Electromagnétisme – L'essentiel du cours – SMD – L1 - 2020

Les champs vectoriels sont en caractères **gras**

I – Rappels de mathématiques

Si **A** (A_x, A_y, A_z), **B** (B_x, B_y, B_z) et **C** (C_x, C_y, C_z) sont des champs vectoriels fonction de (x,y,z) :

Produit scalaire: $\mathbf{A.B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}|| \cos(\mathbf{A},\mathbf{B})$
$\mathbf{A.B} = 0$ si **A** et **B** sont othogonaux

Produit vectoriel: $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y,\ A_z B_x - A_x B_z,\ A_x B_y - A_y B_x)$
$||\ \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\ || = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||\ |\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})|$
$||\ \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\ ||$ représente l'aire du parallélogramme (**A, B**)
$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$ si **A** et **B** sont colinéaires

Produit mixte: $\mathbf{A}.(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{C}.(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B}.(\mathbf{C} \wedge \mathbf{A})$ invariant par permutation circulaire
$||\ \mathbf{A}.(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})\ ||$ représente le volume du prisme droit (**A, B, C**)

Fonctions de plusieurs variables :

Si f (x,y,z) est un champ scalaire, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ s'appellent dérivées partielles. Par exemple, $\partial f/\partial x$ est la dérivée par rapport à x en maintenant y et z constants.

Différentielle : une fonction f(x), lorsque x varie de x à x+dx, varie de df = f'(x) dx. df est alors appelé différentielle et se généralise en cas de 3 variables. Par exemple, si f dépend de (x,y,z), au point M(x,y,z) la différentielle est $df = (\partial f/\partial x)\, dx + (\partial f/\partial y)\, dy + (\partial f/\partial z)\, dz$ v = **grad** f . **dOM**

Gradient de la fonction f en M(x,y,z): **grad** f = $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$

Le gradient d'un champ <u>scalaire</u> f(x,y,z) est un champ <u>vectoriel</u>; il caractérise ses variations spatiales. La <u>direction</u> de **grad** f indique la direction dans laquelle f varie. ||**grad** f|| renseigne sur l'<u>amplitude</u> de ces variations.

Le gradient est orthogonal en tout point aux lignes de même valeur de la fonction f (lignes dites « isovaleur » telles que df = **grad** f . **dOM = 0**).

En coordonnées cylindriques M(r, θ, z) dans le trièdre direct **($\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$, $\mathbf{e_z}$) :**

Le gradient de la fonction f en M(r,θ,z) est : **grad** f = $[\ \partial f/\partial r,\ (1/r)\, \partial f/\partial \theta,\ \partial f/\partial z\ ]$

II – **E** et **B** définis par leur action sur une charge

1 – Force de Lorentz sur une charge q de vitesse v

$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ (force électrique + magnétique), en Newton

Puissance de la force (en Watt) : $P = q\,\mathbf{E}.\mathbf{v}$ (seule la force électrique travaille)

Au repos, ou si **v** // **B**, pas de force magnétique

L'électron a la charge –e, le proton la charge +e avec $e = 1.6\ 10^{-19}$ Coulomb

La force de Lorentz n'agit pas sur une particule neutre.

2 – Conservation de l'énergie mécanique : cinétique + potentielle (en l'absence de frottements)

$\frac{1}{2}\, m\, v^2 + q\, V$ = constante (en Joule), avec V potentiel électrique (en Volts)

$\mathbf{E}$ et V sont liés par la relation $\mathbf{E} = -\ \mathbf{grad}\ V$; le champ magnétique n'intervient pas dans l'énergie ;

$\frac{1}{2}\, m\, v^2$ = énergie cinétique, qV = énergie potentielle de la charge q dans le potentiel V

*3 – Effet du champ électrique **E** : accélération ou freinage d'une charge q de masse m*

Accélération du mouvement : $\mathbf{a} = (q/m)\ \mathbf{E}$

Si $\mathbf{E}$ = **constante**, $\mathbf{v}(t) = (q/m)\ \mathbf{E}\ t + \mathbf{v_0}$ et $\mathbf{OM}(t) = \frac{1}{2}\,(q/m)\ \mathbf{E}\ t^2 + \mathbf{v_0}\ t + \mathbf{OM_0}$

Trajectoire rectiligne ou parabolique, de vitesse initiale $\mathbf{v_0}$ et de position initiale M_0

Le champ électrique accélère/freine les particules donc agit sur $\|\mathbf{v}\|$, ainsi que sur la direction de $\mathbf{v}$ (sauf si $\mathbf{v_0}$ // $\mathbf{E}$).

*4 – Effet du champ magnétique **B** : déviation*

Conservation de l'énergie cinétique : $v^2 = v_{//}^2 + v_\perp^2 = \text{constante} = v_0^2$

Dans un champ $\mathbf{B}$ constant, $v_{//}$ = cte = vitesse de dérive dans la direction de $\mathbf{B}$

$v_\perp$ = cte = vitesse de giration dans le plan orthogonal à $\mathbf{B}$

Le champ magnétique n'agit pas sur $\|\mathbf{v}\|$ mais seulement sur la direction de $\mathbf{v}$

$v_{//}$ et $v_\perp$ sont fixés par la vitesse initiale $\mathbf{v_0}$ en t = 0

Trajectoire : hélice d'axe $\mathbf{B}$ si $v_{//} \neq 0$, cercle dans le plan orthogonal à $\mathbf{B}$ si $v_{//} = 0$

$d\mathbf{v}/dt = -\ (q/m)\ \mathbf{B} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ définit $\mathbf{\Omega} = -\ (q/m)\ \mathbf{B}$ vecteur vitesse angulaire

$\Omega = \|\mathbf{\Omega}\| = (|q|/m)\ B$ est la pulsation gyromagnétique (radians/s)

$v_\perp = \Omega\ R$ définit le rayon de giration R, ou rayon de l'hélice (ou cercle) décrite par la charge q.

III - Electrostatique : les charges sources de champ électrique

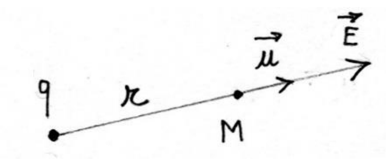
1 – Charges ponctuelles

Charge q en 0, champ électrique en M : loi de Coulomb $\mathbf{E}(M) = (q/4\pi\epsilon_0)\ (\mathbf{u}/r^2)$ en Volt/m

$\mathbf{u}$ vecteur unitaire de O vers M ; la charge se mesure en Coulomb (C)

Potentiel (Volt) : $V(M) = (q\ /\ 4\pi\epsilon_0 r)$

$(1\ /\ 4\pi\epsilon_0) = 9\ 10^9$ unités SI, ϵ_0 est la permittivité du vide.



Potentiel en M	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$
Champ électrique en M	$\frac{q\,\vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Force exercée par q sur q' en M : **F** = q' **E**(M) où **E**(M) est le champ créé par q en M

Des charges de même signe se repoussent ; de signe opposé, elles s'attirent.

Energie potentielle de 2 charges q, q' distantes de r : Ep = (q q' / $4\pi\epsilon_0$r) = q' V(M)

Dipôle électrique : ensemble de 2 charges (-q, +q) opposées et situées en A_- et A_+, le moment dipolaire est défini par **p** = q $\mathbf{A_-A_+}$ (en C m)

Champ du dipôle à grande distance r : **E**(M) = - ($1/4\pi\epsilon_0$) **grad**(**p.u**/r²) varie en $1/r^3$ *(formule non exigée)*

Interaction ion (charge q') / dipôle : force **F** = q' **E**(M) varie en $1/r^3$

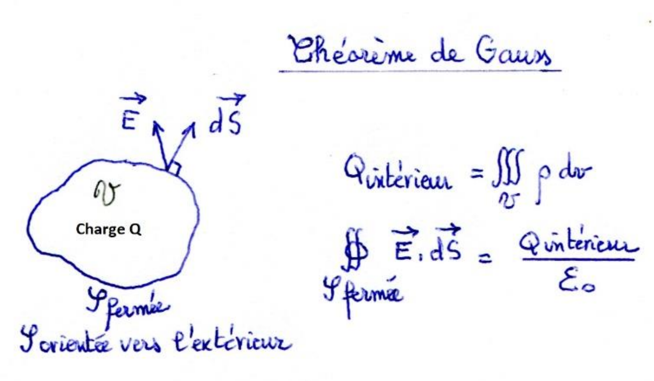
Un dipôle de moment dipolaire **p** placé dans un champ électrique **E** subit la force **F** = **grad**(**p.E**), donc pas de force si **E** est uniforme, et le couple **Γ** = **p** Λ **E** *(formules non exigées)*. La force agit en translation, le couple en rotation du dipôle.

Moment dipolaire induit : une molécule apolaire (**p** = **0**) plongée dans un champ électrique **E** peut acquérir un moment dipolaire **p** = α **E,** où α est une constante de proportionnalité, d'où l'interaction dipôle/dipôle :

force de Van der Walls entre molécules, **F** = α **grad**(E²) varie en $1/r^7$ (très courte portée) *(formule non exigée)*, **E** étant dans cette formule le champ dipolaire en $1/r^3$

2 – Charges répartis dans l'espace (surfaces, volumes), théorème de Gauss

Les charges peuvent être réparties sur une surface (fréquent) avec la densité de charge surfacique σ (C m^{-2}, σ peut être positif ou négatif) ou encore dans un volume (moins fréquent) avec la densité de charge ρ (C m^{-3})



Le flux Φ du champ électrique à travers une surface fermée S est égal à la somme des charges intérieures à la surface divisée par la permittivité du vide ϵ_0 (8.86 10^{-12} SI)

Restriction d'usage : ce théorème n'est exploitable que si les symétries permettent de mettre le flux sous la forme du produit du champ par la surface entourant les charges

Exemple d'une sphère portant la charge Q en surface, de rayon R : **E** est radial (symétrie des charges), et Q = 4 π R² σ.

Pour déterminer **E** en un point M à la distance r du centre de la sphère, on choisit une surface sphérique de rayon r pour calculer le flux :

En M à la distance r, Φ = E(r) 4 π r² = Q/ϵ_0, d'où E(r) = (σ/ϵ_0) (R²/r²)

3 – champ électrique sur la surface d'un conducteur (théorème de Coulomb)

$\mathbf{E} = \sigma/\varepsilon_0 \ \mathbf{n}$ ($\mathbf{E}$ est normal à la surface, entrant ou sortant, selon le signe de σ, $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal localement à la surface, et σ est la densité de charge locale sur la surface considérée, positive ou négative)

4 – Condensateur plan de section S et d'épaisseur l, armatures aux potentiels V_1 et V_2

$C = \varepsilon_0 \ S/l$ capacité du condensateur plan (Farad ou F)

charge du condensateur $Q = C\,(V_1 - V_2)$ (Coulomb)

énergie électrique stockée (en Joule) : $E_p = ½\,Q\,(V_1 - V_2) = ½\,C\,(V_1 - V_2)^2 = ½\,Q^2/C$

Le champ électrique à l'intérieur du condensateur est uniforme : $E = (V_1 - V_2)\ / \ l$

On en déduit $E_p = (½\ \varepsilon_0\ E^2)$ x volume du condensateur (S x l)

5 – Extension : densité volumique d'énergie électrique de l'espace

$½\ \varepsilon_0\ E^2$ (en J m^{-3}) désigne la densité volumique d'énergie électrique en tout point de l'espace. L'énergie totale s'obtient par intégration sur le volume.

IV – Champ de gravitation, analogie avec l'électrostatique

Correspondance : champ de gravitation $\mathbf{G}$ (m s^{-2}) ↔ champ électrostatique $\mathbf{E}$ (V m^{-1})

masse (kg) ↔ charge (C)

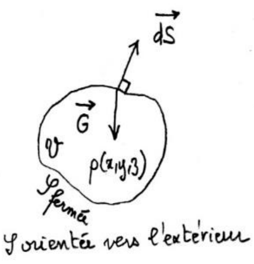
$-4\pi K \leftrightarrow 1/\varepsilon_0$

$K = 6.67\ 10^{-11}$ SI constante d'attraction universelle

$\mathbf{G}$ est une accélération, la force attractive subie par une masse m dans le champ $\mathbf{G}$ est $\mathbf{F} = m\,\mathbf{G}$

Sur la surface d'un astre, le champ de gravitation $\mathbf{G}$ est appelé champ de pesanteur $\mathbf{g}$.

1 – Théorème de Gauss du champ de gravitation



Théorème de Gauss

$$M_{intérieure} = \iiint_v \rho \, dv$$

$$\oiint_{S\ fermée} \vec{G} \cdot \vec{dS} = -4\pi K\, M_{intérieure}$$

Le flux Φ du champ de gravitation à travers une surface fermée S est égal à la somme des masses intérieures à la surface multipliée par $-4\pi K$ ($K = 6.67\ 10^{-11}$ SI)

Restriction d'usage : ce théorème n'est exploitable que si les symétries permettent de mettre le flux sous la forme du produit du champ par la surface entourant les masses

2 – Potentiel de gravitation V

V est défini par $\mathbf{G} = -\,\mathbf{grad}\ V$

L'énergie potentielle d'une masse m dans le champ de gravitation $\mathbf{G}$ est mV (en Joules)

V - Magnétostatique : les courants sources de champ magnétique

1 – Courant électrique dans un conducteur

Un courant électrique est une circulation de charges mobiles (les électrons libres dans un métal, un électron par atome environ) sous l'action d'un champ électrique. La densité électronique du conducteur n est voisine de 10^{29} électrons/m^3. La charge de l'électron est –e = - 1.6 10^{-19} C.

Soit v la vitesse des électrons (voisine de 1 mm/s seulement !) ; l'intensité I du courant (en Ampères) est définie comme un débit de charges (C s^{-1}) traversant la section S du conducteur

I = (n e v) S = dq/dt (en A)

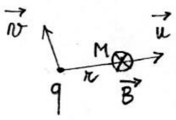
Où dq/dt est la charge qui traverse la section S du conducteur par unité de temps

2 – Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Si la charge q se déplace à la vitesse **v** , elle génère à la distance r un champ magnétique égal à :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\,\vec{v}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

(formule non exigée)



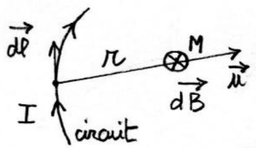
$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ SI est la perméabilité du vide

3 – Orientation des champs magnétiques

Si **dl** est un élément de courant d'intensité I situé en O, le champ magnétique élémentaire d**B** créé par cet élément en un point M est <u>proportionnel</u> au produit vectoriel I **dl** Λ **u**, où **u** est le vecteur unitaire allant de O à M. d**B** est donc orthogonal au plan (**dl, u**), c'est une grosse différence par rapport au champ électrique d'une charge, qui est colinéaire à **u** !

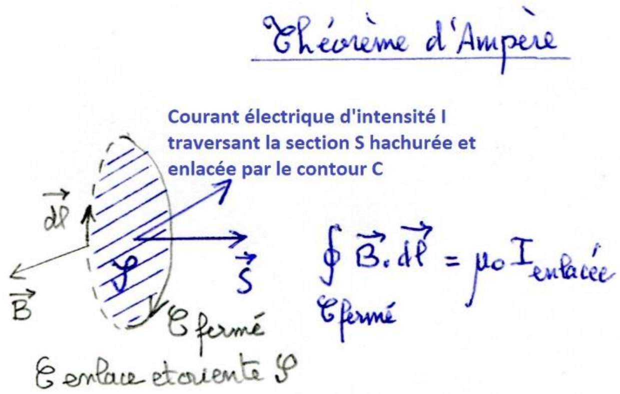
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{I\,\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

(formule non exigée de Biot et Savart)



L'exemple du fil : les lignes de champ magnétique dessinent des cercles concentriques autour du fil, dans le plan perpendiculaire au fil

4 – Champs magnétiques créés par des courants filiformes, théorème d'Ampère



La circulation du champ magnétique sur un contour fermé C est égal à la somme des intensités enlacées par le contour multipliée par la perméabilité du vide μ_0 (4 π 10^{-7} SI)

Restriction d'usage : ce théorème n'est exploitable que si les symétries permettent de mettre la circulation sous la forme du produit du champ par le périmètre du contour enlaçant les courants

L'exemple du fil rectiligne : contour = cercle de rayon r. On a alors : B(r) 2π r = μ_0 I

5 – Pression magnétique sur la surface d’un conducteur

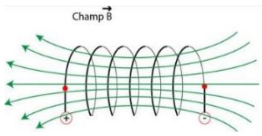
$P_m = B^2/ 2\mu_0$ (en Pascals)

B est le champ à la surface du conducteur, cette notion sert à réaliser des confinements magnétiques dans les machines expérimentales à fusion (tokamaks)

6 – Bobine magnétique (solénoïde)

Le champ magnétique sur l’axe d’une bobine magnétique parcourue par une intensité I, comportant N spires, de longueur l (N, l grands) et de section S, est (en Tesla)

Nord



Sud

$B = \mu_0 (N/l) I$

Le flux magnétique Φ (Weber ou T m²) à travers cette bobine est $\Phi = N B S$

On définit l’inductance L de la bobine par $\Phi = L I$, d’où $L = \mu_0 N^2 S/l$ (en Henry ou H)

L’énergie magnétique (Joule) de la bobine est $E_p = ½ I \Phi = ½ L I^2 = ½ \Phi^2/L$

On en déduit que $E_p = (B^2/ 2\mu_0)$ x volume de la bobine (S x l)

7 – Extension : la densité d’énergie magnétique de l’espace

$B^2/ 2\mu_0$ (en J m^{-3}) est la densité volumique d’énergie magnétique en tout point de l’espace. L’énergie totale (J) s’obtient par intégration sur le volume.

8 – Force de Laplace agissant sur un courant plongé dans un champ magnétique

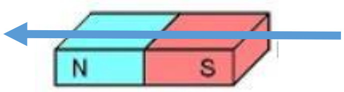
$d\mathbf{F} = I\, \mathbf{dl} \wedge \mathbf{B}$ (Newton)

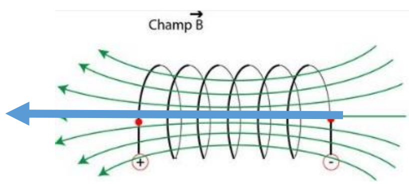
est la force qui agit sur l’élément de courant d’intensité I de longueur vectorielle **dl** plongé dans le champ magnétique **B**. Cette force est orthogonale au plan (courant, champ). Si **B** est parallèle au courant, il n’y a pas de force. Cette force permet de réaliser, par exemple, une sustentation magnétique contre la pesanteur.

Cette force fait que des courants de même sens s’attirent ; des courants de sens opposé se repoussent (c’est la situation inverse des forces électriques entre charges).

9 – Dipôle magnétique et son moment magnétique

Un aimant permanent se caractérise par son moment magnétique **M** (A m²). Le champ magnétique sort par le pôle Nord en entre par le pôle Sud (notion de dipôle).





M (aimant)

M = N I S (bobine à N spires de section S

Une spire de courant parcourue par un courant d'intensité I et de surface S possède un moment magnétique orthogonal au plan de la spire (de normale **n**) : **M** = I S **n** (A m²). Elle se comporte comme un aimant de moment magnétique variable.

Un moment magnétique (aimant, courant) crée à grande distance r un champ magnétique donné par l'expression : **B**(M) = - ($\mu_0/4\pi$) **grad**(**M.u**/r²), qui varie en $1/r^3$ *(formule non exigée)*

Lorsque qu'un dipôle de moment magnétique **M** est placé dans un champ extérieur **B** (par exemple un aimant **M** dans le champ **B** d'une bobine), la force qu'il subit est **F** = **grad**(**M.B**), elle sera répulsive ou attractive (pas de force dans un champ uniforme). Il subit aussi un couple **Γ** = **M** Λ **B** *(formules non exigées)*. La force agit en translation, le couple en rotation du dipôle.

VI – Elément de courant résistif, loi d'Ohm

1 - Mouvement des électrons (masse m, charge –e) dans un champ électrique

m d**v**/dt = -m/τ **v** - e **E**

τ est le temps moyen entre deux collisions, modélisées par une force de frottement -m/τ **v**

En régime permanent, **v** = (- e τ/m) **E** = **constante**

La quantité $\gamma = n e^2 \tau / m$ porte le nom de conductivité *(formule non exigée)*. Elle est de l'ordre de 10^7 Sm^{-1} pour les métaux à température ordinaire. Par contre, à très basse température (< 5 K), il n'y a plus de collisions (τ→∞), la conductivité de certains matériaux devient infinie : c'est la supra-conductivité.

2 - Résistance d'un tronçon de fil de section S et de longueur l

R = l / γS résistance (Ω), γ est la conductivité du conducteur (S m^{-1})

Puissance dissipée par effet Joule sous une intensité I : P = R I²

Tension aux bornes de la résistance (loi d'OHM) : U = R I

VII – Induction magnétique dans un circuit

1 – Induction dans un élément de circuit fermé de géométrie variable ou dans un circuit fixe dans un champ magnétique variable, loi de Faraday

Dans le cas d'un circuit fermé (cas le plus courant) de résistance R, on a l'équation électrique :

R I – e = 0

I = e / R est le courant induit

e, force électromotrice d'induction, est donnée par la loi de Faraday :

$e = -\frac{d}{dt}\iint \boldsymbol{B}.\boldsymbol{dS} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$ (e est une tension en Volts)

$\Phi(\mathbf{B})$ est le flux magnétique (variable) au travers du circuit fermé (en général B x S, si S est sa surface).

2 – Loi de Lenz

Les effets de l'induction modèrent la cause qui leur a donné naissance. La loi de Lenz est très utile pour prévoir le sens du courant induit. Par exemple :

- Le courant induit s'oriente pour créer une force de Laplace s'opposant à un mouvement
- Le courant induit s'oriente pour créer un champ magnétique induit compensant la variation d'un champ magnétique extérieur variable

3 – Bilan d'énergie

Pour un circuit fermé soumis à la fem d'induction $e = - d\Phi/dt$, on a

$R I^2 - e I = 0$

Où RI^2 = puissance Joule (W) dissipée dans le circuit, $- e I$ = puissance des forces de Laplace

4 – Principe de l'alternateur à une ou trois bobines

Si l'on place une spire de courant de surface S dans un champ magnétique tournant à la vitesse angulaire ω, comme celui des aimants d'un alternateur, on obtient un flux magnétique variable

$\Phi = B S \cos(\omega t)$

Il apparait dans la spire une fem induite $e = - d\Phi/dt = B S \omega \sin(\omega t) = U_m \sin(\omega t)$

C'est une tension alternative à moyenne nulle, de pulsation ω et de fréquence $f = \omega/2\pi$ (50 Hz en ce qui concerne la fréquence du secteur), d'amplitude U_m et de valeur efficace $<e^2>^{½} = U_m/\sqrt{2}$ (220 V pour les circuits domestiques)

Si l'on dispose 3 spires orientées à 120° l'une de l'autre dans le même champ tournant, on obtient 3 fem déphasées de $120° = 2\pi/3$:

$e_1 = B S \omega \sin(\omega t)$, $e_2 = B S \omega \sin(\omega t-2\pi/3)$, $e_3 = B S \omega \sin(\omega t-2\pi/3)$, soit 3 tensions triphasées.

L'électricité industrielle est constituée de courant triphasé, qui permet de transporter 3 fois plus de puissance. La somme des 3 puissances instantanées a l'avantage d'être <u>constante</u> (contrairement au monophasé). Entre deux phases, l'amplitude est $U_m \sqrt{3}$, la valeur efficace sera donc multipliée par $\sqrt{3}$ (380 V pour les circuits domestiques).

5 – Energie électrique consommée dans le monde

En France, on estime l'énergie électrique annuelle consommée à $2\ 10^{18}$ J , et dans le monde à 10^{20} J. Comme l'électricité ne représente que 20 %, l'ordre de grandeur de l'énergie consommeé par l'humanité est de l'ordre de 10^{21} J par an.

Cette quantité peut être mise en regard de l'énergie reçue du Soleil par les continents, autour de 10^{24} J par an, soit mille fois plus que l'énergie consommée par l'humanité.