Exercice 1 : théorème de Gauss

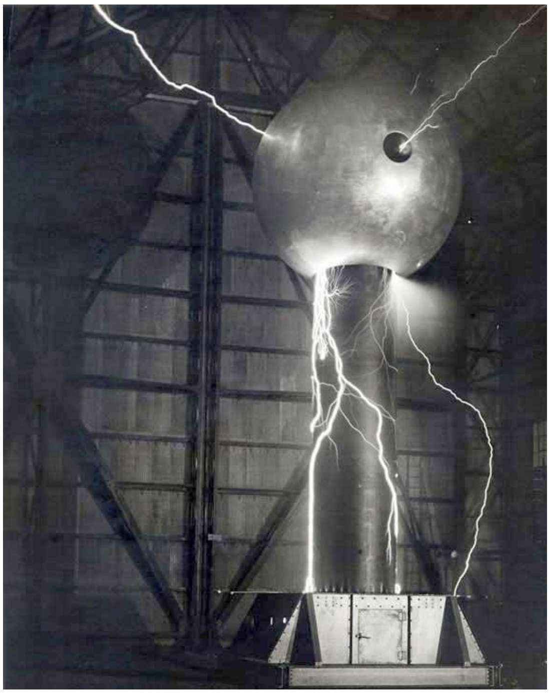
1) On considère une charge ponctuelle q placée en O. Trouver le champ électrique au point M distant de r (donc la loi de Coulomb) à l'aide du théorème de Gauss.

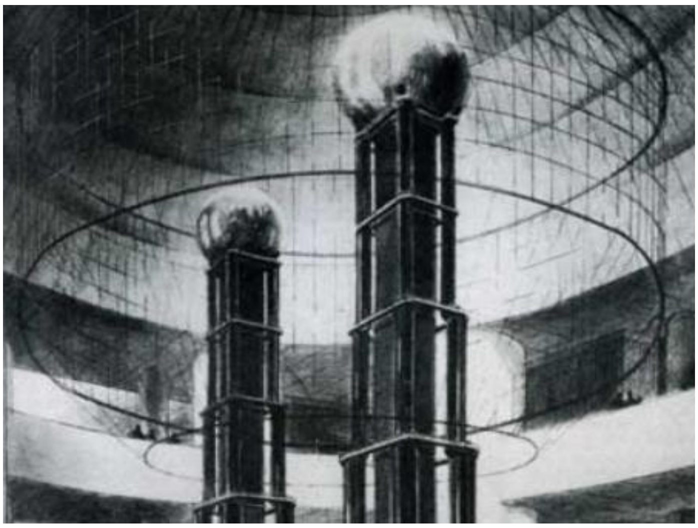
2) On considère une boule de centre O et de rayon R chargée en volume. La densité volumique de charge ρ (unité: C m^{-3}) est uniforme.

- Exprimer la charge q de la sphère en fonction de ρ et de R
- On considère un point M de l'espace. La distance OM est notée r. Le champ électrique **E** en M est radial (invariance de la boule par rotation, symétrie sphérique) de sorte que **E** = E(r) **u** (où **u** est le vecteur unitaire **OM**/||**OM**||). On définit une surface sphérique de centre O et de rayon r. Exprimer le flux de **E** à travers cette surface en fonction de r et E(r)
- Si r < R, quelle est la charge intérieure à la sphère de rayon r ? Donner alors E(r) grâce au théorème de Gauss
- Si r > R, quelle est la charge intérieure à la sphère de rayon r ? Donner alors E(r) grâce au théorème de Gauss
- Tracer l'allure de E(r) en fonction de r

Exercice 2 : la machine électrostatique de Van de Graaf

Une machine électrostatique de Van de Graaff est un générateur de haute tension (le million de volts) qui a servi a fabriquer les premiers accélérateurs de particules chargées, avant le développement des machines plus puissantes que sont le cyclotron et le synchrotron. La machine de Van de Graaf est constituée d'une sphère métallique creuse de rayon R que l'on charge par frottement à l'aide d'une courroie et de peignes. Le Palais de la Découverte a abrité une machine de ce type dès 1937; elle disposait de deux sphères de rayon R = 1.50 m de charges opposées.





1) on considère une sphère creuse de rayon R uniformément chargée en surface de densité surfacique σ. Quelle relation lie la charge Q de la sphère à R et σ ?
2) au point M à la distance r > R du centre O de la sphère, quelle est la direction du champ électrique **E** (radial ? orthoradial ?) et de quelle variable d'espace dépend-il (r ? θ ? φ ?)

3) en utilisant le théorème de Gauss sur une surface de Gauss sphérique de rayon $r > R$, exprimer le champ électrique $E(r)$ en fonction de Q et de r pour $r > R$. En déduire le potentiel $V(r)$ en fonction de Q et de r (on choisira $V(r)$ nul à l'infini).
4) relier le champ électrique $E(R)$ à la surface de la sphère métallique à son potentiel $V(R)$.
5) Si $E(R) > E_m = 3\ 10^6$ V/m, il y a claquage de l'air: un canal ionisé conducteur s'ouvre, un arc électrique jaillit, et la sphère se décharge (photo). Quelle est la valeur limite admissible V_m du potentiel $V(R)$ pour une sphère de rayon $R = 1.5$ m ?
6) que vaut l'énergie potentielle Ep d'un proton (charge $e = 1.6\ 10^{-19}$ C) sous la tension V_m en millions d'électrons volt (1 Mev = $1.6\ 10^{-13}$ J) et en Joules ?
7) en appliquant le principe de conservation de l'énergie, quelle vitesse v (en m/s puis en pourcentage de la vitesse de la lumière) acquiert un proton accéléré sous la différence de potentiel V_m (on donne la masse du proton: $m_p = 1.67\ 10^{-27}$ kg) ?
8) que deviendrait cette vitesse (en m/s et en fraction de la vitesse de la lumière) à l'aide d'une machine à deux sphères, l'une au potentiel $+V_m$ et l'autre au potentiel $-V_m$ (photo) ?
9) sous la tension V_m, que vaut la charge Q de la sphère ?