SMD/L1 - Résumé de mécanique du point matériel

(les vecteurs sont en caractères **gras**)

Cinématique

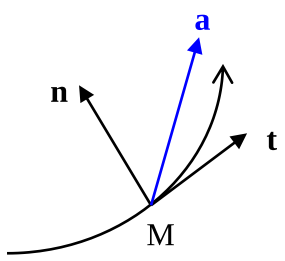
- <u>vitesse</u> **v** d'une particule de masse m située au point M dans un repère d'origine O
  $\mathbf{v} = d\mathbf{OM}/dt$ (unité: m s^{-1})

- <u>quantité de mouvement</u> ou impulsion $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ (unité: kg m s^{-1})

- <u>accélération</u> **a** d'une particule de masse m située au point M dans un repère d'origine O
  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{OM}/dt^2$ (unité: m s^{-2})

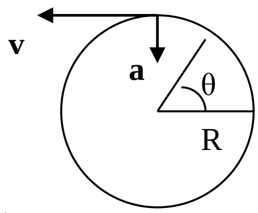
- Dans le repère de Frênet lié à la masse m (repère **t, n** où **t** est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et **n** est le vecteur unitaire normal en M), on a:
  $\mathbf{v} = v\,\mathbf{t}$ (**v** vitesse vectorielle, v vitesse algébrique)
  $\mathbf{a} = (dv/dt)\ \mathbf{t}\ +\ (v^2/R)\ \mathbf{n}$

  R est le rayon de courbure (varie le long de la trajectoire)



- mouvement <u>circulaire</u> de rayon R
  la vitesse angulaire est $d\theta/dt$ (unité: radian s^{-1}) de sorte que
  $\mathbf{v} = R\,(d\theta/dt)\,\mathbf{t}$
  $\mathbf{a} = R\,(d^2\theta/dt^2)\,\mathbf{t}\ +\ R\,(d\theta/dt)^2\ \mathbf{n}$

  exemple: à vitesse angulaire $d\theta/dt = \omega$ = constante (rd s^{-1})
  le vecteur vitesse est $\mathbf{v} = \omega R\,\mathbf{t}$ et en valeur algébrique $v = \omega R$
  *le vecteur accélération **a** est normal au cercle et <u>centripète</u>: $\mathbf{a} = \omega^2 R\,\mathbf{n} = (v^2/R)\,\mathbf{n}$*



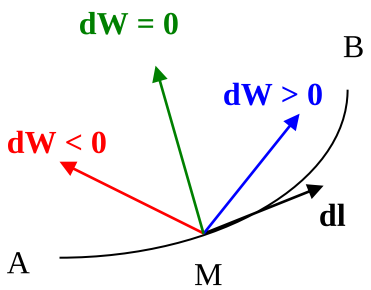
Dynamique

- PFD ou <u>Principe Fondamental de la Dynamique</u>:
  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ (somme des forces appliquée au point matériel, unité N ou Newton)
  ou encore $d\mathbf{p}/dt = m\,d\mathbf{v}/dt = m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}$

- <u>Travail</u> d'une force $dW = \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl}$
  lors d'un déplacement du point A vers le point B

  $W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl}$ (unité: J ou Joule)

  c'est un produit scalaire, le travail est moteur si > 0
  résistant si < 0



*La force **F** appliquée à la masse m en M est représentée par les vecteurs colorés.*
dl** est tangent à la trajectoire: c'est le déplacement élémentaire de la masse m qui subit **F

*exemple: lors d'un déplacement horizontal, le poids m **g** ne travaille pas*

- Puissance instantanée d'une force $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ (unité: W ou Watt)
(produit scalaire de la force avec la vitesse du point matériel, peut être > 0 ou < 0)

- Energie cinétique $Ec = 1/2\ m\ v^2$ (unité: J ou Joule)

- théorème de l'énergie cinétique de la position A vers B: $Ec_B - Ec_A = W_{AB}$

démonstration simple à partir du PFD: $m\ d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}$
effectuons le produit scalaire avec le vecteur vitesse $\mathbf{v} = d\mathbf{OM}/dt$:
$m\ \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$
donc $dEc/dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM}/dt$
$dEc = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM}$

et de A vers B: $\int_A^B dEc = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM}$ c'est à dire $Ec(B) - Ec(A) = W_{AB}$

- Force dérivant d'une énergie potentielle: $\mathbf{F} = -\ \mathbf{grad}\ Ep$
Ep est la fonction énergie potentielle (unité: J ou Joule); elle dépend des variables de position.

exemples de forces et d'énergie potentielle associée :
* poids $m\ \mathbf{g}$, $Ep(z) = m\ g\ z$ (z = hauteur de la massse m)
* force de gravitation entre deux masses m et m' distantes de r
loi de Newton $\mathbf{F} = -\ K\ m\ m'/r^2\ \mathbf{u}$, $Ep(r) = -\ Km\ m' / r$
* force électrique entre deux charges q et q' distantes de r
loi de Coulomb $\mathbf{F} = q\ q'/4\pi\varepsilon_0 r^2\ \mathbf{u}$, $Ep(r) = (1/4\pi\varepsilon_0)\ q\ q' / r$
* force de rappel d'un ressort d'allongement x
$F = -\ k\ x$, $Ep(x) = 1/2\ k\ x^2$

- Principe de conservation de l'énergie mécanique lorsque la force dérive d'une énergie potentielle :
on a vu ci dessus dans la démonstration du théorème de l'énergie cinétique que:
$dEc = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM}$
Pour une force dérivant d'une énergie potentielle, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM} = -\ \mathbf{grad}(Ep) \cdot \mathbf{dOM} = -\ dEp$
D'où $dEc + dEp = 0$

$Ec + Ep = \text{constante}$ (unité: J ou Joule)

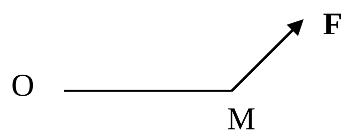
Il n'y a pas conservation de l'énergie mécanique en cas de dissipation par frottement
(les forces de frottement ne dérivent pas d'un potentiel).

exemple: masse m dans le champ de pesanteur : $1/2\ m\ v^2 + m\ g\ z = constante$

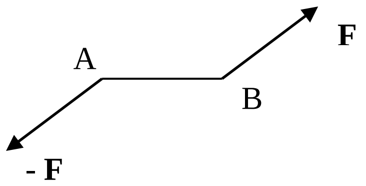
Dynamique des mouvements de rotation

Imaginons que la masse m en M effectue un mouvement de rotation autour du point O.

- Moment de la force au point O: $\mathcal{M}_O = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$
(unité N m)
La force $\mathbf{F}$ est appliquée au point M.
En norme, le moment est maximal lorsque
OM et **F** sont orthogonaux (il est nul s'ils sont colinéaires)



- Notion de <u>couple</u> de forces
Il s'agit de la somme des moments en O de deux forces **F** et **- F** égales en norme mais opposées en direction



$\mathcal{M}_O = \mathbf{OA} \wedge (-\mathbf{F}) + \mathbf{OB} \wedge \mathbf{F} = (\mathbf{AO} + \mathbf{OB}) \wedge \mathbf{F} = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}$

est indépendant de O (unité N m); on écrira alors que le couple de forces est $\mathcal{C} = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}$

exemple: action d'un tournevis sur la tête d'une vis.

- <u>Moment cinétique</u> en O de la masse m située au point M: $\mathbf{K_O} = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p}$
C'est le moment en O de la quantité de mouvement $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ (unité: $m^2\ kg\ s^{-1}$)
Le moment cinétique est une notion utile pour décrire les mouvements de rotation.

exemple1: dans un mouvement circulaire uniforme de rayon R à la vitesse angulaire ω, on a en norme: $v = \omega R$, $p = m v = m \omega R$, $K_O = R p = m \omega R^2$

exemple2: dans un mouvement à force centrale, la valeur du moment cinétique est lié à la constante des aires $C = r^2\, d\theta/dt$ *par la relation simple* $K_O = m r^2\, d\theta/dt = m C =$ *constante.*

exemple3: le moment cinétique de l'électron de l'atome d'Hydrogène est quantifié par la relation de Bohr: $K_O = n \hbar$ *où n est un nombre entier positif. La constante de Planck réduite* $\hbar = h/2\pi$ *apparaît donc comme un <u>quantum</u> de moment cinétique.*

- <u>théorème du moment cinétique</u>: $d\mathbf{K_O}/dt = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$
c'est l'analogue du PFD, pour les mouvements de rotation d'une masse m située au point M.

démonstration simple:
$\mathbf{K_O} = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p}$
dérivons par rapport au temps:
$d\mathbf{K_O}/dt = d\mathbf{OM}/dt \wedge \mathbf{p} + \mathbf{OM} \wedge d\mathbf{p}/dt$
or $d\mathbf{OM}/dt = \mathbf{v}$ et $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ sont colinéaires (produit vectoriel nul) et d'après le PFD, on a:
$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ d'où
$d\mathbf{K_O}/dt = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$

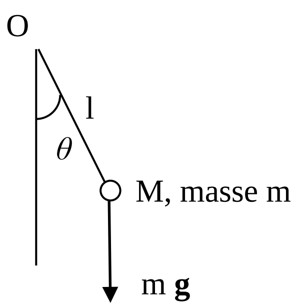
exemple: mouvement du pendule de longueur l dans le champ de pesanteur g

On a un mouvement de rotation circulaire :

$K_O = m l^2\, d\theta/dt$ *(en valeur algébrique)*

$\rightarrow dK_O/dt = m l^2\, d^2\theta/dt^2$

le moment du poids par rapport à O est:
$\mathcal{M}_O = - m g l \sin\theta$ *(en valeur algébrique)*



$\rightarrow m l^2\, d^2\theta/dt^2 + m g l \sin\theta = 0$

et pour les petits mouvements $(\theta << 1)$, $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\,\theta = 0$

c'est un mouvement périodique de période $T = 2\pi\,(l/g)^{1/2}$