distribution des vitesses de ces particules test est régie par l'équation (1.9). Sa résolution permet en principe d'exprimer les fonctions de distributions à partir des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  et d'en déduire les densités de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{J}$

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d^3v \quad (1.11)$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha} d^3v \quad (1.12)$$

En reportant ces grandeurs dans les équations de Maxwell, on obtient un système complet auto-cohérent des équations dynamiques cinétiques du plasma. Rappelons ici les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.13)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{J} = \vec{J}_{ext} \quad ; \quad \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho = \rho_{ext} \quad (1.14)$$

où  $\vec{J}_{ext}$  et  $\rho_{ext}$  sont des densités et des courants produits par des «sources externes».

### Dynamique électrostatique, linéarisée, à une dimension

On voit sur le dernier terme de (1.9) que les équations du modèle de Vlasov-Maxwell sont non-linéaires et donc en général difficiles à résoudre analytiquement. C'est pourquoi, et cela suffira pour le projet de modélisation du bruit thermique, nous allons nous réduire à une dimension (ce qui revient à considérer un plasma isotrope) et se restreindre aux ondes purement électrostatiques ( $\vec{B} = 0$ ).

Soit  $x$  la coordonnée dans le système à une dimension étudié. En posant  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ ,  $\vec{E} = E\vec{e}_x$ , et  $\vec{B} = 0$ , on a d'après (1.9)-(1.14) :

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v} = 0 \quad (1.15)$$

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha} dv \quad (1.16)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} - \rho = \rho_{ext} \quad (1.17)$$

Ces équations sont aussi non linéaires mais nous les résolvons pour des perturbations de petite amplitude d'un état d'équilibre homogène, neutre et sans champ. Pour définir ces perturbations, on pose pour chaque espèce de particules :

$$f_{\alpha} = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}(v, x, t) \quad ; \quad |f_{\alpha 1}| \ll f_{\alpha 0} \quad (1.18)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(x, t) \quad ; \quad |\rho_1| \ll \rho_0 \quad (1.19)$$

En posant  $E = E_1(x, t)$  le champ créé par la perturbation, on obtient à partir de (1.15)-(1.17) les **équations linéarisées** :

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial x} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_1 \frac{df_{\alpha 0}}{dv} = 0 \quad (1.20)$$

$$\rho_1 = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha 1} dv \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial x} - \rho_1 = \rho_{ext} \quad (1.22)$$

où la source externe est supposée de petite amplitude.

On résout ensuite les équations (1.20)-(1.22) comme suit : On transforme par Fourier les champs de perturbation dépendant de l'espace et du temps, de sorte que (1.20)-(1.22) deviennent des équations linéaires algébriques dans l'espace spectral  $\{\omega, k\}$  qui se résolvent facilement. Les dépendances spatio-temporelles des champs sont ensuite obtenues en inversant la transformation de Fourier. Les transformées de Fourier de (1.20)-(1.22) s'écrivent :

$$-i(\omega - kv)f_{\alpha 1} - g_{\alpha 1}(v, k) \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_1 f'_{\alpha 0} = 0 \quad (1.23)$$

$$\rho_1 = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha 1} dv \quad (1.24)$$

$$ik\varepsilon_0 E_1 - \rho_1 = \rho_{\text{ext}} \quad (1.25)$$

où  $g_{\alpha 1}(v, k)$  est la transformée de Fourier de la perturbation initiale (i.e. à l'instant  $t = 0$ ) :  
 $g_{\alpha 1}(v, x) = f_{\alpha 1}(v, x, 0)$ .

On déduit de (1.23)-(1.25) :

$$f_{\alpha 1} = -i \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{f'_{\alpha 0} E_1}{\omega - kv} + i \frac{g_{\alpha 1}}{\omega - kv} \quad (1.26)$$

d'où

$$\rho_1 = \sum_{\alpha} -i \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{\alpha 0} dv}{\omega - kv} E_1 + \sum_{\alpha} i q_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{\alpha 1} dv}{\omega - kv} \quad (1.27)$$

On voit qu'il y a deux parties dans la densité de charge  $\rho_1$ , dont une seule dépend du champ électrique  $E_1$  appelée densité de charge collective :

$$\rho_{\text{coll}} = \sum_{\alpha} -i \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{\alpha 0} dv}{\omega - kv} E_1 \quad (1.28)$$

L'autre partie  $\rho_{\text{init}}$  dépendant des conditions initiales  $g_{\alpha 1}$  des fonctions de distributions perturbées. En portant (1.27) dans l'équation de Poisson (1.25), on obtient :

$$ik\varepsilon_0 E_1 - \rho_{\text{coll}} = \rho_{\text{init}} + \rho_{\text{ext}} \equiv \rho_{\text{exc}} \quad (1.29)$$

où les diverses excitations sont regroupées dans une densité de charge  $\rho_{\text{exc}}$ .

### La permittivité longitudinale du plasma

La dynamique des perturbations du plasma décrite par l'équation de Vlasov linéarisée fait correspondre à un champ électrique donné  $E_1$  une densité de charge collective. Cela permet de définir une fonction de réponse interne, **la susceptibilité longitudinale**  $\chi_L(k, \omega)$  par la formule :

$$\rho_{\text{coll}} = -ik\varepsilon_0 \chi_L E_1 \quad (1.30)$$

et donc d'après (1.28), en introduisant pour chaque espèce  $\alpha$  sa fréquence plasma  $\omega_{p\alpha} = \sqrt{q_{\alpha}^2 n_{\alpha} / m_{\alpha} \varepsilon_0}$  :

$$\chi_L(k, \omega) = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{\alpha 0} dv}{\omega - kv} \quad (1.31)$$

où on a normalisé  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha 0} dv$  à 1.

Comme chaque espèce de particule du plasma contribue indépendamment à la densité, on peut définir la susceptibilité longitudinale de chaque espèce simplement par :

$$\chi_{L\alpha}(k, \omega) = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{\alpha 0} dv}{\omega - kv} \quad (1.32)$$

En portant (1.30) dans (1.29) qui décrit le champ électrique engendré par des excitations extérieures, on a :

$$\epsilon_L(k, \omega) E_1 = \frac{\rho_{\text{exc}}}{ik\epsilon_0} \equiv E_{\text{exc}} \quad (1.33)$$

où

$$\epsilon_L(k, \omega) = 1 + \chi_L(k, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \chi_{L\alpha}(k, \omega) \quad (1.34)$$

est la **permittivité longitudinale** du plasma.

L'équation (1.33) montre que, comme dans un diélectrique<sup>12</sup> ordinaire, la permittivité  $\epsilon_L(k, \omega)$  tend à faire «écran» au champ d'excitation extérieur  $E_{\text{exc}}$ . Mais la permittivité d'un plasma n'est pas une constante, elle varie avec  $k$  et  $\omega$ , ce qui se traduit par le fait que le plasma est un milieu dispersif, temporellement et spatialement. Autrement dit,  $\epsilon_L(k, \omega)$  agit comme un «écran dynamique» vis-à-vis du champ d'excitation.

### Ondes longitudinales électrostatiques

L'étude de la dynamique non collisionnelle à une dimension qui précède peut aussi s'appliquer dans un plasma réel (à trois dimensions) à condition de se restreindre à des fonctions de distributions d'équilibre **isotropes**, c'est-à-dire telle que  $f_{\alpha 0}(\vec{v}) = f_{\alpha 0}(v^2)$  et restreindre l'espace  $(\vec{k}, \omega)$  aux seules ondes longitudinales électrostatiques, c'est-à-dire telles que  $\vec{k} \parallel \vec{E}_1$ . Puisque  $\vec{v}$  et  $\vec{k}$  ont des directions relatives arbitraires, on note  $v_k$  la composante de  $\vec{v}$  parallèle à  $\vec{k}$  et on introduit les fonctions de distribution scalaires réduites :

$$F_{\alpha 0}(v_k) = \int f_{\alpha 0}(\vec{v}) d^2 v_{k\perp} = \int f_{\alpha 0}(\vec{v}) \delta\left(v_k - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{k}\right) d^3 v$$

A condition d'y remplacer  $f_{\alpha 0}$  par  $F_{\alpha 0}$  et  $v$  par  $v_k$ , les équations (1.32) à (1.34) rendent aussi compte de la «réponse» (susceptibilité et permittivité) d'un volume de plasma isotrope à des excitations longitudinales électrostatiques.

### Ondes électrostatiques dans un plasma maxwellien

Quand les fonctions de distribution d'équilibre des particules du plasma sont maxwelliennes, on peut obtenir des expressions analytiques explicites de la relation de dispersion des ondes faiblement amorties<sup>13</sup>. Les ondes électrostatiques dans un plasma non magnétisé ou peu magnétisé comme le vent solaire peuvent être séparées en deux familles : les ondes de hautes fréquences (près de la fréquence plasma des électrons) -celles qui vont nous intéresser ici- appelées ondes de plasma électroniques (ou oscillation de plasma, ou ondes de Langmuir) pour lesquelles le mouvement des ions est négligeable ; les ondes de basse fréquences (sous la fréquence plasma des ions), appelées ondes acoustiques ioniques ou pseudo-sonores.

On va donc négliger le mouvement des ions et on a seulement besoin de considérer la fonction de distribution à l'équilibre  $f_{0e}$  des électrons. Dans le cas réduit à une dimension, on aura :

$$f_{0e}(v) = \frac{\exp(-v^2/v_{th}^2)}{\sqrt{\pi}v_{th}} \quad (1.35)$$

<sup>12</sup>c'est pourquoi on parle aussi pour  $\epsilon_L$  de *fonction diélectrique* du plasma

<sup>13</sup>notons que les modes faiblement amortis se caractérisent par une fréquence complexe de partie imaginaire négative ou nulle (sinon il y a instabilité) et telle que  $|\omega_{im}| \ll |\omega_{re}|$

où  $v_{th} = \sqrt{2K_B T/m_e}$  est la **vitesse thermique** des électrons,  $T$  leur température et  $m_e$  la masse de l'électron. La permittivité longitudinale électronique s'écrit alors, en utilisant<sup>14</sup> les équations (1.32) et (1.34) :

$$\epsilon_L(k, \omega) = 1 + \frac{1 - \Phi(z) + i\sqrt{\pi}ze^{-z^2}}{k^2 L_D^2} \quad (1.36)$$

$$\Phi(z) = 2ze^{-z^2} \int_0^z dt e^{t^2} \quad (1.37)$$

avec  $z = \omega/(kv_{th})$  et  $L_D$  la longueur de Debye électronique déjà définie mais que l'on peut exprimer simplement en fonction de  $v_{th}$  et de la fréquence plasma  $\omega_p = 2\pi f_p$  des électrons par :  $L_D = v_{th}/(\sqrt{2}\omega_p)$

### 1.2.3 L'impédance d'antenne et l'expression du bruit thermique

Revenons à notre antenne électrique immergée dans un plasma : L'équation 1.33 et la permittivité permet de décrire les fluctuations électrostatiques du plasma près de la fréquence plasma, lesquelles vont induire des courants dans l'antenne obéissant à la loi d'Ohm, ce qu'on peut décrire formellement par l'intermédiaire d'une **impédance d'antenne** complexe  $Z(\omega)$  telle que  $dE = ZdJ$ , ce qui donne, dans un plasma isotrope

$$Z = \frac{1}{-i(2\pi)^3 \epsilon_0 \omega} \int d^3k \left| \frac{\vec{k} \cdot \vec{J}(\vec{k})}{k} \right|^2 \frac{1}{\epsilon_L(\vec{k}, \omega)} = \frac{4i}{\pi^2 \epsilon_0 \omega} \int_0^\infty dk \frac{F(k)}{\epsilon_L(k, \omega)} \quad (1.38)$$

où  $F(k)$  est une des réponses d'antenne (1.6) ou (1.7) définies section 1.2.1.

Finalement, dans un plasma à l'équilibre thermique à la température  $T$ , la puissance spectrale collectée par l'antenne d'impédance  $Z$  est :

$$V_\omega^2 = 4K_B T \text{Re}(Z(\omega)) \quad (1.39)$$

Ce qui, compte-tenu des équations 1.36, 1.37 et 1.38 s'écrit :

$$V_\omega^2 = \frac{16k_B T}{\pi^2 \epsilon_0 \omega} \int_0^\infty \frac{F(k) \text{Im}(\epsilon_L) dk}{|\epsilon_L|^2} \quad (1.40)$$

$$= \frac{8\sqrt{2}m_e K_B}{\pi^{3/2} \epsilon_0} \sqrt{T} \int_0^\infty \frac{F(uL/L_D) e^{-z^2} u du}{[u^2 + 1 - \phi(z)]^2 + \pi z^2 e^{-2z^2}} \quad (1.41)$$

où on a effectué le changement de variable  $u = kL_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{\omega_p} \frac{1}{z}$ .

En unités SI, cela donne :

$$V_\omega^2 \simeq 8.138 \cdot 10^{-16} \sqrt{T} \int_0^\infty \frac{F(uL/L_D) e^{-z^2} u du}{[u^2 + 1 - \phi(z)]^2 + \pi z^2 e^{-2z^2}} \quad (1.42)$$

où la puissance  $V_\omega^2$  est donc exprimée en  $V^2/\text{Hz}$  et la température  $T$  du plasma est exprimée en degrés Kelvin, l'intégrale  $I$  de (1.42) ne dépendant que des rapports  $\omega/\omega_p$  et  $L/L_D$ . La difficulté du calcul numérique de cette intégrale réside essentiellement dans l'existence, lorsque  $\omega/\omega_p \geq 1$ , de quasi pôles  $u_p$  qui vérifient  $u_p^2 + 1 - \phi(z_p) = 0$ . En approximant  $\phi$  au second ordre en  $1/z^2$ , on obtient l'approximation de  $u_p$  suivante (valable pour  $u_p \ll 1$  soit  $\omega \sim \omega_p$ ) :  $u_p = \sqrt{\frac{\omega^2/\omega_p^2 - 1}{3}}$  et en intégrant par résidu, on obtient la contribution  $I_p$  à l'intégrale  $I$  suivante :

$$I_p = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{F(u_p L/L_D)}{u_p \omega/\omega_p} \quad (1.43)$$

<sup>14</sup>poser  $x = v/v_{th}$  et calculer sur un contour entourant  $z$  (dit contour de Landau) le prolongement analytique, dans le demi-plan complexe ( $\omega_{re}, \omega_{im}$ ) des ondes stables, de la fonction  $1/\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)/(x-z) dx$ , dite *fonction de dispersion des plasmas*

### Capacité de base du satellite et capacité d'antenne

Jusqu'ici, on s'est seulement préoccupé de calculer la ddp qui devrait être mesuré aux bornes d'une antenne immergée dans un plasma : bien entendu cette mesure ne peut être faite que si l'antenne est connectée à un récepteur (généralement équipé d'un amplificateur), lequel est monté sur une sonde spatiale. Du point de vue de l'expérimentateur, tout cet équipage peut être considéré comme un circuit d'impédance finie  $Z_S$  mis en parallèle aux bornes de l'antenne d'impédance  $Z$ . La puissance spectrale réellement mesurée  $V_R^2$  est alors :

$$V_R^2 = V^2 \frac{|Z_S|^2}{|Z_S + Z|^2} \quad (1.44)$$

Si la mesure est correctement calibrée et si l'instrument est bien isolé (sans influence électromagnétique extérieure)  $Z_S$  est équivalente à une capacitance  $Z_S = 1/C_b\omega$ , où  $C_b$  est la capacité de base de l'instrument (qui est en principe connue avant le lancement du satellite). En notant  $C_a = 1/\text{Im}(Z)\omega$  la capacité de l'antenne, (1.44) devient

$$V_R^2(\omega) = V_\omega^2 \frac{C_a^2}{(C_a + C_b)^2} = V_\omega^2 / \Gamma_\omega^2 \quad (1.45)$$

En principe, on peut déduire la valeur exacte de  $C_a$  de l'équation (1.38), ce qui donne :

$$\frac{1}{C_a} = \frac{4}{\pi^2 \varepsilon_0 L_D} \int_0^\infty \frac{F(k) \text{Re}(\epsilon_L) dk}{|\epsilon_L|^2} \quad (1.46)$$

$$= \frac{4}{\pi^2 \varepsilon_0 L_D} \int_0^\infty \frac{F(uL/L_D)[u^2 + 1 - \phi(z)]u^2 du}{[u^2 + 1 - \phi(z)]^2 + \pi z^2 e^{-2z^2}} \quad (1.47)$$

Mais le calcul numérique de cette intégrale est assez coûteux, d'autant qu'elle prend l'essentiel de sa valeur pour  $k \gg 1$  et il faut donc prendre en compte dans le calcul de la réponse  $F$  (Eqs 1.6 et 1.7) le terme dépendant du rayon  $a$  de l'antenne que l'on pouvait négliger lors du calcul de la résistance  $\text{Re}(Z)$ . On peut vérifier en réalisant ce calcul que la capacité d'antenne varie en réalité très peu avec la fréquence, excepté très près de la fréquence plasma et peu être avantageusement modélisée par une fonction en marche d'escalier de part et d'autre de la fréquence plasma définie comme suit :

- Pour  $\omega < \omega_p$ , la capacité de l'antenne est celle d'un cylindre conducteur de rayon  $a$ , de longueur  $L$  entouré d'une gaine de Debye de rayon  $L_D$ , ce qui donne

$$C_a = \frac{\pi \varepsilon_0 L}{\ln(L_D/a)} \quad (1.48)$$

- Pour  $\omega > \omega_p$ , la capacité de l'antenne est celle d'un cylindre conducteur de rayon  $a$ , de longueur  $L$  dans le vide, soit :

$$C_a = \frac{\pi \varepsilon_0 L}{\ln(L/a) - 1} \quad (1.49)$$

### La prise en compte d'une population d'électrons suprathermiques

Lorsqu'on modélise le bruit thermique avec les approximations faites auparavant et qu'on confronte ce modèle avec par exemple un spectre radio acquis par Ulysse dans le vent solaire -fig. 1.5-, on voit sur la figure que :

1. le niveau de bruit est mal modélisé en basse fréquence ( $\ll \omega_p$ ), ce qui est dû à la fois à la non prise en compte du **bruit d'impact** des particules sur l'antenne et surtout du bruit thermique des protons décalé Doppler par la vitesse d'expansion du vent solaire (de l'ordre de 400 km/s dans l'Écliptique). Pour ce dernier, nous renvoyons le lecteur intéressé à [1]<sup>15</sup>. Pour le bruit d'impact, on peut l'estimer (en

<sup>15</sup> *Quasi-thermal noise in a drifting plasma : Theory and application to solar wind diagnostic on Ulysses*, K. Issautier et al., *Journal of Geophysical Research*, Vol.104, pp 6691-6704, 1999.

considérant que les processus de charge de l'antenne sont uniquement les impacts d'électrons et d'ions et les émissions photo-électroniques) par  $V_I^2 = 2e^2\tau_e|Z|^2$  où  $\tau_e$  est le taux d'impact des électrons sur la surface d'un d'antenne (d'un brin ou d'une boule). Ce taux est donné par  $\tau_e = 1/\sqrt{4\pi n_e v_{th} S}$  où  $S$  est la surface soit du brin soit de la boule formant l'antenne. Pour une antenne brin comme celle d'Ulysse, avec  $L \gg L_D$  et  $\omega/\omega_p < 1$  (sinon c'est complètement négligeable) on peut en donner l'approximation suivante :

$$V_I^2 = V^2 4a \frac{[\ln(L_D/a)]^2}{\pi^2 L_D (\omega/\omega_p)^2} \quad (1.50)$$

On voit sur la figure 1.5 que cette contribution du bruit d'impact est de toutes façons insuffisante pour rendre compte de l'accroissement du bruit mesuré vers les basses fréquences, lequel est en fait dominé par le bruit décalé Doppler des protons.

- le niveau de bruit est mal modélisé pour les fréquences supérieures à  $\omega_p$ , ce qui est dû à la non prise en compte d'une composante d'électrons «chauds» (ou suprathermiques ou de halo) dans le vent solaire (environ 5% d'électrons 10 fois plus chauds). Nous avons en principe les outils pour calculer la contribution de cette population : il suffit en effet d'utiliser l'équation 1.34 pour calculer la permittivité en tenant compte de deux populations maxwelliennes d'électrons (core + halo) au lieu d'une. Néanmoins ce calcul double le nombre d'intégrations et les difficultés numériques, sans changer la nature de ces difficultés. Dans le cadre de notre projet qui doit nous amener à ajuster le modèle aux mesures d'Ulysse par la méthode de Levenberg-Marquardt, ce calcul double aussi le nombre de paramètres à ajuster : c'est pourquoi nous allons utiliser une astuce pour tenir compte de ces électrons chauds et maintenir ainsi le nombre de paramètres à trois : la densité, la température et un paramètre «rendant-compte» de la présence des chauds. L'astuce repose sur la remarque suivante : les électrons chauds ne modifient que très peu les grandeurs caractéristiques du plasma telles que la fréquence plasma ou la longueur de Debye (donc la densité et la température), par contre leur présence modifie fortement l'équation de dispersion du plasma  $\epsilon_L = 0$ , c'est-à-dire surtout la position du pôle  $u_p$  intervenant dans le calcul de l'intégrale  $I_p$  (Eq.1.43). On va faire l'hypothèse (purement ad-hoc et un peu fausse) que les chauds n'interviennent que de cette façon dans le bruit, et l'on va introduire un «facteur de déplacement»  $\tau > 1$  du pôle  $u_p$  qui modifiera simplement la contribution de l'intégrale  $I_p$  de sorte que :

$$I_p = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{F(\tau u_p L/L_D)}{(\omega/\omega_p)^{1/\tau^2} \sqrt{\omega^2/\omega_p^2 - 1}} \quad (1.51)$$

On ajustera ce paramètre  $\tau$  en même temps que la densité et la température, mais on se gardera d'en donner une interprétation physique.

Pour résumer et conclure, le bruit thermique modélisé aux bornes de l'antenne aura, avec les notation qui précèdent, l'expression suivante :

$$V_R^2(\omega) = \frac{8.138 \cdot 10^{-16} \sqrt{T}}{\Gamma^2} \left[ \int_{u_p}^{\infty} \frac{F(uL/L_D) e^{-z^2} u du}{[u^2 + 1 - \phi(z)]^2 + \pi z^2 e^{-2z^2}} + I_p \right] + V_I^2 \quad (1.52)$$

### 1.2.4 Variation du modèle par rapport aux paramètres à ajuster

Pour mettre en œuvre la méthode de Levenberg-Marquardt -qui recherche le minimum du  $\chi^2$  par ajustement de paramètres choisis- il est nécessaire de savoir calculer les dérivées partielles du modèle par rapport aux paramètres à ajuster -ici  $f_p$ ,  $T$  et  $\tau$ . Ces calculs sont sans mystère mais fastidieux <sup>16</sup> et consistent à dériver par rapport à chacun des paramètres d'ajustement l'expression (1.52) (en négligeant ici le bruit d'impact

<sup>16</sup>c'est un cas où on peut se faire aider par un progiciel de calcul symbolique

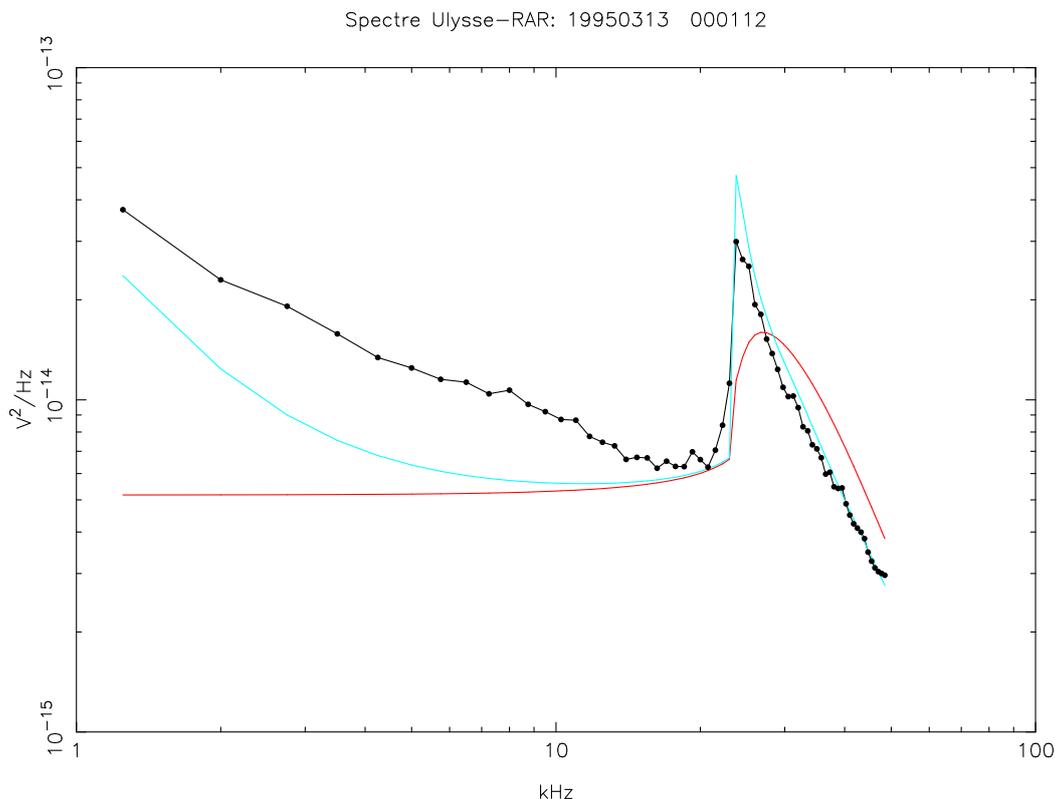


FIG. 1.5 – Spectre basse fréquence obtenu par Ulysse dans le vent solaire. Les points reliés par des lignes blanches sont les mesures en  $V^2/\text{Hz}$  de la puissance collectée par l'antenne S pour chacun des 64 paliers de fréquence. La courbe rouge est un modèle de spectre calculé pour  $f_p = 23\text{kHz}$  et  $T = 80000\text{K}$ , tenant compte de la capacitance de l'instrument, mais calculé sans tenir compte ni du bruit d'impact ( $f < f_p$ ), ni de la présence d'un halo d'électrons chauds ( $f > f_p$ ). La courbe bleue en tient compte comme expliqué ci-dessus (NB : aucun modèle représenté ici ne tient compte du bruit protonique décalé Doppler)

$V_I^2$  puisqu'on ne modélise de toutes façons pas le bruit des protons qui est dominant aux basses fréquences)<sup>17</sup>. Par rapport à la température  $T$  des électrons, on obtient :

$$\frac{\partial V_R^2}{\partial T} = \frac{8.138 \cdot 10^{-16}}{2\sqrt{T}\Gamma^2} \left( I \left( 1 - \frac{4T}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial T} \right) - \frac{L}{L_D} \left[ \int_{u_p}^{\infty} \frac{F'(uL/L_D) e^{-z^2} u^2 du}{[u^2 + 1 - \phi(z)]^2 + \pi z^2 e^{-2z^2}} + \sqrt{\frac{\pi}{18}} \frac{\tau F'(\tau u_p L/L_D)}{(\omega/\omega_p)^{1/\tau^2}} \right] \right) \quad (1.53)$$

avec ici :

-si  $\omega \leq \omega_p$  :  $u_p \equiv 0$  et  $\partial \Gamma / \partial T = C_b / 2\pi \epsilon_0 L T$

-si  $\omega > \omega_p$  :  $u_p = \sqrt{(\omega^2/\omega_p^2 - 1)/3}$  et  $\partial \Gamma / \partial T \equiv 0$ ,

et où  $F'$  désigne la dérivée de la réponse d'antenne  $F$  ; dans le cas d'une antenne filaire, on aura :

$$F'_{\text{fil}}(u) = \frac{2 \sin^4(u/2)}{u^3} - \frac{F_{\text{fil}}(u)}{u} \quad (1.54)$$

<sup>17</sup>en particulier on n'ajustera ce modèle aux spectres radio d'Ulysse qu'à partir des fréquences  $> 0.8f_p$

Par rapport au paramètre ad-hoc  $\tau$ , on aura :

$$\frac{\partial V_R^2}{\partial \tau} = \frac{8.138 \cdot 10^{-16} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{T}}{\Gamma^2(\omega/\omega_p)^{1/\tau^2} \sqrt{\omega^2/\omega_p^2 - 1}} \left[ \frac{L}{L_D} u_p F'(\tau u_p \frac{L}{L_D}) + \frac{2 \ln(\omega/\omega_p)}{\tau^3} F(\tau u_p \frac{L}{L_D}) \right] \quad (1.55)$$

avec les mêmes conditions vis-à-vis du rapport  $\omega/\omega_p$  qu'en (1.53).

Enfin, pour dériver (1.52) par rapport à  $f_p$ , le calcul explicite est difficile et coûteux (mêmes difficultés que pour le calcul de capacitance). On utilisera donc une méthode de dérivation numérique, telle que la méthode de Ridders-Richardson, ou une interpolation polynomiale suivie d'une dérivation algébrique, avec les précautions requises lors du choix du «pas de calcul» dans le premier cas<sup>18</sup>, ou lors du choix judicieux du polynôme d'interpolation dans le second cas<sup>19</sup>.

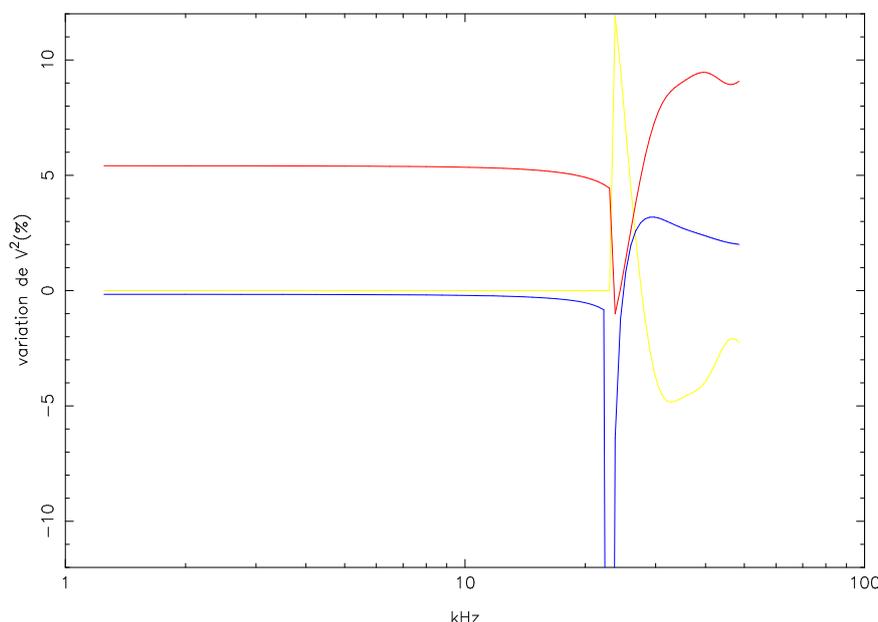


FIG. 1.6 – Variation relative du bruit thermique  $V_R^2(f)$  sur Ulysse obtenue par le calcul des dérivées partielles logarithmiques de  $V_R^2$  par rapport à  $f_p$  (**ligne bleue**),  $T$  (**ligne rouge**) et accessoirement  $\tau$  (ligne jaune). Ces variations sont ici calculées pour les valeurs des paramètres suivantes :  $f_p = 23\text{kHz} \pm 1\%$ ,  $T = 80000\text{K} \pm 10\%$  et  $\tau = 2 \pm 10\%$

<sup>18</sup>précautions qui s'imposent plus généralement à toutes les méthodes de calcul dites «par différences finies».

<sup>19</sup>citons par exemple l'interpolation par un polynôme de Chebyshev, ou l'interpolation cubique spline -utilisée actuellement pour les traitements QTN d'Ulysse au Despa



## Chapitre 2

# Ajustement d'un modèle aux observations

*traduit (très librement et avec morceaux choisis) du Chapitre 15 de «Numerical Recipes»*

### 2.1 Ajustement aux moindres carrés, méthode du $\chi^2$

#### Introduction

Considérons un **modèle** que l'on souhaite ajuster à des **mesures** et qui est défini, pour un jeu de  $M$  paramètres  $a_1, \dots, a_M$  par :

$$y(x) = y(x, a_1, a_2, \dots, a_M) \quad (2.1)$$

Pour réaliser cet ajustement, la première méthode qui vient à l'esprit consiste à minimiser, dans l'espace vectoriel de dimension  $M$  des paramètres ajustables, la **distance métrique** entre le modèle et la mesure ; autrement dit, en supposant qu'on dispose de  $N$  points de mesure, il s'agit de trouver un jeu de paramètres  $a_1, \dots, a_M$  qui minimise la quantité :

$$\sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i, a_1, \dots, a_M)]^2 \quad (2.2)$$

Cette «stratégie» de minimisation de quantités quadratiques s'appelle génériquement la **méthode des moindres carrés**. La mise en œuvre et l'interprétation des résultats obtenus par ces méthodes va varier selon :

- la fonction quadratique<sup>1</sup> que l'on cherche à minimiser (ici le carré de la distance, nous généraliserons ensuite au « $\chi^2$ »)
- la complexité du modèle (nombre de paramètres, dépendance linéaire ou non, ...)
- la qualité et la quantité des mesures disponibles. Si l'on dispose notamment d'un nombre de mesures statistiquement suffisant (ce qui est fréquent dans les expériences spatiales), on peut alors étudier la distribution statistique des écarts modèle/mesures et, comme on va le voir, définir la **vraisemblance statistique** d'un modèle ajusté par les moindres carrés.

#### Moindres carrés et loi de distribution normale :

On cherche donc à établir une relation entre un modèle (i.e. un jeu de paramètres) ajusté par une méthode des moindres carrés et la **vraisemblance** -à définir- de ce modèle. Remarquons tout d'abord qu'il est dénué de sens de se demander quelle est la probabilité qu'un modèle soit théoriquement correct -simplement parce qu'il n'existe pas un «univers de modèles» dont on pourrait extraire le «vrai». On peut par contre -parce

---

<sup>1</sup>en anglais *merit function*

qu'il existe un univers de mesures possibles dont on extrait des échantillons (en faisant des expériences)- se poser la question suivante : «Étant donné un ensemble de paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_M$  définissant un modèle, quelle est la probabilité de mesurer ce modèle (autrement-dit d'obtenir des données qui coïncident avec ce modèle) ?»

Si l'on ajoute «mesurer exactement» dans la question précédente, il est clair que cette probabilité sera toujours nulle (parce qu'un point dans un espace mesurable est toujours de mesure nulle) ; on ajoutera donc à notre question : «...de mesurer ce modèle avec une certaine tolérance  $\pm\Delta y$  en chaque point de mesure». On définit ainsi la vraisemblance statistique d'un modèle (ou d'un jeu de paramètres) vis-à-vis des mesures comme la probabilité d'obtenir ces mesures lorsque le modèle est choisi (et donc **supposé vrai**). À cet égard, et pour tout ce qui va suivre, **il ne faut en aucun cas utiliser cette vraisemblance -qui est une notion purement statistique- comme preuve de la justesse théorique du modèle.**

On va maintenant calculer cette vraisemblance dans un cas particulier : supposons donc que chaque mesure  $y_i$  soit entachée d'une erreur aléatoire, indépendante d'un point de mesure à l'autre, et distribuée selon une loi normale (gaussienne) relativement au modèle  $y(x)$  supposé vrai. Supposons de plus, pour simplifier, que l'écart-type de cette loi normale soit le même en tous points de la mesure. Dans ce cas, la probabilité d'obtenir un ensemble de  $N$  mesures modélisées  $y(x_i)$  (avec une tolérance sur le modèle  $\pm\Delta y$ ) est le produit des probabilités de l'obtenir en chaque point de mesure, soit :

$$P \propto \prod_{i=1}^N \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{y_i - y(x_i)}{\sigma} \right)^2 \right] \Delta y \right\} \quad (2.3)$$

Remarquons que chercher à rendre cette probabilité maximale revient à minimiser l'opposé de son logarithme, soit à minimiser :

$$\left[ \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{2\sigma^2} \right] - N \log \Delta y \quad (2.4)$$

Comme  $N, \sigma$  et  $\Delta y$  sont tous constants, il est clair que minimiser (2.4) est équivalent à minimiser (2.2). On vient donc de démontrer **qu'il revient au même d'ajuster aux moindres carrés ou d'ajuster au maximum de vraisemblance si les erreurs de mesure sont indépendantes, distribuées normalement par rapport au modèle**, avec un écart-type constant (cette dernière hypothèse pourra être abandonnée lorsqu'on passera au  $\chi^2$ ).

### Erreurs statistiques de mesure et moindres carrés

**Attention**, l'hypothèse de la distribution normale des erreurs de mesure par rapport au modèle (ou des écarts au modèle vrai), invoquée pour considérer l'ajustement aux moindres carrés comme l'estimation ayant le maximum de vraisemblance, est en fait **assez forte**, difficilement vérifiable (puisque l'on ne connaît pas le «vrai» modèle), et de fait souvent non vérifiée. Il est bien connu (voir ouvrages de statistique) que lorsqu'on considère une distribution normale d'écart-type  $\sigma$  autour d'une valeur moyenne, 68% des mesures doivent se trouver à  $\pm\sigma$ , 95% à  $\pm 2\sigma$ , 99.7% à  $\pm 3\sigma$ , etc... Cela nous est habituel et peut sembler modérément exigeant mais, avec une telle distribution, on attendra par exemple une mesure en dehors de  $\pm 20\sigma$  toutes les  $2 \times 10^{88}$  mesures, c'est-à-dire jamais ! Or chacun sait que ces points à  $\pm 20\sigma$  existent parfois, même dans les meilleures conditions d'observation. Ces points de mesure aberrants (*outliers*) peuvent rendre un ajustement aux moindres carrés complètement idiot : leur probabilité est si infime dans la loi normale que le résultat d'un ajustement aux moindres carrés (donc au maximum de vraisemblance) sera grandement modifié par la présence d'un seul de ces points.

Dans certains cas, l'écart à la distribution normale est bien compris ou du moins bien connu : par exemple dans les mesures obtenues par comptage d'événements, les erreurs suivent généralement une distribution de Poisson, qui tend vers une gaussienne lorsque le nombre d'événements devient grand. Mais cette convergence n'est pas uniforme : pour un nombre d'événements donné, les queues des deux distributions diffèrent

plus que les cœurs. Autrement-dit la gaussienne prédit beaucoup moins d'événements marginaux que la distribution de Poisson, si bien que, lorsqu'on ajuste un modèle par la méthode des moindres carrés sur ce type de mesures, les événements marginaux pèsent beaucoup trop sur le résultat. Lorsque la distribution des erreurs n'est pas normale, ou encore lorsqu'on ne peut éviter les points aberrants (traitement en temps réel par exemple), on a recours à des méthodes statistiques particulières, dites **méthodes robustes**. Nous ne les aborderons pas ici mais il est important de garder en mémoire que **les méthodes d'ajustement aux moindres carrés que nous présentons ici, très utiles et très utilisées, supposent toutes que les écarts au modèle soient distribués selon une loi normale**.

Remarquons pour finir que la discussion qui précède ne concerne que les erreurs statistiques. Les mesures peuvent aussi être entachées **d'erreurs systématiques**, i.e. non aléatoires et qui ne disparaissent pas par moyenne statistique. Ces erreurs nécessitent des traitements au cas par cas ; elles peuvent provenir simplement de phénomènes physiques non compris (ou non pris en compte dans le modèle, ce qui revient au même), ou de problèmes instrumentaux (parasites, pollution par des instruments voisins, mauvaise calibration, etc. . .).

### Un ajustement prenant en compte les erreurs de mesure en chaque point : le moindre $\chi^2$

L'ajustement au moindre  $\chi^2$  ou **méthode du chi-carré** va consister à minimiser la quantité suivante :

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - y(x_i, a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (2.5)$$

où les  $\sigma_i$  sont les incertitudes connues sur chaque point de mesure  $y_i(x_i)$ . Comme précédemment, on peut définir la vraisemblance d'un modèle en remplaçant simplement  $\sigma$  par chaque  $\sigma_i$  dans (2.3), comme dans (2.4). Si les erreurs sont, en chaque point de mesure, distribuées normalement, l'ajustement au moindre  $\chi^2$  sera aussi celui du maximum de vraisemblance.

Si les erreurs sont distribuées normalement sur  $N$  points de mesure et que de plus le modèle est linéaire par rapport aux  $M$  paramètres  $a_1, \dots, a_M$ , on montre que la probabilité, sur l'espace des mesures possibles, pour que le chi-carré<sup>2</sup> d'un modèle supposé vrai soit supérieur à une valeur donnée  $\chi^2$  est

$$Q = 1 - P \left( \frac{N - M}{2}, \frac{\chi^2}{2} \right) \quad (2.6)$$

où  $P$  est donc la probabilité que le chi-carré du modèle supposé vrai soit inférieur à  $\chi^2$ , ce qui s'exprime au moyen d'une fonction dite *gamma incomplète* comme suit :

$$P(\nu, x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x e^{-t} t^{\nu-1} dt \quad (2.7)$$

En résumé plus  $P$  est proche de 0 (ou  $Q$  proche de 1), plus il est improbable de trouver un chi-square inférieur à  $\chi^2$ . On admettra (et c'est habituellement «pas trop faux») que ce calcul de probabilité demeure valable pour des modèles non-linéaires par rapport aux paramètres d'ajustement.

Calculée pour le moindre  $\chi^2$ , cette probabilité  $Q$  donne un critère de confiance dans l'ajustement : plus  $Q$  est grande et plus l'ajustement obtenu **ne peut** être considéré comme fortuit (i.e. purement aléatoire). Si  $Q$  est très petite, alors l'ajustement pose problème, soit parce que le modèle est mauvais, soit parce que les erreurs de mesure sont sous-estimées, soit encore parce qu'il y a trop de points aberrants par rapport à la distribution normale (mais attention, une probabilité  $Q$  suffisamment grande ne prouve pas pour autant que la distribution des erreurs soit normale, puisqu'on l'a supposée telle pour pouvoir calculer cette  $Q$  -et la

<sup>2</sup>on parle alors de *chi-carré pour  $N - M$  degrés de liberté*

présence de points aberrants n'est qu'une façon, parmi une infinité d'autres, d'avoir affaire à une distribution non normale).

A l'inverse,  $Q$  est quelquefois trop proche de 1, c'est-à-dire que l'ajustement est en quelque sorte «trop beau pour être vrai». Le modèle est peut-être génial mais il arrive souvent que dans ce cas l'expérimentateur ait, par excès de prudence, surestimé les barres d'erreurs ; aussi, avant de considérer un modèle comme parfait (tous les modèles le sont à une grande incertitude près !), il convient de revenir sur l'établissement de l'erreur  $\sigma_i$  en chaque point de mesure (plus rarement, il peut s'agir d'une manipulation frauduleuse des données). Notons pour finir sur le  $Q$  que ses valeurs utiles (i.e. avec  $\nu$  demi-entier) sont fréquemment tabulées dans les ouvrages traitant de statistique (on en donnera quelques valeurs pratiques dans les sections suivantes). Néanmoins, en l'absence de ces tables ou d'un code calculant (2.7), donnons un critère<sup>3</sup> «vite fait» pour apprécier la qualité d'un ajustement au moindre  $\chi^2$  : **l'ajustement sera acceptable dès lors que  $\chi^2 \approx N - M$ .**

Enfin, il arrive que les incertitudes  $\sigma_i$  sur les mesures ne soient pas connues, ce qui imposera un ajustement aux moindres carrés classique, mais il est néanmoins utile d'estimer un écart-type  $\sigma$  sur ces mesures. Les considérations précédentes relatives au  $\chi^2$  peuvent permettre d'estimer cette valeur : il suffit de rechercher le moindre  $\chi^2$  en assignant une erreur arbitraire constante en chaque point de mesure et de déduire du modèle obtenu  $y(x)$  l'écart-type  $\sigma$  en calculant la variance du système modèle/mesures à  $N - M$  degrés de liberté, soit

$$\sigma^2 = \frac{1}{N - M} \sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2 \quad (2.8)$$

Bien entendu, il est exclu de calculer en retour un critère de confiance de l'ajustement au  $\chi^2$ , mais cette approche permet simplement d'attribuer une barre d'erreur à des mesures qui en manquent, au moyen de l'étude statistique des écarts entre les mesures et un modèle ajusté aux moindres carrés.

## 2.2 Modèles linéaires et moindres carrés

### 2.2.1 Régression linéaire

La terminologie «régression linéaire» est historique et provient des premiers travaux statistiques en sciences sociales. En théorie, il s'agit de déterminer la droite du plan affine qui s'ajuste au mieux à un ensemble de  $N$  points de mesure  $y_i(x_i)$ . Autrement dit, en supposant que les erreurs de mesures sont distribuées normalement par rapport à une droite, on cherchera à ajuster au moindre  $\chi^2$  le modèle linéaire à 2 paramètres  $(a, b) : y(x) = ax + b$ , où  $a$  est donc la pente et  $b$  l'ordonnée à l'origine de la droite recherchée (dite de régression). L'expression du  $\chi^2$  se réduit dans ce cas à

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i} \right)^2 \quad (2.9)$$

et le  $\chi^2$  sera minimum lorsque ses dérivées partielles par rapport à  $a$  et  $b$  seront nulles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i(y_i - ax_i - b)}{\sigma_i^2} = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

<sup>3</sup>un critère un peu plus précis est : si la moyenne du  $\chi^2$  est  $N - M$  et son écart-type  $\sqrt{2(N - M)}$

en posant génériquement pour tout couple de  $N$ -uplet  $\bar{x}, \bar{y}$

$$S_{\bar{x}\bar{y}} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \quad (2.11)$$

et en posant, pour simplifier les notations,  $S = S_{\bar{1}\bar{1}}, S_{\bar{x}} = S_{\bar{x}\bar{1}}$ , le système (2.10) s'écrit

$$\begin{aligned} a S_{\bar{x}\bar{x}} + b S_{\bar{x}} &= S_{\bar{x}\bar{y}} \\ a S_{\bar{x}} + b S &= S_{\bar{y}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

et posant  $\Delta = S S_{\bar{x}\bar{x}} - (S_{\bar{x}})^2$ , la solution de (2.10) est :

$$\begin{aligned} a &= \frac{S S_{\bar{x}\bar{y}} - S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}}{\Delta} \\ b &= \frac{S_{\bar{x}\bar{x}} S_{\bar{y}} - S_{\bar{x}} S_{\bar{x}\bar{y}}}{\Delta} \end{aligned} \quad (2.13)$$

### Incertitudes sur les paramètres de régression, confiance

L'équation (2.13) nous donne donc la pente  $a$  et l'ordonnée à l'origine  $b$  de la droite de régression, mais il nous reste maintenant à estimer les incertitudes sur ces paramètres ajustés, puisque l'existence d'erreurs sur les mesures doit évidemment introduire une incertitude sur la détermination de  $a$  et  $b$  (notons au passage que cette question se posera dans tous les problèmes d'ajustement, et ceci quel que soit le nombre de paramètres ajustés et que le modèle en dépende linéairement ou non). Puisque les mesures d'un point à un autre sont indépendantes et que la variance de toute fonction  $f$  définie sur  $N$  mesures indépendantes vérifie la relation :

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2 \quad (2.14)$$

on pourra appliquer cette relation aux paramètres  $a$  et  $b$ .

En calculant les dérivées partielles de  $a$  et  $b$  par rapport à  $y_i$  grâce à (2.13), on en déduit finalement

$$\sigma_a^2 = S/\Delta \quad (2.15)$$

$$\sigma_b^2 = S_{\bar{x}\bar{x}}/\Delta \quad (2.16)$$

Nous n'avons pas tout-à-fait terminé : nous devons estimer la critère de confiance de l'ajustement donné par l'équation (2.6), qui dans ce cas va indiquer la probabilité que la droite de régression obtenue n'est pas fortuite et se réduit à

$$Q = 1 - P \left( \frac{N-2}{2}, \frac{\chi^2}{2} \right) \quad (2.17)$$

Donnons pour ce critère quelques limites empiriques mais pratiques : si  $Q$  est plus grand que 0.1, l'ajustement est crédible ; si  $Q$  est plus grand que -disons 0.001-, il faut voir : l'ajustement est peut-être acceptable si les erreurs ont été modérément sous-estimées ou peut-être suffit-il d'exclure quelques points aberrants. Enfin, si  $Q < 0.001$ , soit un modèle de régression est inadapté, soit il faut avoir recours à une méthode robuste mais pas à un ajustement aux moindres carrés (ce sera notamment le cas s'il y a beaucoup de points aberrants).

### Régression linéaire avec rectangles d'erreur.

Non traité cette année (mais très utile -voir en attendant pp 660-664 de *Numerical Recipes*)

### 2.2.2 Modèles linéaires à $M$ paramètres

Une généralisation immédiate de la régression linéaire, consiste à considérer, au lieu d'une simple droite affine  $y = ax + b$ , un modèle formé d'une combinaison linéaire de  $M$  fonctions de  $x$ . Par exemple, ces fonctions peuvent être  $1, x, x^2, \dots, x^{M-1}$ , auquel cas leur combinaison linéaire sont les polynômes de degré  $M - 1$ . La forme générale de ces modèles est

$$y(x) = \sum_{k=1}^M a_k X_k(x) \quad (2.18)$$

où  $X_1, \dots, X_M$  sont des fonctions<sup>4</sup> de  $x$  appelées **fonctions de base**.

Pour ces modèles linéaires on va généraliser tout ce qui a été dit section 2.2.1. Pour commencer, le chi-carré s'écrit dans ce cas :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - \sum_{k=1}^M a_k X_k(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (2.19)$$

D'autre part, et comme dans le cas de la régression, viser le minimum de ce  $\chi^2$  va aboutir à la résolution d'un système linéaire, mais cette fois de  $M$  équations à  $M$  inconnues :  $a_1, \dots, a_M$ . Pour obtenir ce système, il suffit d'écrire que les dérivées partielles du  $\chi^2$  par rapport au paramètres  $(a_1, \dots, a_M)$  (i.e. le gradient du  $\chi^2$ ) s'annulent au minimum, soit :

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[ y_i - \sum_{j=1}^M a_j X_j(x_i) \right] X_k(x_i) = 0, \quad k = 1, \dots, M \quad (2.20)$$

Ces équations sont appelées **système d'équations normales** de la méthode du chi-carré.

Pour mieux formaliser ce système linéaire, il nous faut introduire quelques notations matricielles et vectorielles : soit  $\mathbf{A}$  la matrice  $N \times M$  (dite «matrice modèle») dont les composantes sont définies par :

$$A_{ij} = \frac{X_j(x_i)}{\sigma_i} \quad (2.21)$$

Remarquons que le terme  $\sum_{i=1}^N X_j(x_i) X_k(x_i) / \sigma_i^2$ , qui apparaît lorsqu'on échange l'ordre des sommations dans (2.20), est la composante d'indice  $kj$  d'une matrice carrée  $M \times M$  qui n'est autre que  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ , où  $\mathbf{A}^t$  désigne la transposée de  $\mathbf{A}$ . Définissons aussi un vecteur  $\vec{b}$  à  $N$  composantes par  $b_i = y_i / \sigma_i$  et posons enfin les paramètres à ajuster sous forme d'un vecteur à  $M$  composantes :  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_M)$ . Avec ces notations, le système (2.20) s'écrit :

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{A}) \vec{a} = \mathbf{A}^t \vec{b} \quad (2.22)$$

D'un point de vue numérique, il suffit donc de résoudre le système (2.22) par une méthode bien adaptée<sup>5</sup> mais on préférera une méthode qui calcule explicitement la matrice inverse de la matrice  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$  car, comme on va le voir maintenant, cette matrice  $\mathbf{C} = [\mathbf{A}^t \mathbf{A}]^{-1}$ , dite **matrice de covariance**, va nous permettre d'estimer les incertitudes (les écart-types) sur les paramètres ajustés.

#### Écart-type sur les paramètres ajustés

<sup>4</sup>qui peuvent être sauvagement non-linéaires en  $x$ , le terme linéaire s'appliquant ici à la dépendance du modèle par rapport aux paramètres  $a_k$

<sup>5</sup>par exemple par une factorisation «LU» ou par la méthode de Cholesky puisque  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$  est une matrice définie positive - mais la méthode de Gauss-Jordan aura l'avantage de calculer explicitement la matrice de covariance

En utilisant la matrice de covariance, le système (2.22) s'écrit  $\vec{a} = \mathbf{C}\mathbf{A}^t\vec{b}$ , soit en composantes :

$$a_j = \sum_{k=1}^M C_{jk} \left[ \sum_{i=1}^M \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \right] \quad (2.23)$$

ce qui nous permet de calculer les dérivées partielles d'un paramètre ajusté  $a_j$  par rapport aux  $N$  mesures indépendantes  $y_i$  :

$$\frac{\partial a_j}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^M \frac{C_{jk} X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \quad (2.24)$$

et la relation (2.14) s'écrit dans ce cas

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left( \frac{\partial a_j}{\partial y_i} \right)^2 \quad (2.25)$$

Ce qui aboutit finalement à :

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M C_{jk} C_{jl} \left[ \sum_{i=1}^M \frac{X_k(x_i) X_l(x_i)}{\sigma_i^2} \right] = [\mathbf{C}^2 \mathbf{A}^t \mathbf{A}]_{jj} = C_{jj} \quad (2.26)$$

Autrement dit, les éléments diagonaux de  $\mathbf{C}$  sont les variances -les carrés des écart-types- sur chacun des paramètres ajustés  $a_j$ . Les éléments non-diagonaux  $C_{jk, j \neq k}$  sont les covariances entre les paramètres  $a_j$  et  $a_k$  et permettent d'apprécier l'ajustement par rapport aux variations *conjointes* des deux paramètres.

## 2.3 Modèles non-linéaires : Méthode de Levenberg-Marquardt.

### Minimisation d'une forme quadratique et d'une forme quelconque

Considérons tout d'abord une fonction scalaire  $f$  quelconque, dépendante de plusieurs variables réelles, c'est-à-dire définie sur un espace affine  $\vec{x}$ , où les coordonnées sont exprimées dans un système d'origine  $\vec{x}_0$ , et écrivons le début du développement de Taylor de  $f$  au voisinage de ce point origine :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) x_i x_j + \dots \\ &\simeq c - \vec{b} \cdot \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x} \mathbf{H} \vec{x} \end{aligned} \quad (2.27)$$

avec  $c \equiv f(\vec{x}_0)$ ,  $\vec{b} \equiv -\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$ , et  $H_{ij} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)$  est appelée la **matrice hessienne** ou **hessien** de  $f$  en  $\vec{x}_0$ .

Lorsque l'approximation (2.27) est exacte, on dit que  $f$  est une forme quadratique ; son gradient s'en déduit immédiatement :

$$\vec{\nabla} f = \mathbf{H}\vec{x} - \vec{b} \quad (2.28)$$

et donc le gradient s'annulera -c'est-à-dire la forme atteindra un extremum- pour une valeur de  $\vec{x}$  solution de :  $\mathbf{H}\vec{x} = \vec{b}$ .

Supposons maintenant que (2.27) soit seulement une (bonne) approximation de la forme  $f$ , on déduit facilement de (2.28) une formule directe pour converger d'un point initial  $\vec{x}_0$  vers un minimum de  $f$  :

$$\vec{x}_{min} = \vec{x}_0 - \mathbf{H}^{-1} \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \quad (2.29)$$

En revanche, il se peut que (2.27) soit une mauvaise approximation de la forme que nous essayons de minimiser. Dans ce cas, tout ce qu'on peut tenter est de se déplacer d'un pas de longueur fixée arbitrairement dans la direction opposée au gradient (méthode des plus fortes pentes ou «steepest descent method»); autrement dit :

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \text{Cte} \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \quad (2.30)$$

### Gradient et Hessien du $\chi^2$

Si un modèle à ajuster est donné, pour un jeu de paramètres  $(a_1, a_2, \dots, a_M) = \vec{a}$  choisis, par  $y = y(x, \vec{a})$ , la valeur de son  $\chi^2$  par rapport à  $N$  mesures  $y_i(x_i)$  est une forme (non forcément quadratique) définie sur l'espace vectoriel de dimension  $M$  des paramètres à ajuster par :

$$\chi^2(\vec{a}) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - y(x_i, \vec{a})}{\sigma_i} \right]^2 \quad (2.31)$$

Les composantes du gradient du  $\chi^2$  sont donc :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i, \vec{a})]}{\sigma_i^2} \frac{\partial y(x_i, \vec{a})}{\partial a_k} \quad (2.32)$$

et le hessien s'en déduit par une dérivation partielle de plus, soit (en négligeant les termes de second ordre dans le modèle  $y$ ) :

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_k \partial a_l} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[ \frac{\partial y(x_i, \vec{a})}{\partial a_k} \frac{\partial y(x_i, \vec{a})}{\partial a_l} \right] \quad (2.33)$$

Pour simplifier les notations, il est utile de poser :  $\beta_k \equiv -\frac{1}{2} \partial \chi^2 / \partial a_k$  et  $\alpha_{kl} \equiv \frac{1}{2} \partial^2 \chi^2 / \partial a_k \partial a_l$ , ou vectoriellement  $\vec{\beta} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \chi^2$  et  $[\alpha] = \frac{1}{2} \mathbf{H}$ . Dans le contexte de l'ajustement aux moindres carrés, cette matrice  $[\alpha]$  est appelée **matrice de courbure**.

Avec ces notations, et en posant  $\delta \vec{a} = \vec{a}_{min} - \vec{a}_0$ , autrement dit  $\delta \vec{a}$  est l'incrément à réaliser sur le jeu de paramètres initial  $\vec{a}_0$  dans le schéma de convergence (2.29), la minimisation d'un  $\chi^2$  supposé quadratique revient à résoudre le système linéaire :

$$[\alpha] \delta \vec{a} = \vec{\beta} \quad (2.34)$$

En revanche, lorsque le  $\chi^2$  est «loin» d'être une forme quadratique, on utilisera la méthode des plus fortes pentes (2.30) qui s'écrit simplement :

$$\delta \vec{a} = \text{Cte} \vec{\beta} \quad (2.35)$$

### Quand changer de méthode pour minimiser le $\chi^2$ ? La stratégie de Levenberg-Marquardt

Levenberg et Marquardt ont proposé une méthode efficace et astucieuse pour passer continûment du schéma d'inversion du hessien à celui des plus fortes pentes. Ce dernier sera utilisé loin du minimum et on tend à lui substituer le schéma d'inversion du hessien au fur et à mesure que l'on approche du minimum. Cette méthode de Levenberg-Marquardt a fait ses preuves et fonctionne remarquablement bien pour des modèles et domaines de la physique fort variés, si bien qu'elle constitue désormais le standard pour résoudre les problèmes d'ajustement aux moindres carrés de modèles non-linéaires.

On peut brièvement décrire la méthode de Levenberg-Marquardt comme une stratégie de recherche du  $\chi^2$  minimum utilisant au mieux les schémas (2.34) et (2.35), et cela grâce à deux idées déterminantes. La première idée aboutit à modifier le schéma des plus fortes pentes (2.35) en remplaçant la constante (le pas) par un vecteur dont on choisit judicieusement les composantes. On peut interpréter ce choix comme une «mise à l'échelle», pour chacun des paramètres, du pas que l'on va effectuer dans la direction du minimum du  $\chi^2$ . On réalise ce choix en remarquant que cette constante de proportion entre une dérivée par rapport à

$a_k$  et une différence finie en  $a_k$  a naturellement la dimension de  $a_k^2$ . Par ailleurs, on postule qu'un ordre de grandeur de cette constante peut être donné par une composante de la matrice de courbure  $[\alpha]$ ; or la seule composante de  $[\alpha]$  dépendante de  $a_k$  qui ait la dimension requise est  $1/\alpha_{kk}$ , et le schéma (2.35) doit donc être modifié pour s'écrire en composantes :

$$\delta a_l = \frac{1}{\lambda \alpha_{ll}} \beta_l \quad (2.36)$$

où  $\lambda$  est un facteur  $> 1$  permettant de réduire globalement (et non composante par composante) le pas si celui-ci s'avérait trop grand (comme cela se fait dans la méthode des plus fortes pentes).

La deuxième idée consiste alors à poser  $[\alpha]' = [\alpha] + \lambda \mathbf{I}_d$ , où  $\mathbf{I}_d$  est la matrice identité  $M \times M$ . Les deux schémas (2.34) et (2.36) sont avantageusement remplacés par l'unique formulation : trouver l'incrémenta-tion  $\delta \vec{a}$  solution du système

$$[\alpha]' \delta \vec{a} = \vec{\beta} \quad (2.37)$$

Lorsque  $\lambda$  est grand, la matrice  $[\alpha]'$  est à diagonale dominante et le système précédent équivaut à (2.36); lorsqu'au contraire  $\lambda$  tend vers 0, ce système équivaut à (2.34).<sup>6</sup>

### Incertitudes sur les paramètres ajustés et matrice de covariance

Lorsqu'on a trouvé un minimum acceptable (voir calcul de confiance section 2.1) du chi-carré pour un jeu de  $M$  paramètres  $\vec{a}_{min}$ , la variation de  $\chi^2$  autour de ce minimum  $\chi_{min}^2$  pour une variation  $\delta \vec{a}$  des paramètres ajustés est donnée par : (en appliquant l'équation (2.27) au  $\chi^2$  et puisque  $\vec{\nabla} \chi^2(\vec{a}_{min}) = 0$ )

$$\chi^2 = \chi_{min}^2 + \delta \vec{a} [\alpha] \delta \vec{a} \quad (2.38)$$

On va s'intéresser en particulier à la variation du  $\chi^2$  lorsqu'on fait arbitrairement varier un seul paramètre  $a_1$ , les autres paramètres restant fixés à leurs valeurs ajustées de  $\vec{a}_{min}$ . Notons  $\chi_{M-1}^2$  le moindre chi-carré à  $M - 1$  degrés de liberté obtenu en fixant le paramètre  $a_1$  à sa valeur arbitraire et soit  $\vec{a}$  le nouveau jeu de paramètres qui minimise ce chi-carré. Posons  $\Delta \chi_1^2 \equiv \chi_{M-1}^2 - \chi_{min}^2$  et  $\delta \vec{a} = \vec{a} - \vec{a}_{min}$  (remarquons qu'aucune des composantes de  $\delta \vec{a}$  n'est nulle *a priori*). On montre que ce  $\Delta \chi_1^2(a_1)$  est distribué comme le carré d'une variable aléatoire à distribution normale<sup>7</sup>. Autrement dit, on aura formellement  $\Delta \chi_1^2 < 1$  pour  $\delta a_1 < 1\sigma$  (68.3% des cas),  $\Delta \chi_1^2 < 4$  pour  $\delta a_1 < 2\sigma$  (95.4% des cas),  $\Delta \chi_1^2 < 9$  pour  $\delta a_1 < 3\sigma$  (99.73% des cas), etc ...

On peut par ailleurs relier l'incertitude  $\delta a_1$  sur le paramètre  $a_1$  à  $\Delta \chi_1^2$  en remarquant que  $\vec{\nabla} \chi^2(\vec{a}) = 0$  sur toutes ses composantes sauf la première, et comme, d'après (2.34)  $[\alpha] \delta \vec{a} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \chi^2$ , on aura, en posant comme en section 2.2.2 la **matrice de covariance**  $\mathbf{C} = [\alpha]^{-1}$ ,

$$\delta a_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi^2}{\partial a_1} \mathbf{C}_{11} \quad (2.39)$$

On déduit de (2.39) et (2.38) :

$$\Delta \chi_1^2 = \delta \vec{a} [\alpha] \delta \vec{a} = (\delta a_1)^2 / \mathbf{C}_{11} \quad (2.40)$$

soit

$$\delta a_1 = \pm \sqrt{\Delta \chi_1^2} \sqrt{\mathbf{C}_{11}} \quad (2.41)$$

et, donc, si l'on définit l'incertitude sur le paramètre  $a_l$  par  $\delta_l \equiv 1\sigma$ , soit  $\Delta \chi_l^2 \equiv 1$ , on aura finalement (comme dans le cas linéaire) :

$$\delta a_l = \sqrt{\mathbf{C}_{ll}} \quad (2.42)$$

<sup>6</sup>Reste à traduire toute cette stratégie numérique sous forme d'un programme efficace, ce qui est par exemple bien fait dans la subroutine (fortran) MRQMIN de *Numerical Recipes*, pp680-682.

<sup>7</sup>on montre plus généralement que si  $\nu$  composantes sont fixées, le  $\Delta \chi_\nu^2 = \chi_{M-\nu}^2 - \chi_{min}^2$  est distribué selon une distribution en chi-carré à  $\nu$  degrés de liberté (et dans le cas étudié ici  $\nu = 1$ )



# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction à la modélisation des milieux continus</b>	<b>1</b>
0.1	Fluides classiques et système de Navier-Stokes . . . . .	1
0.1.1	Introduction . . . . .	1
0.1.2	Cas d'un fluide incompressible : Les équations de Navier-Stokes . . . . .	3
0.1.3	Cas d'un fluide parfait : équations d'Euler . . . . .	3
0.1.4	Linéarisation des équations de Navier-Stokes . . . . .	4
0.1.5	Cas des écoulements stationnaires exemples de problèmes linéaires . . . . .	5
0.2	Transmission de la chaleur dans un fluide . . . . .	8
0.2.1	Introduction . . . . .	8
0.2.2	Conservation de l'énergie . . . . .	8
0.2.3	Lois de comportement thermomécaniques d'un fluide . . . . .	9
0.3	Élasticité linéaire . . . . .	10
0.3.1	Analogie avec la mécanique des fluides . . . . .	10
0.3.2	Élasticité linéaire isotrope ou élasticité classique . . . . .	11
0.3.3	Problèmes stationnaires . . . . .	11
0.4	Introduction à la méthode des éléments finis . . . . .	12
0.4.1	Un exemple simple de problème d'élastostatique . . . . .	12
0.4.2	Formulation variationnelle du problème. . . . .	13
0.4.3	Une méthode des éléments finis appliquée au problème précédent . . . . .	14
<b>1</b>	<b>Introduction à la modélisation des milieux discrets : Le projet «méthodes numériques»</b>	<b>15</b>
1.1	La spectroscopie du bruit thermique . . . . .	15
1.1.1	Bruit thermique mesuré aux bornes d'une antenne immergée dans un plasma en mouvement . . . . .	15
1.1.2	Les mesures spatiales in situ à modéliser : Ulysse dans le vent solaire . . . . .	16
1.2	Le modèle numérique antenne/plasma . . . . .	20
1.2.1	Modéliser la réponse d'antenne . . . . .	20

1.2.2	Modéliser les fluctuations du champ électrique dans un plasma sans collision . . . . .	21
1.2.3	L'impédance d'antenne et l'expression du bruit thermique . . . . .	25
1.2.4	Variation du modèle par rapport aux paramètres à ajuster . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Ajustement d'un modèle aux observations</b>	<b>31</b>
2.1	Ajustement aux moindres carrés, méthode du $\chi^2$ . . . . .	31
2.2	Modèles linéaires et moindres carrés . . . . .	34
2.2.1	Régression linéaire . . . . .	34
2.2.2	Modèles linéaires à M paramètres . . . . .	36
2.3	Modèles non-linéaires : Méthode de Levenberg-Marquardt. . . . .	37