

Cours du MOOC PSL Hydrodynamique et MHD

Jean-Marie.Malherbe@obspm.fr, 2017



Niveau L2 et L3, MOOC ouvert en permanence (sans forum ni évaluation des apprenants en dehors des sessions)

Comprend 6 semaines de cours en vidéo et des exercices auto corrigés à cette adresse :

https://www.fun-mooc.fr/courses/course-v1:OBSPM+62004+session01/about

•	Plan des 6 semaines	page 1
NIVEAU L2		
•	Pré-requis : Analyse vectorielle S1 : mesure à distance du champ de vitesses, cinématique des fluides S2 : Hydrostatique, hydrodynamique, équation d'Euler, équation de	page 7 page 17
	Navier Stokes, mouvements stationnaires et exemples	page 27
•	S3 : Aspects énergétiques, loi de conservation de l'énergie, écoulements dans des tuyaux magnétiques	page 44
NIVEAU L3		
•	S4 : MHD, diffusion et advection du champ magnétique S5 : Ondes de pression (acoustiques), ondes magnétiques d'Alfvèn,	page 54
•	ondes de gravité (houle), ondes élastiques dans les solides S6 : Chocs hydrodynamiques, écoulement transsonique Annexes (constantes)	page 60 page 69 page 74

page 76

EXERCICES CORRIGES





MOOC (ASTRO)PHYSIQUE: HYDRODYNAMIQUE ET MHD

J.M. Malherbe*

Printemps 2017

PLAN DU COURS

^{*}LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France









Présentation et Fonctionnement du MOOC

0.I Présentation du cours et des enseignants

Présentation du cours

Plan du cours

Présentation des enseignants

0.I Structure du cours et navigation

Découpage du cours, catégories d'exercices, évaluation

Navigation

Réalisation des exercices

Vidéo

Pages de la plateforme

Forum - Discussion

Pré-MOOC

Analyse vectorielle (AV)

AV.0 Introduction

AV.I Champs et produits scalaires et vectoriels

Champs scalaire et vectoriel, et produit scalaire

Produit vectoriel

Exemple de champs scalaires

Exemples de champs vectoriels

AV.II Dérivées, différentielle, gradient et potentiel

Dérivées partielles et différentielle

Gradient

Exemple de gradient

Potentiel

AV.III Opérateurs

Opérateur divergence

Exemples d'opérateur gradient et divergence

Opérateur rotationnel

Exemple de rotationnel

Opérateur Laplacien

AV.IV Coordonnées

Coordonnées cartésiennes

Coordonnées cylindriques









Coordonnées sphériques

AV.V Lignes de champs et lignes et surfaces équipotentielles

Lignes de champs

Lignes et surfaces equipotentielles

Exemple

AV.VI Circulation et flux

Circulation

Flux à travers une surface fermée

Flux à travers une surface ouverte

AV.VII Théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski

Théorème de Stokes

Théorème d'Ostrogradski

Exemple d'utilisation du théorème d'Ostrogradski

MOOC

I Introduction : méthodes de mesure à distance du champ des vitesses

- I.1 Introduction
- I.2 Effet Doppler ou projection sur la ligne de visée
- I.3 Mouvement propre ou projection sur le plan du ciel

II Cinématique des fluides

- II.1 Remarques générales sur les équations de conservation
- II.2 Écoulements incompressibles et irrotationnels
- II.3 Analogie cinématique des fluides incompressibles et magnétostatique
- II.4 Analogie écoulements irrotationnels incompressibles et électrostatique

III Hydrostatique

- III.1 Équilibre entre force de pression et de pesanteur
- III.2 Équilibre d'un corps sphérique homogène autogravitant en rotation

IV Hydrodynamique : Équation du mouvement

- IV.1 Accélération locale et convective
- IV.2 Équation d'Euler et forces volumiques en présence
- IV.3 Mouvement incompressible stationnaire : loi de Bernoulli
- IV.4 Effet Coanda
- IV.5 Exemples d'application de la loi de Bernoulli







IV.6 Éléments de thermodynamique

V Loi de conservation de l'énergie

- V.1 Équation de conservation de l'énergie en présence de pesanteur
- V.2 Formulation de l'énergie interne U et de l'enthalpie H par unité de volume et de masse
- V.3 Écoulement stationnaire dans un tube de courant

VI Méthode de mesure à distance du champ magnétique (effet Zeeman)

VII Mouvement stationnaire dans un tube magnétique avec force de Laplace

- VII.1 Pression magnétique, tension magnétique
- VII.2 Mouvement longitudinal
- VII.3 Équilibre transversal, plasma β , applications à la physique solaire

VIII Équation de diffusion et d'advection du champ magnétique

- VIII.1 Advection: temps dynamique
- VIII.2 Diffusion : temps diffusif, nombre de Reynolds magnétique
- VIII.3 Reconnexion magnétique et application au soleil

IX Ondes

- IX.1 Ondes de pression longitudinales (force de rappel: pression gazeuse)
- IX.2 Ondes magnétiques d'Alfvèn transversales (force de rappel : magnétique)
- IX.3 Ondes sonores dans les solides
- IX.4 Ondes magnéto-sonores
- IX.5 Ondes de gravité dans un fluide : la houle
- IX.6 Modes d'ondes dans une cavité, application au soleil

X Chocs hydrodynamiques: relations de Rankine Hugoniot

- X.1 Exemple de l'onde de Moreton solaire
- X.2 Application au chauffage de l'atmosphère solaire

XI Écoulement transsonique : le vent solaire (solution de Parker)







MOOC (ASTRO)PHYSIQUE

J.M. Malherbe*

Printemps 2017

Cours

AV Éléments d'analyse vectorielle

Ci dessous, f(x, y, z) désigne un champ scalaire : c'est une fonction des variables (x, y, z).

 $\overrightarrow{A}(A_x, A_y, A_z)$, $\overrightarrow{B}(B_x, B_y, B_z)$ et $\overrightarrow{C}(C_x, C_y, C_z)$ désignent des champs vectoriels, chaque composante est un champ scalaire dépendant des variables spatiales (x, y, z).

AV.1 Rappels sur les vecteurs

Le produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre positif ou négatif

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = ||\vec{A}|| \times ||\vec{B}|| \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

$$\|\vec{A}\|^2 = \vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

Le produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

 $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est un vecteur orthogonal à la fois à \vec{A} et à \vec{B}

$$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times |\sin(\vec{A}, \vec{B})|$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéraires est nul. $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$ représente l'aire du parallélogramme généré par \vec{A}, \vec{B} .

Orientation du produit vectoriel : Règle des doigts de la main droite : $\vec{A} = \text{pouce}$; $\vec{B} = \text{index}$; $\vec{A} \wedge \vec{B} = \text{majeur}$.

^{*}LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France









Le produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs est un nombre

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$$

est invariant par permutation circulaire

 $\|\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})\|$ représente le volume du prisme droit généré par $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.

Dès que deux vecteurs sont colinéaires, le produit mixte est nul.

Le double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs est un vecteur

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

n'a pas de composante sur \vec{A} puisqu'il lui est orthogonal.

AV.2Dérivées partielles, différentielle d'une fonction

Dérivées partielles

Soit f(x, y, z) une fonction des variables spatiales x, y, z

- $\partial f/\partial x$ est la dérivée de la fonction par rapport à x en considérant y et z comme des constantes,
- $\partial f/\partial y$ est la dérivée de la fonction par rapport à y en considérant x et z comme des constantes,
- $\partial f/\partial z$ est la dérivée de la fonction par rapport à z en considérant x et y comme des constantes.

Différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

est la différentielle de f(x,y,z); elle représente les variations de f(x,y,z) lorsque x varie de x à x + dx, y de y à y + dy et z de z à z + dz.

AV.3 Les opérateurs

Ils agissent soit sur des champs scalaires, soit sur des champs vectoriels. En coordonnées cartésiennes, on définit :

L'opérateur « nabla » :

$$\overrightarrow{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

L'opérateur gradient :

$$\overrightarrow{grad} f = \overrightarrow{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$









Remarque : $df = \overrightarrow{grad} f \cdot \overrightarrow{dOM}$ avec $\overrightarrow{dOM}(dx, dy, dz)$

L'opérateur divergence:

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(produit scalaire de $\overrightarrow{\nabla}$ et \overrightarrow{A}).

L'opérateur rotationnel:

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}$$

(produit vectoriel de $\overrightarrow{\nabla}$ et \overrightarrow{A}) tel que :

$$\overrightarrow{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z \\ \partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x \\ \partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y \end{pmatrix}$$

Remarques:

- Le gradient s'applique à un champ scalaire et le résultat est un champ vectoriel.
- La divergence s'applique à un champ vectoriel et le résultat est un champ scalaire.
- Le rotationnel s'applique à un champ vectoriel et le résultat est un champ vectoriel.

Quelques formules très utiles

Le rotationnel d'un gradient est nul:

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,f\right) = \overrightarrow{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla}f\right) = \overrightarrow{0}$$

La divergence d'un rotationnel est nulle :

$$div\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A}\right) = 0$$

Divergence et rotaionnelle du produit $f\vec{A}$ d'un champ scalaire f par un champ vectoriel \vec{A} :

$$div(f\vec{A}) = f \, div\vec{A} + \overrightarrow{grad} \, f \cdot \vec{A}$$

$$\overrightarrow{rot}(f\overrightarrow{A}) = f \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} + \overrightarrow{grad} f \wedge \overrightarrow{A}$$

Cas particulier : si \vec{A} est un vecteur fixe indépendant des coordonnées de l'espace :

$$div(f\vec{A}) = \overrightarrow{grad} f \cdot \vec{A}$$

$$\overrightarrow{rot}(f\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{grad} f \wedge \overrightarrow{A}$$

Divergence d'un produit vectoriel:

$$div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \overrightarrow{rot} \vec{A} - \vec{A} \overrightarrow{rot} \vec{B}$$









Carré d'un champ vectoriel:

$$\overrightarrow{grad}\left(\vec{A}^{2}/2\right) = \vec{A} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{A} + \left(\vec{A} \cdot \overrightarrow{grad}\right)\vec{A}$$

Rotationnel d'un rotationnel:

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{grad}(\overrightarrow{div}\overrightarrow{A}) - \Delta \overrightarrow{A}$$

Laplacien scalaire

Il est défini par

$$\Delta f = \overrightarrow{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f)$$

Laplacien vectoriel

Il est défini par

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A})$$

En coordonnées cartésiennes, on peut écrire $\Delta \vec{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$ ou Δ est le Laplacien scalaire; ce n'est pas vrai dans les autres systèmes de coordonnées (cylindriques et sphériques).

Le Laplacien s'applique à un champ scalaire ou vectoriel et le résultat est de même nature.

AV.4 Systèmes de coordonnées

Coordonnées cylindriques $M(r, \theta, z)$, trièdre mobile $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

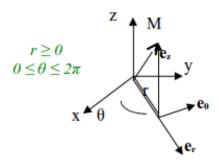


FIGURE 1 – Système de coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{grad}\,f = \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$







$$\begin{aligned} div\vec{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \overrightarrow{rot}\vec{A} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix} \\ \Delta f &= \frac{1}{r}\frac{\partial(r\partial f/dr)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Coordonnées polaires $M(r,\theta)$ planes, repère mobile $(\vec{e_r},\vec{e_\theta})$

Ce sont les coordonnées cylindriques sans la 3ème dimension z

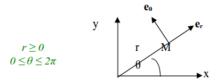


FIGURE 2 – Système de coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right]$$

$$div \overrightarrow{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \theta}$$

$$\overrightarrow{rot} \overrightarrow{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rA_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \overrightarrow{e_z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\partial f/dr)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$





Coordonnées sphériques $M(r,\theta,\varphi)$, trièdre mobile $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi})$

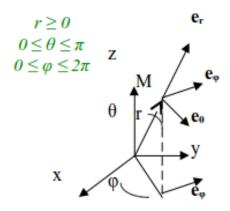


FIGURE 3 – Système de coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \qquad (\overrightarrow{e_{\varphi}} \text{ appartient au plan } xOy)$$

$$\overrightarrow{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]$$

$$div \overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r sin \theta} \frac{\partial (sin \theta A_{\theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r sin \theta} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{rot} \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r sin \theta} \left(\frac{\partial (sin \theta A_{\varphi})}{\partial \theta} - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi}\right) \\ \frac{1}{r sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_{\varphi})}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rA_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 sin \theta} \frac{\partial (sin \theta \partial f / \partial \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

AV.5 Circulation et flux d'un champ vectoriel

Circulation d'un champ vectoriel \vec{A} sur un contour

la circulation d'un champ vectoriel \vec{A} sur un contour est l'intégrale curviligne $\int \vec{A} \cdot \vec{dl}$ où \vec{dl} désigne un élément de contour (\vec{dl}) est tangent au contour en tout point). L'intégrale curviligne s'évalue entre un point de départ P et un point d'arrivée Q.

Si le contour est fermé, alors P=Q et le signe \int est barré d'un rond et la circulation s'écrit :

 $\oint \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl}$







FIGURE 4 – Circulation sur un contour

Un champ vectoriel \vec{A} dont la circulation est nulle sur tout contour fermé est dit à circulation conservative. C'est toujours vrai si \vec{A} est un champ défini par $\vec{A} = \overrightarrow{grad} f$ où f est une fonction "potentiel" (exemple : champ de pesanteur, champ de gravitation, champ électrostatique).

Flux d'un champ vectoriel \vec{A} sur une surface

Le flux d'un champ vectoriel \vec{A} sur une surface est l'intégrale surfacique

$$\iint \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

où \overrightarrow{dS} désigne un élément de surface (le vecteur $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{n} \, dS$ est normal en tout point de la surface). Une surface qui entoure un volume est fermée : le vecteur \overrightarrow{dS} est orienté vers l'extérieur. Une surface qui s'appuie sur un contour fermé est ouverte ; \overrightarrow{dS} est orienté par le contour.

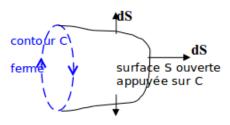


FIGURE 5 – Surface ouverte

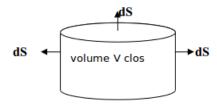


Figure 6 - Volume clos







Surface ouverte appuyée sur un contour, Surface fermée entourant un volume fini

Une surface ouverte appuyée sur un contour orienté (exemple : un disque délimité par la circonférence d'un cercle) s'oriente à l'aide de la règle des doigts de la main droite : pouce en M le long du Contour C, index = MO, vise le centre O de C etmajeur = vecteur surface dS (sur la figure 7)

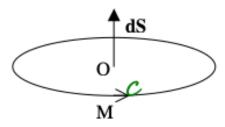


FIGURE 7 – Contour orienté d'une surface

Si la surface est fermée, alors le signe \iint est barré d'un rond et le flux au travers s'écrit :

$$\iint \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

Un champ vectoriel \vec{A} dont le flux est nul sur toute surface fermée entourant un volume quelconque est dit à flux conservatif (exemple : champ magnétique).

AV.6 Théorème de Stokes

Formule de Stokes ou du rotationnel:

$$\oint \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint \overrightarrow{rot} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$

La circulation du champ vectoriel \vec{A} sur un contour fermé \mathcal{C} est égale au flux de son rotationnel à travers n'importe quelle surface \mathcal{S} s'appuyant sur ce contour fermé.

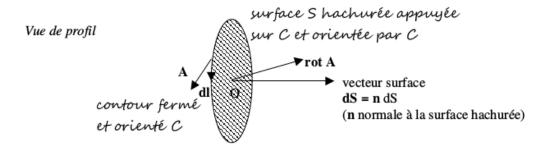


FIGURE 8 – Illustration du théorème de Stokes







On choisit une orientation arbitraire du contour C.

Le vecteur surface \overrightarrow{S} est alors orienté par \mathcal{C} selon la règle des doigts de la main droite : pouce sur le contour dans le sens choisi, l'index vise le centre O, le majeur indique le vecteur \overrightarrow{S} .

AV.7 Théorème d'Ostrogradski

Formule d'Ostrogradski ou « flux divergence » :

$$\iint \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint div \, \vec{A} \cdot dv$$

Le flux du champ vectoriel \vec{A} à travers une surface fermée \mathcal{S} est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume intérieur V délimité par cette surface.

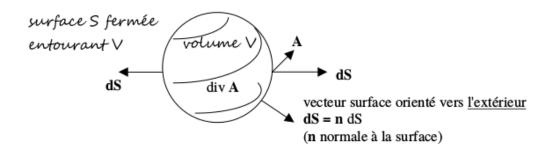


FIGURE 9 – Illustration du théorème d'Ostrogradski

Exemple simple

Prenons $\vec{A}(x,y,z) = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$. Alors $div \vec{A} = 3$.

D'après le théorème d'Ostrogradski:

$$\iint \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint div \, \vec{A} \cdot dv = 3V$$

Le volume V intérieur à toute surface $\mathcal S$ fermée et quelconque est tout simplement donné par

$$V = 1/3 \iint \vec{A}.\vec{dS}$$

Si la surface $\mathcal S$ fermée est composée de facettes planes, le calcul de cette intégrale est aisé.

AV.8 Lignes de champ

Si \overrightarrow{A} est un champ vectoriel, l'équation des lignes de champ est donnée par $\overrightarrow{A} = k\overrightarrow{dOM}$ (k réel), \overrightarrow{dOM} étant un élément tangent à la ligne de champ. On en tire les équations différentielles par élimination de k:







Coordonnées cartésiennes :

$$dx/A_x = dy/A_y = dz/A_z$$
 avec $\overrightarrow{dOM}(dx, dy, dz)$

Coordonnées cylindriques :

$$dr/A_r = rd\theta/A_\theta = dz/A_z$$
 avec $\overrightarrow{dOM}(dr, rd\theta, dz)$

Coordonnées sphériques :

$$dr/A_r = rd\theta/A_\theta = rsin\theta d\varphi/A_\varphi$$
 avec $\overrightarrow{dOM}(dr, rd\theta, rsin\theta d\varphi)$

 \vec{A} est tangent en tout point à la ligne de champ.

AV.9 Lignes ou surfaces équipotentielles

Si \vec{A} est un champ vectoriel tel que $\vec{A} = \overrightarrow{grad} V$ où V est une fonction "potentiel", l'équation des lignes ou surfaces équipotentielles est donnée par

$$dV = 0 = \overrightarrow{qrad} V \cdot \overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

impliquant que les lignes ou surfaces équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ.

Leur équation est donnée par V(x, y, z) = constante, qui définit une surface.

En deux dimensions dans le plan xOy, V(x,y) =constante définit une ligne équipotentielle.

En électrostatique, le champ électrique dérive toujours d'un potentiel scalaire V par la relation vectorielle $\vec{E} = -grad(V)$, V en volts.

Le long d'une ligne de champ, le potentiel V est toujours décroissant. Le champ électrique va ainsi du potentiel le plus fort vers le plus faible.

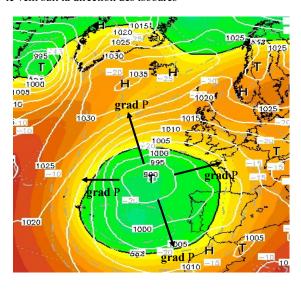
Il en est de même du champ de gravitation \vec{G} qui dérive du potentiel de gravitation V par la relation vectorielle $\vec{G} = -grad(V)$, V en Joule/kg.

En hydrodynamique, la relation $\vec{v} = grad(f)$, où \vec{v} est le champ vectoriel des vitesses, et f le potentiel des vitesses, ne vaut que dans le cas particulier d'un écoulement irrotationnel, c'est à dire pour lequel $\vec{rot}(\vec{v}) = 0$ (absence de tourbillons). Le potentiel des vitesses n'existe pas toujours et cette relation n'est donc pas générale.



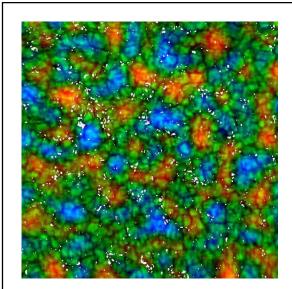
Exemple d'utilisation du GRADIENT en météo

- le vecteur **grad** P est orthogonal aux lignes isobares P(x,y) = constante
- si les lignes isobares sont serrées, alors le gradient de pression est élevé
- le vent suit la direction des isobares

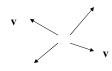


Zone verte 990 hPa: dépression T (P << 1013 hPa) Le vent tourne dans le sens trigo autour

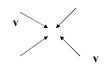
Zone orange 1035 hPa: Anticyclone H (P >> 1013 hPa) Le vent tourne dans le sens horaire autour



Mouvements divergents: $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$



Mouvements convergents : $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$



Exemple d'utilisation de la divergence : mouvements des cellules convectives sur la surface du soleil (carré de de 50000 km de côté au centre du soleil)

div v > 0 mouvements $\underline{divergents}$

 $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$ mouvements <u>convergents</u>

Exemple d'utilisation du rotationnel pour un écoulement dans le plan (xOy) Cas du tourbillon fluide de vitesse orthoradiale ${\bf v}$ dans le plan horizontal

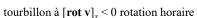
 $\left[\text{\textbf{rot }} \mathbf{v} \right]_z \! > \! 0 \quad \text{rotation dans le sens antihoraire (trigonométrique)}$

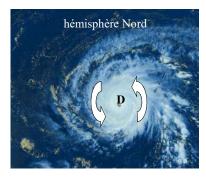
 $[\mathbf{rot} \ \mathbf{v}]_{\mathbf{z}}^{2} < 0$ rotation dans le sens horaire

Météo hémisphère Nord: rotation sens trigo autour d'une dépression D hémisphère Sud: situation inverse (orientation par la force de Coriolis)

½ rot(v) est le vecteur tourbillon







tourbillon à $[\mathbf{rot} \ \mathbf{v}]_z > 0$ rotation antihoraire





MOOC (ASTRO)PHYSIQUE: HYDRODYNAMIQUE ET MHD

J.M. Malherbe*

Printemps 2017

Cours

I Introduction : méthodes de mesure à distance du champ des vitesses

L'hydrodynamique traite des mouvements fluides et est basée sur la description du milieu comme constitué d'un gaz de vitesse macroscopique \vec{v} et de masse volumique ρ , sous l'action de forces comme les forces de pression, de viscosité, de pesanteur ou encore de Laplace (s'il y a des courants électriques). En présence de champ magnétique, l'hydrodynamique devient la magnéto hydrodynamique ou MHD, résultat du couplage entre les équations de l'hydrodynamique et de l'électromagnétisme (Maxwell).

I.1 Effet Doppler et vitesse projetée sur la ligne de visée

Lorsqu'une source se déplace par rapport à l'observateur, on peut montrer en relativité restreinte que la fréquence ν d'une onde émise par la source, ou sa longueur d'onde λ , se décalent :

- vers les basses fréquences ν' ou grandes longueurs d'onde λ' quand la source s'éloigne
- vers les hautes fréquences ν' ou courtes longueurs d'onde λ' quand la source s'approche

selon les formules:

$$\nu' = \nu \left(\frac{1 - v/C}{1 + v/C}\right)^{1/2}$$

$$\lambda' = \lambda \left(\frac{1 + v/C}{1 - v/C}\right)^{1/2}$$

^{*}LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France







v est la projection du vecteur vitesse de l'objet sur la ligne de visée. $C=3\times 10^5\, km/s$ est la vitesse de la lumière dans le vide. v est comptée positivement dans cette formulation pour un <u>éloignement</u>. Cette convention est adoptée pour l'univers extragalactique, mais on prend souvent l'opposée en physique solaire pour que la vitesse d'approche soit positive dans la direction de la verticale solaire.

On appelle $Z = (\lambda' - \lambda)/\lambda$ le décalage spectral (nombre sans dimension, nul si v = 0).

v se relie à Z par

$$v = C \left[\frac{(Z+1)^2 - 1}{(Z+1)^2 + 1} \right]$$

Les formules approchées v = CZ ou encore $(\nu' - \nu)/\nu = -v/C$ et $(\lambda' - \lambda)/\lambda = v/C$ sont valables lorsque $v < 0.1 \times C$ ou $Z \ll 1$.

Elles sont facilement démontrables en mécanique classique (vitesse absolue = vitesse relative + vitesse d'entraînement), et valables aussi pour les ondes sonores dans les fluides (exemple : ondes sonores émises par un avion ou une sirène d'ambulance, décalées vers les aigus lorsque l'objet s'approche, ou les graves lorsqu'il s'éloigne).

a) Application à la mesure d'éloignement des galaxies et l'expansion de l'Univers

En 1929, Edwin Hubble confirme expérimentalement l'expansion de l'Univers prédite deux ans plus tôt par l'abbé Lemaître, de l'Université catholique de Louvain (Belgique), à partir de la théorie de la relativité générale. Hubble, au télescope de 2.50 m du Mont Wilson (Californie), observait un décalage systématique des spectres des galaxies vers le rouge, proportionnel à leur distance, phénomène appelé "loi de Hubble".

La loi de Hubble est v = Hd, où $H = 70 \, km s^{-1} Mpc^{-1}$ (constante de Hubble) et d la distance de la galaxie en méga parsec (Mpc) avec $1 \, pc = 3.26 \, AL = 3.1 \times 10^{16} \, m$, distance sous laquelle on voit la distance Soleil Terre ($1.5 \times 10^{11} \, m$) sous un angle de 1 seconde de degré (soit 1/3600 de degré).

Dans l'exemple ci-dessous (Figure 1), la raie d'émission de l'Oxygène ionisé à $\lambda = 500.7\,nm$ au repos se retrouve dans le spectre des galaxies, mais à une position en longueur d'onde λ' décalée vers le rouge par effet Doppler en raison d'une vitesse de récession. Il en est de même pour la raie $H\alpha$ à $656.2\,nm$ au repos. La vitesse de récession v se calcule par les formules ci dessus après avoir obtenu Z à partir des spectres. Pour cet exemple, Z=0.2 et il faut appliquer la formule relativiste.







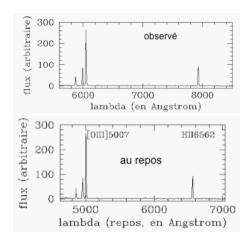
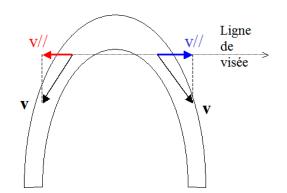


FIGURE 1 – Exemple de spectre de galaxie. 1 Angström = 0.1 nm. Les raies sont décalées vers le rouge (grandes longueurs d'onde) par rapport à leur position de repos

b) Application à la physique solaire

On utilise les formules non relativistes avec la convention de signe opposée :

$$(\nu' - \nu)/\nu = v/C$$
 et $(\lambda' - \lambda)/\lambda = -v/C$ car en général $v \ll C$.



Observation du champ des vitesses à distance par effet Doppler sur la ligne de visée (projection v// du vecteur v):

$$v//=C~\underline{\Delta v}/\nu$$

v fréquence l'onde lumineuse

Av décalage Doppler en fréquence

 $\Delta v > 0$ mouvement d'approche

 $\Delta y < 0$ mouvement d'éloignement

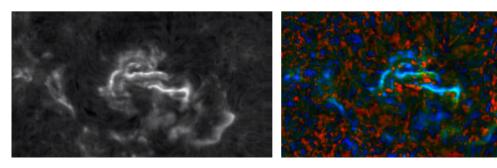


FIGURE 2 – Exemple d'une éruption solaire : intensité et vitesse Doppler (projetées sur la ligne de visée)







I.2 Mouvements propres ou vecteur vitesse orthogonal à la ligne de visée

La mesure des mouvements propres repose sur le déplacement des structures <u>dans le plan du ciel</u> orthogonal à la ligne de visée. Lorsque qu'il s'agit d'objets ponctuels (points isolés en mouvement), la mesure est aisée. Par contre, lorsqu'il s'agit d'objets <u>étendus</u>, comme la surface solaire (Figure 3), on procède par <u>corrélation croisée</u> entre deux images successives. La mesure est souvent entachée d'un bruit important, si bien qu'une moyenne spatio temporelle sera nécessaire pour obtenir des résultats satisfaisants. Ci-dessous, les images de départ (Figure 3) ont une résolution de $80 \, km$, mais le champ de vitesses obtenu (Figure 4) n'a qu'une résolution de $3 \, 200 \, km$.

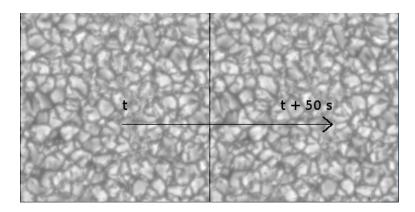


FIGURE 3 – Mouvements sur la surface solaire, résolution de $80\,km$

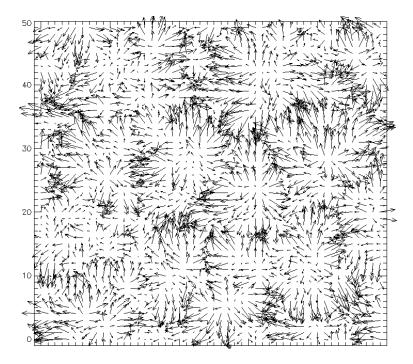


FIGURE 4 – Champ des vitesses V_x , V_y (vecteur vitesse dans le plan du ciel) correspondant







Divergence et vorticité du champ des vitesses dans le plan du ciel

À partir des vitesses dans le plan du ciel $V_x(x, y)$ et $V_y(x, y)$, il est possible d'en déduire trois quantités intéressantes en hydrodynamique, résultant souvent de moyennes spatio temporelles :

— <u>le module</u> du vecteur vitesse horizontal (Figure 5)

$$V_h = (V_x^2 + V_y^2)^{1/2}$$

— la divergence (Figure 6, gauche)

$$div \vec{v} = \partial V_x / \partial x + \partial V_y / \partial y$$

indiquant les mouvements convergents $(div \, \vec{v} < 0)$ ou divergents $(div \, \vec{v} > 0)$ — la vorticité (Figure 6, droite)

$$V = r\vec{o}t \, \vec{v} \cdot \vec{e_z} = \partial V_y / \partial x - \partial V_x / \partial y$$

indiquant les mouvements rotatifs dans le sens horaire (V < 0) ou trigonométrique (V > 0).

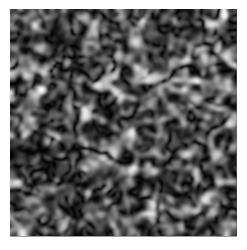


FIGURE 5 – Module du vecteur vitesse horizontal $V_h = (V_x^2 + V_y^2)^{1/2}$

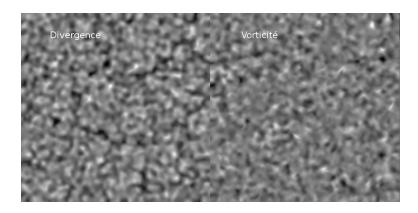


FIGURE 6 – Divergence et vorticité





II Cinématique des fluides

II.1 Remarques générales sur les équations de conservation

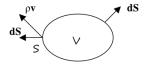


FIGURE 7 – Volume entouré par une surface et élément de surface \vec{dS}

Les lois de conservation d'un champ scalaire $\rho(x, y, z, t)$ (exemple : densité volumique de masse ou d'énergie) suivent une équation de conservation du type :

$$\partial \rho / \partial t + div(\rho \vec{v}) = s$$

où \vec{v} est le vecteur vitesse et s un terme source ou perte (selon son signe). Par intégration sur un volume \mathcal{V} fermé par une surface \mathcal{S} , on obtient en appliquant le théorème d'Ostrogradski, où dv est un élément de volume et \overrightarrow{dS} un élément de surface orientée ($\overrightarrow{dS} = \vec{n} dS$, \vec{n} normale à la surface) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\iiint \rho \, dv \right] + \iint \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint s \, dv$$

 $\iint \rho \vec{v} \cdot \vec{dS}$ est le flux de la quantité ρ à la <u>frontière</u> entourant le volume \mathcal{V} . Introduisons v_n , composante normale de \vec{v} à la surface fermée \mathcal{S} qui enveloppe le volume :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\iiint \rho \, dv \right] + \iint \rho \, v_n \, dS = \iiint s \, dv$$

On constate, à partir de cette équation, que la quantité $\iiint \rho \, dv$ (par exemple : masse, énergie du volume \mathcal{V}) est <u>conservative</u> à condition que :

- il n'y ait pas de terme source ou perte (s = 0)
- le flux de ρ sur la frontière soit nul, $\iint \rho v_n dS = 0$ (les entrées compensent les sorties aux frontières)

En régime <u>stationnaire</u> et en l'absence de terme source s, $div(\rho \vec{v}) = 0$ se traduit par $\iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ sur la surface fermée S, ce qui signifie que les entrées sont compensées par les sorties aux frontières.

Remarque: L'équation de Maxwell flux $div \vec{B} = 0$ a la même signification: $\iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 \text{ sur la surface fermée } \mathcal{S} \text{ entourant le volume } \mathcal{V} \text{ implique que le flux magnétique entrant est égal au flux sortant.}$







Équation de conservation de la masse (équation de continuité)

 $\partial \rho/\partial t + div(\rho \vec{v}) = 0$ où $\rho \vec{v}$ est la densité volumique de quantité de mouvement

En régime <u>stationnaire</u>, $div(\rho \vec{v}) = 0$ signifie $\iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ sur la surface fermée \mathcal{S} entourant le volume \mathcal{V} ; c'est la conservation du débit massique (en $kg \, s^{-1}$):

 $masse\ entrante = masse\ sortante.$

Si le fluide est incompressible, $\iint \vec{v} \cdot \vec{dS} = 0$ est la conservation du <u>débit volumique</u> (en $m^3 s^{-1}$):

volume entrant = volume sortant.

II.2 Écoulements incompressibles et irrotationnels

 $div \, \vec{v}$ caractérise les mouvements convergents/divergents

Un champ de vitesse, en coordonnées polaires, tel que

$$\vec{v} = v_r \, \vec{e_r} = k \, r \, \vec{e_r}$$
 avec k constante

est tel que

$$\vec{rot} \, \vec{v} = \vec{0} \text{ et } div \, \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = 2k$$

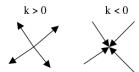


FIGURE 8 – k > 0 les mouvement sont divergents, k < 0 les mouvements sont convergents

$\vec{rot}\,\vec{v}$ caractérise les mouvements de rotation, les tourbillons

Un champ de vitesse, en coordonnées polaires, tel que

$$\vec{v} = v_{\theta} \, \vec{e_{\theta}} = \omega \, r \, \vec{e_{\theta}}, \quad \text{avec } \omega \text{ constante}$$

est tel que

$$div \, \vec{v} = 0 \text{ et } r\vec{o}t \, \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \, v_{\theta})}{\partial r} \, \vec{e_z} = 2\omega \, \vec{e_z}$$

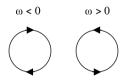


FIGURE 9 – ω < 0 : le fluide est en rotation dans le sens horaire, sa vorticité 2 ω est négative, ω > 0 : le fluide est en rotation dans le sens trigonométrique, sa vorticité 2 ω est positive.









 $\vec{rot} \, \vec{v}$ est la vorticité $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \, \vec{rot} \, \vec{v}$ est le vecteur tourbillon

Lignes fluides ou lignes de courant

Lignes du champ des vitesses définies en un point M par la colinéarité entre $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ et la tangente locale à la ligne de champ \overrightarrow{dOM} , soit $\vec{v} = k \, \overrightarrow{dOM} \, (k \, \text{réel})$, ce qui donne les équations :

$$dx/v_x = dy/v_y = dz/v_z$$

Écoulement incompressible

Un tel écoulement est à divergence nulle :

$$div \vec{v} = 0$$

Écoulement irrotationnel à potentiel des vitesses

Un écoulement est dit irrotationnel lorsque sa vorticité est nulle :

$$\vec{rot} \, \vec{v} = \vec{0}$$

Dans ce cas, il existe une fonction potentiel des vitesses φ telle que

$$\overrightarrow{\vec{v}} = \overrightarrow{grad} \, \varphi$$

et si en plus le fluide est incompressible, ce potentiel obéit à l'équation de Laplace

$$\Delta \varphi = 0$$

Écoulements 2D irrotationnels incompressibles dans un plan xOy

Un tel écoulement est tel que $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ et $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$.

C'est l'analogue des champs potentiels en magnétostatique. On a l'équation de Laplace :

$$\Delta \vec{v} = \vec{0}$$

Dans un espace à deux dimensions (plan xOy) avec $\vec{v}(v_x, v_y, 0)$ dépendant seulement des coordonnées x et y de l'espace, on peut écrire $\vec{v} = \overrightarrow{grad} \varphi(x, y)$ fonction potentiel d'une part, et d'autre part $\vec{v} = \overrightarrow{rot} (\psi(x, y) \vec{e_z})$, ce qui implique $\vec{v} = \overrightarrow{grad} \psi \wedge \vec{e_z}$, avec $\overrightarrow{grad} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)$.

 $\varphi(x,y) = \text{constante}$ est l'équation des lignes équipotentielles

 $\psi(x,y) = \text{constante est l'équation des lignes de champ ou lignes fluides}$







De l'égalité $\vec{v} = \overrightarrow{grad} \varphi = \overrightarrow{grad} \psi \wedge \vec{e_z}$, on voit que les fonctions $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ obéissent aux conditions de Cauchy :

$$\begin{cases} v_x = \partial \varphi / \partial x = \partial \psi / \partial y \\ v_y = \partial \varphi / \partial y = -\partial \psi / \partial x \end{cases}$$

impliquant $\Delta \varphi = \Delta \psi = 0$. Les deux fonctions sont donc harmoniques car leur Laplacien est nul.

Posons z=x+iy et $z^*=x-iy$ son conjugué et considérons la fonction complexe $f(z,z^*)=\varphi+i\psi$

On peut évaluer assez aisément $\partial f/\partial z$ ainsi que $\partial f/\partial z^*$. Par exemple,

$$\partial f/\partial z = (\partial f/\partial x)(\partial x/\partial z) + (\partial f/\partial y)(\partial y/\partial z)$$
 et $\partial f/\partial z^* = (\partial f/\partial x)(\partial x/\partial z^*) + (\partial f/\partial y)(\partial y/\partial z^*)$

À l'aide du changement de variable : $x = 1/2(z+z^*)$ et $y = -i/2(z-z^*)$, on trouve :

$$\partial x/\partial z = 1/2, \ \partial y/\partial z = -i/2, \ \partial x/\partial z^* = 1/2$$

et
$$\partial y/\partial z^* = i/2$$

Sachant que $f(z,z^*)=\varphi+i\psi,$ on obtient finalement :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$$

On a donc démontré les deux conclusions essentielles suivantes :

La fonction complexe $f(z)=\varphi+i\psi$ est une fonction analytique de la variable z=x+iy et $df(z)/dz=v_x-iv_y$

Le champ des vitesses complexe $v_x - iv_y$ dérive donc du potentiel complexe $f(z) = \varphi + i\psi$

Exemple: Si l'écoulement se fait à vitesse constante,

$$f(z) = (v_x - iv_y)z = (v_x - iv_y)(x + iy) = (x v_x + y v_y) + i(-x v_y + y v_x) = \varphi + i\psi$$

 $\varphi(x,y) = x v_x + y v_y$ donne les lignes équipotentielles $y = -(v_x/v_y) x + \text{cte}$ (droites) $\psi(x,y) = -x v_y + y v_x$ donne les lignes de champ $y = (v_y/v_x) x + \text{cte}$ (droites)







II.3 Analogie cinématique des fluides incompressibles et magnétostatique

$$\begin{cases} div \, \vec{v} = 0 \\ r\vec{o}t \, \vec{v} = 2 \, \vec{\Omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} div \, \vec{B} = 0 \\ r\vec{o}t \, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

sont des équations analogues ; \vec{v} est à flux conservatif et obéit au "théorème d'Ampère" :

$$\int \vec{v} \cdot \vec{dl} = 2 \iint \vec{\Omega} \cdot \vec{dS}$$

La circulation du champ de vitesse \vec{v} sur un contour fermé \mathcal{C} est égal au flux de la vorticité au travers de la surface \mathcal{S} enlacée par ce contour.

Exemple: Cas d'un vecteur tourbillon constant, écoulement orthoradial On choisit un contour circulaire de rayon r sur lequel s'appuie le disque de surface πr^2 $\int \vec{v} \cdot \vec{dl} = 2\pi r v \iint \vec{\Omega} \cdot \vec{dS} = \Omega \pi r^2 \text{ d'où l'écoulement orthoradial (tourbillon) } v = \Omega r$

II.4 Analogie écoulements irrotationnels incompressibles et électrostatique

$$\begin{cases} div \ \vec{v} = s \\ \vec{v} = \overrightarrow{grad} \ \varphi \\ r\overrightarrow{ot} \ \vec{v} = \vec{0} \end{cases} \qquad \begin{cases} div \ \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \vec{E} = -\overrightarrow{grad} \ V \\ r\overrightarrow{ot} \ \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

où s est un terme source ou perte en s^{-1} (selon son signe); ces équations sont analogues; \vec{v} est à circulation conservative et obéit au "théorème de Gauss" :

$$\boxed{\iint \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint s dV = S(m^3 s^{-1})}$$

Le flux du champ de vitesse \vec{v} à travers une surface fermée \mathcal{S} est égal au débit S de la source intérieure au volume \mathcal{V} entouré par cette surface.

Exemple : Cas d'une source à symétrie sphérique de débit d pour r < R et nul pour r > R

L'écoulement est radial; on choisit une surface de Gauss sphérique de rayon r

si $r < R : v4\pi r^2 = s4/3\pi r^3$ d'où l'on déduit v = sr/3

si r > R: $v4\pi r^2 = s4/3\pi R^3$ d'où l'on déduit $v = sR^3/3r^2$







MOOC (ASTRO)PHYSIQUE: HYDRODYNAMIQUE ET MHD

J.M. Malherbe*

Printemps 2017

Cours

III Hydrostatique

Celui-ci régit l'équilibre d'un fluide stationnaire au repos $(\vec{v} = \vec{0})$ soumis à diverses forces (pesanteur, force d'inertie d'entraînement si rotation, force de Laplace si courants...).

Équilibre entre les forces de pression et la force de gravité :

$$\overrightarrow{grad}P = \rho \, \vec{g}$$

où P désigne la pression (Pa), $\rho \vec{g}$ la force de pesanteur par unité de volume $(N \, m^{-3})$, ρ étant la masse volumique $(kg \, m^{-3})$ et \vec{g} l'accélération de la pesanteur locale $(m \, s^{-2})$ qui peut dépendre des coordonnées de l'espace.

Cas d'un fluide incompressible avec $\vec{g} = -g \, \vec{e_z}$ (g constante, accélération de la pesanteur)

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \implies P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{H} \right)$$

où P_0 est la pression au sol en z=0 et $H=P_0/(\rho g)$ une échelle de hauteur (m). Par exemple, pour de l'eau, H vaut $10\,m$. Pour du mercure, $H=76\,cm$. Le poids d'une colonne d'eau de $10\,m$ ou de mercure de $76\,cm$ réparti sur un mètre carré exerce une pression égale à la pression atmosphérique terrestre $(1\,bar=10^5\,Pa)$. La pression augmente si z<0; dans l'eau, elle augmente d'un bar tous les $10\,m$.



^{*}LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France





Cas d'un fluide incompressible dans un corps sphérique homogène de rayon ${\cal R}$

Une planète tellurique peut, en première approximation, être représentée par une sphère homogène incompressible de rayon R et masse volumique ρ . Le champ de gravitation interne est donné par le théorème de Gauss du champ de gravitation (cours d'électromagnétisme) qui s'énonce ainsi : le flux du champ de gravitation sur une surface <u>fermée</u> est égal à la masse <u>intérieure</u> multipliée par $(-4\pi K)$, où K est la constante d'attraction universelle $(6.67 \times 10^{-11} SI)$.

$$\iint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi K M_{interieure}$$

On choisit une surface de Gauss sphérique de rayon r < R; elle renferme la masse $4/3\pi r^3 \rho$:

$$g(r)4\pi r^2 = -4\pi K \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right) \Rightarrow \vec{g}(r) = -\left(\frac{4}{3}\pi K\right) \rho r \vec{e_r}$$

En valeur absolue, g est nul au centre de la planète (r=0) et maximal en surface (r=R) où l'on a la loi de Newton : $\vec{g}(R) = -KM/R^2\vec{e_r}$ avec $M=4/3\pi R^3\rho$ masse du corps sphérique homogène.

$$\frac{dP}{dr} = \rho g(r) = -(4/3\pi K)\rho^2 r$$

 $\Rightarrow P(r) = (2/3\pi K)\rho^2(R^2-r^2)$ en supposant la pression nulle en surface, soit P(R) = 0On peut alors en déduire la pression centrale :

$$P(0) = P_{centrale} = (2/3\pi K)\rho^2 R^2$$

Exemple : Terre : $\rho = 5\,500\,kg\,m^{-3},\,R = 6\,400\,km,\,P_{centrale} = 1.7\times10^{11}\,Pa$

Cas d'un fluide compressible suivant la loi de Mariotte $P/\rho=P_0/\rho_0=$ constante avec q= constante

Ce cas correspond par exemple à un gaz parfait isotherme (atmosphère en première approximation)

$$\frac{dP}{dz} = -P\left(g\frac{\rho_0}{P_0}\right) \Rightarrow P(z) = P_0 e^{-z/H} \text{ où } H = \frac{P_0}{\rho_0 g} \text{ est une échelle de hauteur } (m)$$

Exemple: Atmosphère terrestre: H = 8 km, photosphère solaire H = 300 km







Cas d'un fluide incompressible en rotation autour de l'axe Oz (planète, étoile...)

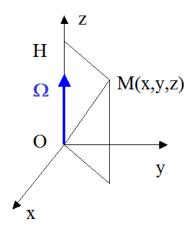


FIGURE 1 – Fluide incompressible en rotation autour de l'axe Oz

 $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e_z}$ est le vecteur rotation du fluide autour de l'axe Oz (unité : radian/s, c'est une vitesse angulaire).

 ρ est la masse volumique du fluide supposée constante et uniforme.

 \vec{g} est le champ de gravitation. Il dépend du point M(x,y,z).

H est la projection de M sur l'axe de rotation $\vec{e_z}$.

L'équation d'équilibre possède un terme de plus : la force d'inertie d'entraı̂nement centrifuge. En tout point M(x, y, z) du fluide, on a :

$$\overrightarrow{grad} P = \rho \, \vec{g} + \rho \, \Omega^2 \, \overrightarrow{HM}$$

Pour connaître le champ de gravitation interne au corps en rotation supposé proche de la symétrie sphérique), on utilise la même méthode que plus haut (théorème de Gauss du champ de gravitation) :

$$\vec{g} = -(4/3\pi K)\rho r\vec{e_r} = -(4/3\pi K)\rho \overrightarrow{OM}$$
 où $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z} = \overrightarrow{grad}(x^2 + y^2 + z^2)/2$
$$\Rightarrow \vec{g} = -(2/3\,\pi K)\rho \,\overrightarrow{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\overrightarrow{HM} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} = \overrightarrow{grad}(x^2 + y^2)/2$$

L'équation d'équilibre devient :

$$\overrightarrow{grad} P = -(2/3\pi K)\rho^2 \overrightarrow{grad} (x^2 + y^2 + z^2) + \rho \Omega^2 \overrightarrow{grad} (x^2 + y^2)/2$$

On obtient par intégration :

$$P = -(2/3\pi K)\rho^2(x^2+y^2+z^2) + \rho\Omega^2(x^2+y^2)/2 + \text{ constante}$$







soit $P(x,y,z)=-(2/3\pi K\rho^2-\rho\Omega^2/2)(x^2+y^2)-(2/3\pi K)\rho^2z^2+$ constante expression dans laquelle $\rho\Omega^2/2<<2/3\pi K\rho^2$

P=0 (en surface) donne l'équation d'un ellipsoïde de révolution autour de Oz ou « géoïde » de demi axes $a=[2/3\pi K\rho^2]^{-1/2}$ (selon Oz) et $b=[2/3\pi K\rho^2-\rho\Omega^2/2]^{-1/2}$ (selon Ox et Oy).

Aplatissement : $(b-a)/a \approx 3\Omega^2/(8\pi K\rho)$

Exemple:

Terre : $\rho = 5\,500\,kg\,m^{-3}$, période de rotation 24 heures, $(b-a)/a \approx 0.0017$ Soleil : $\rho = 1\,400\,kg\,m^{-3}$, période de rotation 26 jours, $(b-a)/a \approx 10^{-5}$

IV Hydrodynamique : Équation du mouvement

IV.1 Équation d'Euler du mouvement fluide

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{grad} P + \vec{f}$$

où \vec{f} désigne les forces par unité de volume $(N\,m^{-3})$ autres que les forces dues à la pression P.

 $d\vec{v}/dt$ s'appelle dérivée particulaire de la vitesse. Comme la vitesse du fluide en un point M(x,y,z) de l'espace dépend de $x,\ y,\ z$ et t (description eulérienne à 4 variables), on peut écrire :

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt$$

d'où

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$= v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$= \left(v_x \frac{\partial}{\partial x}\right) \vec{v} + \left(v_y \frac{\partial}{\partial y}\right) \vec{v} + \left(v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \, \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}$$

Dans la description Lagrangienne, qui suit le fluide, la quantité $d\vec{v}/dt$ est l'accélération. Dans la description Eulérienne (position fixe), l'accélération est la somme de l'accélération <u>locale</u> $\partial \vec{v}/\partial t$ et de l'accélération <u>convective</u> $\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{v}$. L'opérateur $\vec{v} \cdot \overrightarrow{qrad}$ est

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$







Remarque: On a l'identité $\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{v} = \overrightarrow{grad} (\vec{v}^2/2) + \vec{rot} \vec{v} \wedge \vec{v}$ où $\vec{rot} \vec{v} = 2\vec{\Omega}$ (vecteur tourbillon); un écoulement irrotationnel est tel que $\vec{v} \cdot \overrightarrow{qrad} \vec{v} = \overrightarrow{qrad} (\vec{v}^2/2)$

L'équation du mouvement ou équation d'Euler devient :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \, \vec{v} \right] = -\overrightarrow{grad} \, P + \vec{f} \qquad (\vec{f} \text{ en } N \, m^{-3})$$

Par exemple, $\vec{f} = \rho \vec{g} + \vec{j} \wedge \vec{B} + \mu \Delta \vec{v}$ (en $N m^{-3}$), expression de la force dans laquelle:

- 1) $\rho \vec{g}$ est le poids volumique 2) $\vec{j} \wedge \vec{B}$ est la force de Laplace volumique, \vec{j} désignant la densité de courant $(A m^{-2})$ reliée à l'intensité du courant électrique total I (Ampères) par la loi $I = \iint \vec{i} \cdot d\vec{S}$ (flux de la densité \vec{i}).
- -3) $\mu\Delta\vec{v}$ sont les forces de frottement visqueuses par unité de volume; l'équation d'Euler en présence de viscosité porte alors le nom d'équation de Navier Stokes; dans cette expression, $\Delta \vec{v}$ est le Laplacien du vecteur vitesse; μ est la viscosité dynamique en Poiseuille (Pas ou encore $kg m^{-1} s^{-1}$); on définit aussi la quantité $\nu = \mu/\rho$ comme étant la viscosité cinématique en $m^2 s^{-1}$. Numériquement, et en première approximation pour un gaz, on a : $\mu = \nu \rho =$ $2.2 \times 10^{-17} T^{5/2} \, kg \, m^{-1} \, s^{-1}$ (Poiseuille), où T est la température en Kelvins ; - dans les conditions de la photosphère solaire, avec $T = 10^4 K$ et $\rho =$ $10^{-7} \, kg \, m^{-3}$, la viscosité dynamique μ est voisine de 10^{-7} Poiseuille et la viscosité cinématique ν est voisine de $1 m^2 s^{-1}$.
 - dans la couronne solaire, avec $T=10^6\,K$ et $\rho=10^{-12}\,kg\,m^{-3}$, on trouve μ voisin de 10^{-2} Poiseuille et ν voisin de $10^{10} \, m^2 \, s^{-1}$.

Equation de Navier Stokes stationnaire : exemple de l'écoulement de Couette plan

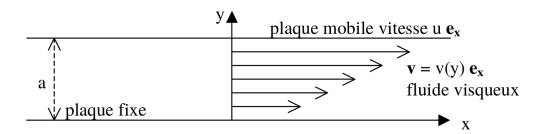


FIGURE 2 – Écoulement de Couette plan

Dans cet écoulement entre deux plans (y = 0 et y = a), le fluide visqueux est entraîné par une plaque mobile horizontale en y = a. Le problème ne dépend que de la variable y et la vitesse du fluide est selon Ox. Dans la direction Oy, l'équation de Navier Stokes est celle de l'équilibre hydrostatique :

$$-dP/dy - \rho g = 0$$
 d'où $P(y) = P(0) - \rho g y$ (si incompressible)







Dans la direction Ox, il n'y a pas de gradient de pression, l'équation de Navier Stokes se réduit à :

$$\Delta v = 0$$
 soit $d^2v/dy^2 = 0$

avec les conditions aux limites v(0) = 0 et v(a) = u, d'où v(y) = u(y/a)

Équation de Navier Stokes stationnaire : exemple de l'écoulement de Poiseuille plan

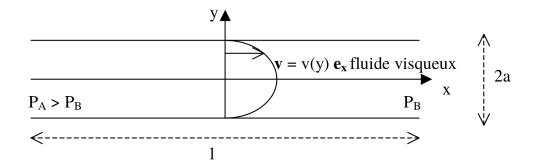


FIGURE 3 – Écoulement de Poiseuille plan

Dans cet écoulement entre deux plans (y = -a et y = a), le fluide visqueux est entraîné vers la droite par un gradient de pression uniforme et égal à $(P_B - P_A)/l < 0$. Le problème ne dépend que de la variable y et la vitesse du fluide est selon Ox où l'équation de Navier Stokes se réduit à :

$$-dP/dy + \mu \Delta v = 0 \text{ soit } d^2v/dy^2 = (P_B - P_A)/\mu \, l < 0$$

avec les conditions aux limites v(-a) = v(a) = 0, on obtient

$$v(y) = 1/2[(P_A - P_B)/\mu l](a^2 - y^2)$$

Le profil des vitesses est parabolique entre les deux plans.

La force de frottement fluide exercée sur les plans $y = \pm a$ de surface S est donnée par la loi :

$$\vec{F} = -\mu \left| \frac{dv}{dy} \right| S\vec{e_x}$$

en $y = \pm a$ (unité : N), elle est opposée au mouvement. ce qui donne en module : $F = [(P_A - P_B)/l]Sa$

Le débit volumique D est obtenu par intégration du profil des vitesses v(y) sur la section entre les plans $y=\pm a$, il est proportionnel au gradient de pression, qui fait avancer le fluide :

$$D = 2/3[(P_A - P_B)/\mu l] a^3 d$$
 (unité: $m^3 s^{-1}$)

où d est une dimension caractéristique orthogonale au plan de la figure, selon Oz (la section entre les plans étant de surface 2 a d)







Les échelles de temps caractéristiques : temps dynamique et temps diffusif

En l'absence de forces autres que visqueuses, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\boxed{\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \, \vec{v} \right] = \nu \rho \Delta \vec{v}}$$

la partie diffusive $\partial \vec{v}/\partial t = \nu \Delta \vec{v}$ (il s'agit d'une équation de diffusion pure) possède une constante de temps caractéristique, dite temps diffusif :

$$\tau_{diff} = L^2/\nu$$

et la partie convective

 $\partial \vec{v}/\partial t = -\vec{v}\cdot \overrightarrow{grad}\,\vec{v}$ possède une constante de temps, dite temps dynamique :

$$\tau = L/v$$

Le rapport de ces deux temps caractéristiques est appelé nombre de Reynolds (L et v sont respectivement des longueurs et vitesses caractéristiques du système fluide):

$$Re = \frac{\tau_{diff}}{\tau} = \frac{Lv}{\nu}$$

Re représente aussi le rapport entre la force convective $||\rho\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\vec{v}||$ et visqueuse $||\rho\nu\Delta\vec{v}||$.

Dans les conditions de la photosphère solaire, avec $T=10^4\,K$, $L=10^4\,km$, $v=1\,km/s$, $\nu=1\,m^2\,s^{-1}$, Re est voisin de 10^{10} , ce qui signifie que les termes visqueux sont négligeables dans ce régime. Dans la couronne, avec $T=10^6\,K$, $L=10^5\,km$, $v=100\,km/s$, $\nu=10^{10}\,m^2\,s-1$, Re avoisine 10^3 .

Écoulement permanent laminaire, turbulent

L'équation du mouvement devient en régime permanent et en ne considérant que les forces de pression et de frottement :

$$\rho \, \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \, (\vec{v}) = -\overrightarrow{grad} \, P + \nu \rho \Delta \vec{v}$$

Si $Re \ll 1$, alors

$$||\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\left(\vec{v}\right)||\ll||\nu\Delta\vec{v}||$$

il reste $-\overrightarrow{grad}P + \nu\rho\Delta \vec{v} = \vec{0}$; cette équation est <u>linéaire</u> en \vec{v} et l'écoulement est <u>laminaire</u> car sa solution est unique.

Si $Re \gg 1$, alors

$$||\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\vec{v})|| \gg ||\nu \Delta \vec{v}||$$

il reste $\overrightarrow{grad} P + \rho \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{grad} (\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$; cette équation est <u>non linéaire</u> en \overrightarrow{v} et l'écoulement est <u>turbulent</u>; il développe des petites échelles locales de variation.







Force d'inertie de Coriolis

La force d'<u>inertie</u> de Coriolis a une action sur le mouvement d'un fluide dans un référentiel en rotation, comme une étoile. Si $\vec{\Omega}$ est la vitesse angulaire de rotation de l'étoile autour de son axe, la force d'inertie de Coriolis est, par unité de volume, $\vec{f} = -2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ (en $N m^{-3}$). Le temps caractéristique associé est :

$$\tau_c = \frac{1}{\Omega}$$

Sachant que $\tau = L/v$ est le temps dynamique, on appelle nombre de Rossby le rapport :

$$R_o = \frac{\tau_c}{\tau} = \frac{v}{\Omega L}$$

 R_o représente aussi le rapport entre la force advective $||\rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\vec{v})||$ et de Coriolis $||\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{v}||$.

Dans les conditions de la photosphère solaire, avec $L=10^4\,km,\ v=1\,km/s,$ $\Omega=2.5\times 10^{-6}\,rd\,s^{-1},\ R_o$ est voisin de 100, ce qui signifie que la force de Coriolis peut souvent être négligée. Cependant, aux grandes échelles $(L>10^5\,km)$, elle joue un rôle dans la déformation des régions actives.

Exemple : Rôle de la force d'inertie de Coriolis : écoulement géostrophique On rencontre de tels écoulements en météorologie terrestre ou sur les planètes géantes gazeuses. Dans un tel écoulement, la force d'inertie de Coriolis est équilibrée par le gradient de pression :

$$\boxed{-\overrightarrow{grad}\,P-2\,\rho\,\vec{\Omega}\wedge\vec{v}=\vec{0}} \ \ \text{où} \ \ \vec{\Omega}=\Omega\vec{e_z}$$

on en déduit : $\vec{e_z} \wedge \vec{v} = -(1/2 \, \rho \, \Omega) \overrightarrow{grad} \, P$

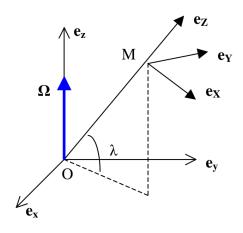


FIGURE 4 – Écoulement géostrophique







Considérons un point M à la surface d'une planète en rotation autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire Ω .

Soit $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ le trièdre fixe et $(\vec{e_X}, \vec{e_Y}, \vec{e_Z})$ le trièdre local au point M, le plan $(\vec{e_X}, \vec{e_Y})$ étant horizontal en M, et $\vec{e_Z}$ la verticale locale.

$$\vec{e_Z} \wedge (\vec{e_z} \wedge \vec{v}) = -(1/2 \,\rho\Omega)\vec{e_Z} \wedge \overrightarrow{grad} P$$

Nous supposons que le vecteur vitesse \vec{v} est contenu dans le plan tangent en M donc horizontal de sorte que $\vec{e_Z} \cdot \vec{v} = 0$.

 $\vec{e_Z} \wedge (\vec{e_z} \wedge \vec{v}) = (\vec{e_Z} \cdot \vec{v})\vec{e_z} - (\vec{e_Z} \cdot \vec{e_z})\vec{v} = -\sin \lambda \vec{v}$ où λ est la latitude du lieu (positive au Nord).

En conséquence

$$\overrightarrow{v} = (1/2 \,\rho\,\Omega \sin\lambda)\,\overrightarrow{e_Z} \wedge \overrightarrow{grad}\,P$$

Cette équation montre que la vitesse \vec{v} est orthogonale au gradient horizontal de pression; or pour une altitude Z fixe, les isobares (P = constante) sont aussi orthogonales à $\overrightarrow{grad}P$ puisque $dP = \overrightarrow{grad}P \cdot \overrightarrow{dOM} = 0$. Les lignes fluides d'un écoulement géostrophique sont donc parallèles aux isobares du champ de pression. On pourrait aussi écrire $\vec{v} = r\overrightarrow{ot} \left[-P/(2\rho\Omega sin \lambda)\overrightarrow{ez} \right]$ si ρ varie peu.

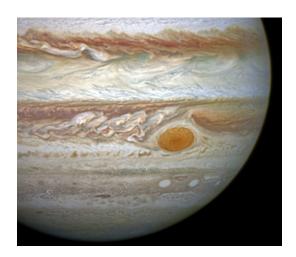


FIGURE 5 – La grande tache rouge de Jupiter, un anticyclone dans l'hémisphère Sud en rotation antihoraire (les sens s'inversent entre les hémisphères car $\sin \lambda$ change de signe)







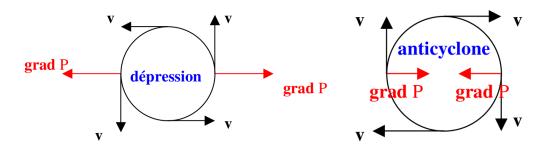


FIGURE 6 – À gauche : écoulement dans le sens antihoraire autour d'une dépression dans l'hémisphère Nord ($\lambda > 0$). À droite écoulement dans le sens horaire autour d'un anticyclone dans l'hémisphère Nord ($\lambda > 0$)

L'exemple fonctionne aussi pour la circulation des vents en météorologie terrestre.

IV.2 Mouvement d'un fluide en régime stationnaire

L'équation du mouvement en présence de gravité dans un fluide incompressible mis en mouvement par les gradients de pression (sans autre force que la gravité) s'écrit :

$$\rho \left[\overrightarrow{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\vec{v}) \right] = -\overrightarrow{grad} \, P + \rho \, \vec{g}$$

Elle se simplifie en régime stationnaire où $\partial/\partial t = 0$:

$$\overrightarrow{\rho \, \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\vec{v})} = -\overrightarrow{grad} \, P + \rho \, \vec{g}$$

où
$$\vec{g} = \overrightarrow{-grad}(gz)$$

Or $\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\vec{v}) = \overrightarrow{grad}(v^2/2) - \vec{v} \wedge \overrightarrow{rot}(\vec{v})$
Donc $\overrightarrow{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho gz) - \rho \vec{v} \wedge \overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$

Prenons la circulation le long d'une ligne fluide de A à B:

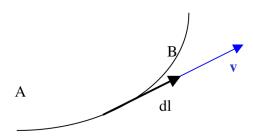


FIGURE 7 – Mouvement d'un fluide en régime stationnaire

$$\int_A^B \overrightarrow{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho \, gz) \cdot \overrightarrow{dl} - \int_A^B \rho [\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v})] \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$







Or le long d'une ligne fluide, \vec{v} et \vec{dl} sont colinéaires, donc $\int_A^B \rho[\vec{v} \wedge \vec{rot}(\vec{v})] \cdot \vec{dl} = 0$ il reste alors : $\int_A^B \overline{d(\rho v^2/2 + P + \rho gz)} = 0$, d'où

$$1/2 \rho v^2 + P + \rho gz =$$
constante sur une ligne fluide loi de Bernoulli

Cas particulier de l'écoulement incompressible et irrotationnel tel que $\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$

$$\overrightarrow{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho gz) - \rho \vec{v} \wedge \overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \text{ s'écrit}$$

$$\overrightarrow{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho gz) = \vec{0}$$
D'où $1/2 \rho v^2 + P + \rho gz = \text{constante uniforme pour toutes les lignes fluides.}$

b ou 1/2 pc + 1 + p gs <u>constante amiormo</u> pour toutes les figues fiuld

Équation compressible dans le repère de Frênet

Dans un système de coordonnées curvilignes (repère de Frênet local \vec{t} , \vec{n}) où $\vec{v} = v\vec{t}$:

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\vec{v}) = vd(v\vec{t})/ds = d(v^2/2)/ds\vec{t} + v^2\vec{n}/r$$

Selon
$$\vec{t}$$
:
$$\rho \, d(v^2/2)/ds = -dP/ds - \rho \, g \, dz/ds$$
 Selon \vec{n} :
$$\rho \, v^2/r = dP/dr + \rho \, g \, dz/dr$$

s est l'abscisse curviligne de M le long de la ligne fluide AB et $r=||\overrightarrow{CM}||$ est le rayon de courbure en M, C étant le <u>centre de courbure</u>.

En l'absence de gravité dans la direction \overrightarrow{CM} :

$$dP/dr = \rho v^2/r > 0$$
 effet Coanda

Autour d'un obstacle, la pression augmente en s'éloignant du centre de courbure : c'est l'effet Coanda

Exemple: Aile d'avion

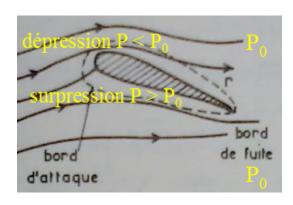


Figure 8 – Dépression et surpression d'une aile d'avion

La pression loin de l'aile est P_0 pression atmosphérique. Sur l'extrados (dessus) : $dP/dr > 0 \Rightarrow P_E < P_0$ dépression Sur l'intrados (dessous) : $dP/dr > 0 \Rightarrow P_I > P_0$ surpression







Si le milieu est incompressible ($\rho=$ constante), l'équation selon \vec{t} devient simplement :

 $1/2 \rho v^2 + P + \rho gz =$ constante sur une ligne fluide

On retrouve la loi de Bernoulli.

Exemple d'application 1 : loi de Torricelli (fluide incompressible)

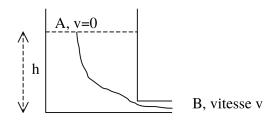


Figure 9 – Loi de Torricelli

Entre A et B points à la pression atmosphérique P_0 :

$$1/2\rho v^2 + P + \rho gz = \text{constante}$$

s'applique ainsi : $P_0 + \rho gh = 1/2\rho v^2 + P_0$, d'où $v = (2gh)^{1/2}$.

Exemple d'application 2 : siphon ou vidange d'un tube compressible de section constante

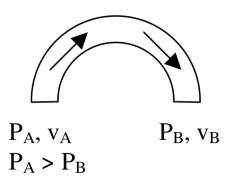


Figure 10 – Mécanisme du siphon de A vers B

 $\rho v dv/ds = -dP/ds - \rho d(gz)/ds$ avec $\rho v =$ constante donne une nouvelle équation :

$$d(\rho v^2 + P)/ds = -\rho d(gz)/ds$$

1) Si l'on néglige la gravité :
$$\rho v^2 + P = \text{constante entre } A \text{ et } B$$
 $\rho_A v_A = \rho_B v_B \ \rho_A v_A^2 + P_A = \rho_B v_B^2 + P_B = \rho_A v_A v_B + P_B \Rightarrow \rho_A v_A (v_B - v_A) = \rho_B v_B^2 + \rho_A v_A v_B^2 + \rho_A v_A v_B^2 + \rho_A v_A v_A^2 + \rho_A v_A^$







$$P_A - P_B \Rightarrow \boxed{v_B = v_A + (P_A - P_B)/\rho_A v_A}$$

2) Si l'on néglige la pression :

$$1/2v^2 + gz = \text{constante}$$



FIGURE 11 – Mécanisme de vidange (chute libre)

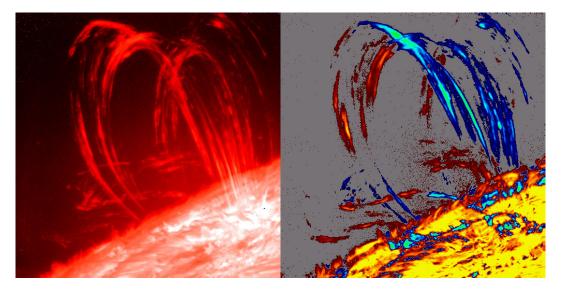


FIGURE 12 – Écoulement de Bernoulli dans des "tuyaux" magnétiques de l'atmosphère solaire : à gauche, densité de matière, à droite, vitesses Doppler (projection du vecteur \vec{v} sur la ligne de visée; en rouge mouvements d'éloignement, en bleu mouvements d'approche)

Exemple d'application 3 : pression d'arrêt sur un obstacle

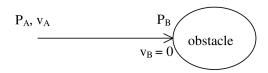


FIGURE 13 – Pression d'arrêt sur un obstacle







Entre A et $B: 1/2\rho v^2 + P + \rho gz = \text{constante d'où}$

$$1/2\rho v_A^2 + P_A = P_B > P_A$$

 P_B est la pression d'arrêt.

Application : sonde de Pitot pour la mesure de la vitesse d'un avion. La mesure de la surpression $P_B - P_A$ permet une mesure de v_A connaissant ρ .

Exemple d'application 4 : effet Venturi (col, obstacle)

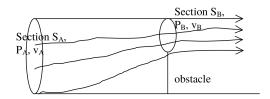


FIGURE 14 – Effet Venturi

Conservation du débit volumique du fluide incompressible :

$$S_A v_A = S_B v_B$$

$$S_A > S_B \implies v_B > v_A$$

$$1/2\rho v_A^2 + P_A = 1/2\rho v_B^2 + P_B v_B > v_A \implies P_B < P_A$$
 dépression au col

Exemple d'application 5 : Tourbillon de Rankine incompressible à vitesse angulaire ω constante (vortex, tornade, cyclone...)

Considérons un écoulement symétrie cylindrique autour de l'axe vertical Oz (vortex, tourbillon) dont le vecteur vitesse $\vec{v} = v(r) \vec{e_{\theta}}$ est orthoradial et ne dépend que de la variable radiale r (distance à l'axe Oz du tourbillon). On choisit les coordonnées cylindriques (r, θ, z) ; la gravité s'écrit $\vec{g} = -g \vec{e_z} =$, et l'écoulement obéit à la loi :

$$\vec{rot}(\vec{v}) = 2\omega \, \vec{e_z}$$

 $\omega \vec{e_z}$ est le vecteur rotation du tourbillon; la vorticité vaut 2ω . ω , vitesse angulaire, est telle que pour 0 < r < R, $\omega = \omega_0 = \text{constante}$ et pour r > R, $\omega = 0$

- <u>champ des vitesses</u> (fonction de r) déterminé par le théorème d'Ampère de la mécanique des fluides (basé sur le théorème de Stokes) :

$$\iint \vec{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2 \iint \omega dS = 2\omega S$$

où S est la surface (disque de surface πr^2) enlacée par un contour circulaire fermé de rayon r quelconque et de périmètre $2\pi r$:







 $r < R : v2\pi r = 2\omega_0\pi r^2 \implies v(r) = \omega_0 r$

 $\overline{r > R}$: $v2\pi r = 2\omega_0\pi R^2 \Rightarrow v(r) = \omega_0 R^2/r$ dans ce second cas r > R, la densité volumique de moment cinétique $[\rho vr]$ est constante et il existe un potentiel des vitesses $\Phi(\theta) = \omega_0 R^2 \theta$; l'écoulement est irrotationnel $(r\vec{o}t(\vec{v}) = \vec{0})$.

- champ de pression déterminé par l'équation d'Euler :

$$\overrightarrow{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho gz) - \rho \vec{v} \wedge \vec{rot}(\vec{v}) = 0$$

où $\vec{v} \wedge \vec{rot}(\vec{v}) = v(r)\vec{e_{\theta}} \wedge 2\omega\vec{e_z} = 2\omega v(r)\vec{e_r}$ Soit en projection sur $\vec{e_r}$:

$$d(\rho v^2/2 + P + \rho gz)/dr = 2\rho\omega v(r)$$

 $r < R : \omega = \omega_0; v = \omega_0 r \implies d(\rho \omega_0^2 r^2 / 2 + P + \rho gz) / dr = 2\rho \omega_0^2 r$

$$\Rightarrow \rho \omega_0^2 r^2 / 2 + P + \rho gz = \rho \omega_0^2 r^2 + cte \Rightarrow P + \rho gz - 1/2\rho \omega_0^2 r^2 = P_0$$

La constante P_0 est la pression en z=0 et en r=0.

 $\underline{r} > \underline{R}$: $\omega = 0$; $v = \omega_0 R^2/r \Rightarrow P + \rho gz + 1/2\rho\omega_0^2 R^4/r^2 = \text{constante}$ telle que les deux équations se raccordent en r = R, d'où

$$P + \rho \, gz + \rho \omega_0^2 R^2 (R^2 / 2r^2 - 1) = P_0$$

- <u>surface libre</u> : son équation z(r) est donnée par la relation P(r,z) = constante $\underline{r < R} : \rho \, gz - 1/2\rho\omega_0^2 r^2 = cte \implies z = 1/2(\omega_0^2/g)r^2 + z_0 \; (z_0 \; \text{constante}) : c'est une parabole$

 $\underline{r} > \underline{R} : \rho \, gz + 1/2\rho\omega_0^2 R^4/r^2 = cte \implies z = -1/2(\omega_0^2/g)R^4/r^2 + cte$ Les deux équations se raccordent en r = R, d'où $z = (\omega_0^2 R^2/g)(1 - R^2/2r^2) + z_0$ Lorsque $r \to \infty$, $z \to (\omega_0^2 R^2/g) + z_0$: il se forme une dépression de profondeur

$$h = \omega_0^2 R^2 / g$$

- gradient radial de pression

 $\underline{r} < \underline{R} : dP/dr = \rho \omega_0^2 r = \rho v^2/r > 0$ dirigé vers l'extérieur du vortex $\underline{r} > \underline{R} : dP/dr = \rho \omega_0^2 R^4/r^3 = \rho v^2/r > 0$ dirigé vers l'extérieur du vortex

- cas limite $R \to 0$

 $\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ d'où v(r) = C/r pour tout r > 0 (C moment cinétique constant) L'équation de Bernoulli $\rho v^2/2 + P + \rho gz = cte$, ce qui donne pour la surface libre $z = z_{\infty} - C^2/2gr^2$ (la dépression est de profondeur infinie)

- Cas où z=0

 $r < R : \omega = \omega_0; P = P_0 + 1/2\rho\omega_0^2r^2 > P_0 (P_0 \text{ pression en } z = 0 \text{ et } r = 0)$ $r > R : \omega = 0; P = P_0 + \rho\omega_0^2R^2(1 - R^2/2r^2) > P_0$





Lorsque $r \to \infty$, $P \to P_{\infty} = P_0 + \rho \omega_0^2 R^2$ (par exemple, P_{∞} est la pression atmosphérique).

On obtient alors en introduisant la pression à grande distance P_{∞} :

$$\frac{r < R}{r > R} : \omega = \omega_0; P = P_{\infty} + \rho \omega_0^2 R^2 (r^2 / 2R^2 - 1) < P_{\infty}$$

$$\underline{r > R} : \omega = 0; P = P_{\infty} - \rho \omega_0^2 R^4 / 2r^2 < P_{\infty}$$

$$r > R : \omega = 0; P = P_{\infty} - \rho \omega_0^2 R^4 / 2r^2 < P_{\infty}$$

La dépression maximale est ainsi égale à

$$\Delta_P = P_{\infty} - P_0 = \rho \omega_0^2 R^2$$

Un phénomène de cavitation (P=0) survient si $P_0=P_\infty-\rho\omega_0^2R^2<0$ soit si

$$\omega_0 > (P_{\infty}/\rho R^2)^{1/2}$$

La force verticale, vers le haut, exercée sur le vortex de rayon R de surface πR^2 vaut:

$$F = \int_0^R (P_\infty - P) 2\pi r dr = \int_0^R \rho \omega_0^2 R^2 (1 - r^2 / 2R^2) 2\pi r dr = 3/4 \Delta_P \pi R^2 \qquad \text{force d'arrachement}$$

Équation d'état du gaz IV.3

La pression cinétique P due aux collisions dans un gaz à la température T et composé de N particules par unité de volume est donnée par la loi des gaz parfaits :

$$P = NkT$$

Pour un gaz constitué de particules de masse m, on peut écrire $N = \rho/m$, alors

$$P = \rho kT/m = \rho RT/M$$

ou encore

$$PV = nRT$$

avec:

P pression (Pa)

T température (Kelvins)

V volume du gaz (m^3)

k constante de Botzmann $(1.38 \times 10^{-23} \, SI)$ et R constante des gaz parfaits (R = $kN = 8.32 J K^{-1} mole^{-1}$, avec N constante d'Avogadro égale à 6.02×10^{23} particules/mole)

N densité volumique de particules (m^{-3}) et ρ masse volumique $(kq m^{-3})$ m masse atomique du gaz (kg) et M masse molaire du gaz = mN (kg)n nombre de moles

Dans la couronne solaire où le milieu est totalement ionisé, on utilise $P=2\rho kT/m$, car pour un proton de masse m, il y a un électron de masse négligeable, mais qui contribue à la pression.







IV.4 Milieu isentropique (adiabatique réversible)

L'entropie S de n moles de gaz parfait découle de l'identité thermodynamique :

$$dU = -PdV + TdS$$

d'où
$$dS = dU/T + PdV/T$$

Or $dU = nCvdT = nR/(\gamma - 1)dT$ (loi de Joule) et PV = nRT (loi des gaz parfaits); on en déduit l'entropie du gaz parfait :

$$S = [nR/(\gamma - 1)]ln(P/\rho^{\gamma}) + cte$$

Pour une transformation isentropique sans échange de chaleur, on a donc

$$P/\rho^{\gamma} = \text{constante}$$

dans laquelle γ est l'exposant adiabatique ($\gamma = Cp/Cv = 5/3$ pour un gaz monoatomique, rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants, 7/5 pour un gaz diatomique).

Variations compressibles autour de la loi de Bernoulli

Considérons l'équation du mouvement stationnaire :

$$d(v^2/2)/ds = -(1/\rho)dP/ds - d(gz)/ds$$

- Dans le cadre d'une transformation isentropique :

 $P/\rho^{\gamma}=P_{0}/\rho_{0}^{\gamma}=$ constante implique $dP/P=\gamma d\rho/\rho,$ d'où :

$$d(v^{2}/2)/ds = -(\gamma P/\rho^{2})d\rho/ds - d(gz)/ds = -(\gamma P_{0}/\rho_{0}^{\gamma})\rho^{\gamma-2}d\rho/ds - d(gz)/ds$$

Cette équation s'écrit aussi : $d(v^2/2)/ds = -(\gamma/\gamma-1)(P_0/\rho_0^\gamma)d\rho^{\gamma-1}/ds - d(gz)/ds$, soit en intégrant :

$$v^2/2 + (\gamma/\gamma - 1)(P_0/\rho_0)(\rho/\rho_0)^{\gamma - 1} + gz = \text{constante}$$

La quantité $(\gamma P_0/\rho_0)$ est le carré de la vitesse du son (voir plus loin).

En introduisant $h=(\gamma/\gamma-1)(P/\rho)$ enthalpie massique, on obtient : $v^2/2+h+gz=$ constante.

- Dans le cadre d'une transformation isotherme :

 $P/\rho = P_0/\rho_0 = \text{constante implique } dP/P = d\rho/\rho, \text{ d'où}$:

$$d(v^{2}/2)/ds = -(P/\rho^{2})d\rho/ds - d(gz)/ds = -(P_{0}/\rho_{0})(1/\rho)d\rho/ds - d(gz)/ds$$

Cette équation s'écrit aussi : $d(v^2/2)/ds = -(P_0/\rho_0)dln\rho/ds - d(gz)/ds$, soit en intégrant :

$$v^2/2 + (P_0/\rho_0) \ln(\rho/\rho_0) + gz = \text{constante}$$
 $(P_0/\rho_0 \text{ carr\'e de la vitesse du son}).$



MOOC (ASTRO)PHYSIQUE: HYDRODYNAMIQUE ET MHD

J.M. Malherbe*

Printemps 2017

Cours

V Loi de conservation de l'énergie

Cette loi de conservation est la plus difficile à établir. Elle résulte du premier principe de la thermodynamique :

$$dU = -P \, dV + \delta Q$$

avec U fonction énergie interne, V volume, P pression, Q quantité de chaleur échangée. À masse constante, on a $m = \rho V$, soit $V = m/\rho$, ce qui donne par unité de masse :

$$\frac{dU}{m} = -Pd(\frac{1}{\rho}) + \frac{\delta Q}{m}$$

Appelons u et q respectivement l'énergie interne et la quantité de chaleur échangées par <u>unité de masse</u>. Il vient : $du = \frac{P}{\rho^2} d\rho + \delta q$, soit encore par unité de temps :

$$\frac{du}{dt} = \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\delta q}{dt}$$

Avec $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}$ dérivée particulaire, l'équation ci-dessus devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} u = \frac{P}{\rho^2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \rho \right] + \frac{\delta q}{dt}$$

L'équation de continuité de la masse nous donne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - div(\rho \, \vec{v}) = - \rho \, div \, \vec{v} - \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \, \rho$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} u = -\frac{P}{\rho} \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\delta q}{dt}$$

^{*}LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France







Multiplions maintenant les deux membres de cette dernière équation par ρ et combinons là avec l'équation de continuité; on obtient tous calculs faits **l'équation de continuité de l'énergie interne** :

$$\boxed{\frac{\partial (\rho \, u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \, u \, \vec{v}) = -P \operatorname{div} \vec{v} + \rho \frac{\delta q}{dt}}$$

Utilisons maintenant l'équation d'Euler du mouvement

$$\rho \left[\overrightarrow{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{grad} \, P + \vec{f}$$

dont on fait le produit scalaire avec le vecteur vitesse \vec{v} , ce qui donne une puissance :

$$\rho\,\vec{v}\,\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\right] = -\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\,P + \vec{f}\cdot\vec{v}$$

En combinant cette équation avec l'équation de continuité de la masse, on obtient l'équation de continuité de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\frac{\partial (\frac{1}{2}\rho\,v^2)}{\partial t} + div(\frac{1}{2}\rho\,v^2\vec{v}) = -\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\,P + \vec{f}\cdot\vec{v}}$$

On peut maintenant sommer l'équation de continuité de l'énergie interne et l'équation de continuité de l'énergie cinétique en remarquant que $div(P\vec{v}) = Pdiv\vec{v} + \overrightarrow{grad}P\cdot\vec{v}$, de sorte que finalement :

$$\frac{\partial (\rho\,u+\frac{1}{2}\rho\,v^2)}{\partial t}+div\left[(\rho\,u+\frac{1}{2}\rho\,v^2+P)\vec{v}\right]=\vec{f}\cdot\vec{v}+\rho\,\frac{\delta q}{dt}$$

Appelons maintenant U l'énergie interne par unité de volume et H l'enthalpie par unité de volume.

Comme $U = \rho u$ et H = U + P, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial (U + \frac{1}{2}\rho v^2)}{\partial t} + div \left[(H + \frac{1}{2}\rho v^2) \vec{v} \right] = \vec{f} \cdot \vec{v} + \rho \frac{\delta q}{dt} (W m^{-3}) \text{ avec } H = U + P$$

C'est l'équation de conservation de l'énergie.

Dans cette équation, $\rho \, \delta q/dt$ est le taux de production (si positif) ou de perte (si négatif) de chaleur par unité de volume et de temps $(W \, m^{-3})$. Il se met sous la forme phénoménologique :

$$\rho \frac{\delta q}{dt} = -\rho^2 Q(T) - div \vec{F} + \text{ autres termes } \dots$$

relation dans laquelle:







1) $\rho^2 Q(T)$ est le taux de pertes par rayonnement (la fonction Q(T) est expérimentale, elle est tabulée et présente un maximum autour de $10^5 K$ et décroît en 1/T à haute température, voir ci-dessous).

Temperature	i	χi	α_{ℓ}
$T \geqslant 8 \times 10^5 \text{K}$	1	5.51×10^{-30}	-1.0
$8 \times 10^5 \text{K} > T \geqslant 3 \times 10^5 \text{K}$	2	3.94×10^{-21}	-2.5
$3 \times 10^5 \text{K} > T \ge 8 \times 10^4 \text{K}$	3	$8.00 imes 10^{-35}$	0
$8 \times 10^{4} \text{K} > T \ge 1.5 \times 10^{4} \text{K}$	4	1.20×10^{-43}	+1.8
$1.5 \times 10^4 \text{K} > T$	5	4.92×10^{-67}	+7.4

FIGURE 1 – Pertes radiatives. Fonction Q(T) définie par morceaux en unités MKSA : $Q(T) = \chi T^{\alpha}/m_p^2$ avec m_p masse du proton = 1.67 $10^{-27}\,kg$

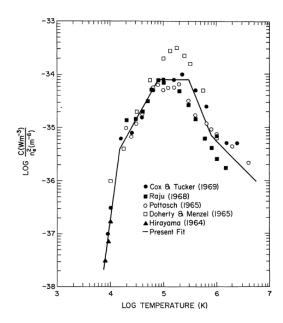


FIGURE 2 – Pertes radiatives. Fonction Q(T) définie par morceaux en unités MKSA : $Q(T)=\chi T^{\alpha}/m_p^2$ avec m_p masse du proton = 1.67 $10^{-27}\,kg$

2) $div\vec{F}$ est le taux de **conduction électronique de la chaleur** (parallèle aux lignes de champ magnétique); \vec{F} est le flux ou courant de chaleur mesuré en W/m^2 donné par la **loi de Fourier** :

$$\left| \vec{F} = -k_{\parallel} \overrightarrow{grad} T \right|$$
 avec $k_{\parallel} = k_0 T^{5/2} = 10^{-11} T^{5/2}$ MKSA, conductivité thermique du milieu

La conductivité thermique dépend de la température. Lorsque T varie peu, $div\vec{F}=k_{\parallel}\Delta T$.

Remarque : La loi de Fourier est à l'origine de l'équation de diffusion de la chaleur.

Si la vitesse est nulle, en posant $U = \rho C_v T (J m^{-3})$, avec C_v chaleur massique $(J k g^{-1})$.







$$\frac{\partial U}{\partial t} + div\vec{F} = 0$$

L'équation de diffusion de la chaleur porte sur la température T et s'écrit :

$$\rho C_v \partial T / \partial t = k_{\parallel} \Delta T$$

où ΔT est le Laplacien de la température.

Équation de conservation de l'énergie en présence de pesanteur

Si
$$\vec{f} = \rho \vec{g}$$
 avec $\vec{g} = -\overrightarrow{grad} \varphi$, $\varphi = gz$ étant le potentiel de pesanteur local, alors $\vec{f} \cdot \vec{v} = -\rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \varphi$

En combinant avec l'équation de continuité de la masse, on obtient $\vec{f} \cdot \vec{v} = -div(\rho \varphi \vec{v})$ $\partial(\rho\varphi)/\partial t$, d'où

$$\boxed{\frac{\partial (U + \rho \varphi + \frac{1}{2} \rho v^2)}{\partial t} + div \left[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi) \vec{v} \right] = \rho \frac{\delta q}{dt}}$$

 $U+\rho\,\varphi+{1\over2}\rho\,v^2$ est la densité volumique d'énergie interne + potentielle +cinétique.

Considérons maintenant un volume \mathcal{V} fermé par une surface \mathcal{S} .

La quantité $\iint \left[(H + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \varphi)\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} \right]$ représente le flux d'énergie aux frontières sur la surface \mathcal{S} .

Il y a conservation de l'énergie totale $\iiint (U + \rho \varphi + \frac{1}{2}\rho v^2) dV$ dans le volume \mathcal{V} si :

- le terme source ou perte $\frac{\delta q}{dt}$ est nul les entrées et sorties d'énergie par la surface frontière fermée $\mathcal S$ se compensent de sorte que

$$\iint \left[(H + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \varphi) \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} \right] = 0$$

En régime **stationnaire**, l'équation de conservation se résume à :

$$div[(H + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi)\vec{v}] = \rho \frac{\delta q}{dt}$$

Formulation de l'énergie interne et de l'enthalpie par V.1unité de volume et par unité de masse

Pour un gaz parfait, la loi de Joule s'écrit :

$$U = (\rho/M)C_vT$$
 et $H = (\rho/M)C_pT = U + P$







M est la masse molaire du gaz; C_p et C_v sont les capacités calorifiques molaires à pression et volume constants.

Avec $\gamma = C_p/C_v$, $C_p - C_v = R$ (constante des gaz parfaits), on a

$$C_v = R/(\gamma - 1)$$
 et $C_p = R\gamma/(\gamma - 1)$

Les fonctions U et H s'écrivent par unité de volume avec m masse atomique :

$$U = (\rho/m)kT/(\gamma - 1) = P/(\gamma - 1) \text{ et } H = (\rho/m)kT\gamma/(\gamma - 1) = P\gamma/(\gamma - 1)$$
 (J m⁻³)

Pour un gaz **monoatomique**, $\gamma = 5/3$ entraîne U = 3/2N kT et H = 5/2 N kT (N densité en m^{-3}).

Pour un gaz d'hydrogène totalement ionisé (dans la couronne solaire), on aurait en raison de la neutralité électrique $\rho = 2\rho_{protons}$

On utilise aussi l'énergie interne $\mathbf{massique}\ u$ et l'enthalpie $\mathbf{massique}\ h$ définies par :

$$u = kT/[m(\gamma - 1)] = [1/(\gamma - 1)](P/\rho) \text{ et } h = (kT/m)\gamma/(\gamma - 1) = (P/\rho)\gamma/(\gamma - 1)$$
(Jkg-1)

V.2 Équation de conservation de l'énergie en présence de champ magnétique

Pour mémoire seulement, en présence de champ électro-magnétique, l'équation devient :

$$\partial (U + \rho \varphi + \frac{1}{2} \rho v^2 + \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2 / 2 + \|\vec{B}\|^2 / 2\mu_0) / \partial t + div[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi)\vec{v} + \vec{P}] = \rho \frac{\delta q}{dt} - \|\vec{j}\|^2 / \sigma$$

où $\vec{P} = (\vec{E} \wedge \vec{B})/\mu_0$ est le vecteur de Poynting vu en électromagnétisme, ou puissance électromagnétique transportée par unité de surface $(W m^{-2})$.

Un terme de perte par effet Joule $-\|\vec{j}\|^2/\sigma$ (σ conductivité électrique en $S\,m^{-1}$) s'ajoute négativement au taux de production ou de perte de chaleur $\rho\,\frac{\delta q}{dt}$ ($W\,m^{-3}$). $\sigma = 8 \times 10^{-4}\,T^{3/2}\,S\,m^{-1}$ pour le plasma solaire à la température T.

$$U + \rho \varphi + \frac{1}{2} \rho v^2 + \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2 / 2 + \|\vec{B}\|^2 / 2\mu_0$$

est la densité volumique d'énergie interne + potentielle + cinétique + électrique + magnétique et se mesure en $(J m^{-3})$.

En régime stationnaire, $\left| div[(H + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \varphi)\vec{v} + \vec{P}] = \rho \frac{\delta q}{dt} - \|\vec{j}\|^2 / \sigma \right|$







VII Ecoulement en régime stationnaire dans un tube de courant

Un tube de courant est tel que ses parois latérales sont des lignes du champ de vitesse, appelées aussi lignes de courant. Le vecteur vitesse \vec{v} est donc tangent aux parois.

En régime **stationnaire**, avec $\partial/\partial t = 0$, on a

Conservation de la masse :

$$div(\rho \vec{v}) = 0$$

Conservation de l'énergie :

$$div \left[(H + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \varphi)\vec{v} \right] = \rho \frac{\delta q}{dt}$$

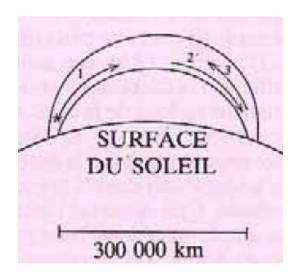


FIGURE 3 – Tube de courant

VII.1 Mouvement longitudinal le long du tube de courant

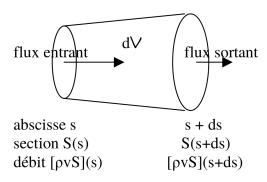


FIGURE 4 – Flux entrant, flux sortant







D'après le théorème d'Ostrogradski sur le volume dV :

$$div(\rho \vec{v})dV = \iint \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Le long du tube de courant, $\rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$ sur les surfaces latérales; il reste pour le volume dV = Sds:

$$div(\rho \vec{v})Sds$$
 = flux sortant - flux entrant
 = $[\rho vS](s+ds) - [\rho vS](s)$
 = $\frac{\partial [\rho vS]}{\partial s} ds$

d'où $div\left(\rho\vec{v}\right)=\frac{1}{S}\,\partial[\rho vS]/\partial s$ et plus généralement le long d'un tube de courant $div\left(\vec{F}\right)=\frac{1}{S}\,\frac{\partial[\rho vS]}{\partial s}$, où \vec{F} est un champ vectoriel dans la direction du tub.e Le long d'une ligne de courant, en un point d'abscisse curviligne s et de section S(s), $div(\rho\vec{v})=0$ s'écrit, en supposant que le diamètre du tube est petit partout devant sa longueur L (soit en ordre de grandeur $S^{1/2}\ll L$):

$$\frac{1}{S}d(\rho vS)/ds = 0$$
, d'où $\rho vS = \text{constante}$

Le long de cette même ligne fluide, en un point d'abscisse curviligne s et de section S(s), l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{S}d[(H + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi)vS]/ds = \rho \frac{\delta q}{dt}$$

soit $d[(H + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi)vS]/ds = \rho S \frac{\delta q}{dt}$

et avec ds = vdt, on obtient : $d[(H + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi)vS] = \rho Sv\delta q$

Utilisons de nouveau l'enthalpie h par unité de masse $(H = \rho h)$; comme $\rho vS =$ constante, il vient :

$$d(h + \frac{1}{2}v^2 + \varphi) = \delta q$$

soit finalement : $\Delta(h + \frac{1}{2}v^2 + \varphi) = q$ $(J kg^{-1})$

où le symbole Δ désigne la variation **massique** de la quantité $h + \frac{1}{2}v^2 + \varphi$ entre l'entrée et la sortie; q est la chaleur échangée par unité de masse.

Si le fluide est **incompressible**, on a $\Delta(H + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi) = Q(Jm^{-3})$ où le symbole Δ désigne la variation **volumique** de la quantité $H + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi$ entre l'entrée et la sortie ; Q est la chaleur échangée par unité de volume.

Cependant, H = U + P, donc $\delta H = \delta U + \delta P$ et le premier principe de la thermodynamique indique, à volume constant, que $\delta U = Q$. On retrouve ainsi la **loi de Bernoulli**:

$$\delta(P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi) = 0$$





Si l'écoulement a lieu dans un **tube magnétique**, les lignes de courant étant supposées **colinéaires** aux lignes du champ magnétique, on doit adjoindre l'équation de Maxwell flux $div\vec{B} = 0$.

Le long d'une ligne de champ de section S variable, $div\vec{B}=0$ s'écrit $\frac{1}{S}d(BS)/ds=0$, s étant l'abscisse curviligne, d'où

$$BS = constante$$

VII.2 Force de Laplace; mouvement longitudinal et équilibre transversal

En présence de champ magnétique, la force de Laplace par unité de volume est $\vec{f}=\vec{j}\wedge\vec{B}$

La densité de courant \vec{j} provient de l'équation de Maxwell Ampère dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

On a négligé dans cette approximation le courant de déplacement $\epsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t$, la vitesse caractéristique du fluide v étant négligeable devant C vitesse de la lumière. Sachant que :

$$\overrightarrow{arad}B^2 = 2\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} + 2\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{arad}\overrightarrow{B}$$

On en déduit

$$\overrightarrow{f} = (\overrightarrow{rot} \, \overrightarrow{B}/\mu_0) \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{grad} \, \overrightarrow{B}/\mu_0 - \overrightarrow{grad} \, (B^2/2\mu_0)$$

où $\vec{B} \cdot \overrightarrow{grad} \, \vec{B}/\mu_0$ est la tension magnétique et $\overrightarrow{grad} \, (B^2/2\mu_0)$ est la pression magnétique.

Dans le repère de Frênet, avec \vec{t} vecteur unitaire tangent aux lignes de champ, on a $\vec{B} = B\vec{t}$, et :

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{B} = Bd/ds(B\vec{t}) = B^2 d\vec{t}/ds + B(dB/ds) \vec{t}$$

Or $d\vec{t}/ds = \vec{n}/R$, R rayon de courbure de la ligne de champ, et \vec{n} normale à la ligne de champ

donc
$$\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B} = -\overrightarrow{grad}(B^2/2\mu_0) + B^2/(\mu_0 R)\vec{n} + (d(B^2/2\mu_0)/ds)\vec{t}$$

$$\overrightarrow{\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B} = -\overrightarrow{grad}_{\perp}(B^2/2\mu_0) + \vec{n}B^2/(\mu_0 R)}$$

où $\overrightarrow{grad}_{\perp}$ est le gradient dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ (orthogonale à \overrightarrow{t}).







En présence d'un écoulement stationnaire parallèle aux lignes de champ magnétique, le vecteur vitesse est $\vec{v} = v\vec{t}$, et le terme $\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{v} = v d(v\vec{t})/ds$ se décompose en :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{v} = (v^2/R) \vec{n} + d(v^2/2)/ds) \vec{t}$$

de sorte que l'équation du mouvement

$$\overrightarrow{\rho \, \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{v}} = -\overrightarrow{grad} P + \rho \vec{g} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

devient avec le champ de pesanteur $\vec{g} = -\overrightarrow{grad}\left(gz\right)$:

$$(\rho \, v^2/R) \, \vec{n} + \rho \, \overrightarrow{grad}_{\parallel} \, (v^2/2) = - \overrightarrow{grad}_{\perp} \, (P + B^2/2\mu_0) + \vec{n} \, B^2/(\mu_0 R)$$
$$- \overrightarrow{grad}_{\parallel} \, P - \rho \, \overrightarrow{grad}_{\parallel} \, (gz) - \rho \, \overrightarrow{grad}_{\perp} \, (gz)$$

où $\overrightarrow{grad}_{\parallel} = (d/ds) \ \overrightarrow{t}$ est le gradient dans la direction des lignes de champ (direction \overrightarrow{t}).

En projection dans la direction \vec{t} du mouvement et du champ magnétique, on obtient :

$$\overrightarrow{\rho grad_{\parallel}(v^{2}/2)} = -\overrightarrow{grad_{\parallel}}P - \rho \overrightarrow{grad_{\parallel}}(gz)$$

En projection dans la direction \vec{n} orthogonale au mouvement et au champ magnétique :

$$\frac{\rho v^2 - B^2/\mu_0}{R} \vec{n} = -\overrightarrow{grad}_{\perp}(P + B^2/2\mu_0) - \rho \overrightarrow{grad}_{\perp}(gz)$$

Pour un fluide incompressible, dans la direction du mouvement et du champ magnétique, on a :

$$\overrightarrow{grad}_{\parallel}(\rho v^2/2 + P + \rho gz) = 0$$

c'est la loi de **Bernoulli**

$$\rho v^2/2 + P + \rho gz = \text{constante sur une ligne de champ}$$

dans laquelle le champ magnétique n'intervient pas; le fluide glisse donc le long de "tuyaux magnétiques".

Pour un fluide **incompressible** dans une configuration de lignes fluides et magnétiques telles que le rayon de courbure $R \to \infty$, la projection dans la direction orthogonale donne :

$$\overrightarrow{grad}_{\perp}(P + B^2/2\mu_0 + \rho gz) = 0$$

C'est la loi de l'équilibre transversal entre pression gazeuse et magnétique

$$P + B^2/2\mu_0 + \rho gz = \text{constante}$$

dans laquelle la vitesse n'intervient pas.







 $B^2/2\mu_0$ est la pression magnétique.

Le paramètre β du plasma est égal au rapport de la pression gazeuze à la pression magnétique :

$$\beta = P/(B^2/2\mu_0)$$
 (nombre sans dimension)

Si $\underline{\beta > 1}$, les forces de **pression** dominent ; et si $\underline{\beta < 1}$, les forces **magnétiques** dominent.

 β varie énormément dans l'atmosphère solaire, non pas à cause de la variation du champ magnétique en altitude, mais parce que la pression du gaz varie très vite en fonction de l'altitude z:

- dans la photospère calme, $\beta \gg 1$ car $P = 10^3 \, Pa$ et $B^2/2\mu_0$ est voisin de $1 \, Pa$ (avec $B = 10^{-3} \, T$)
- dans la chromosphère calme, $\beta \simeq 1$ car P = 1 Pa et $B^2/2\mu_0$ est voisin de 1 Pa (avec $B = 10^{-3} T$)
- dans la couronne, $\beta \ll 1$ car $P = 10^{-4} Pa$ et $B^2/2\mu_0$ est voisin de 1 Pa (avec $B = 10^{-3} T$)

La chromosphère solaire réalise une sorte de transition entre un milieu dominé par les forces de pression et un milieu dominé par les forces magnétiques.

Les taches (champ fort de l'ordre de $0.1\,T$) ont toujours $\beta \ll 1$. En effet, $P = 10^3\,Pa$ et $B^2/2\mu_0$ est voisin de $10^4\,Pa$ ou plus.







MOOC (ASTRO)PHYSIQUE: HYDRODYNAMIQUE ET MHD

J.M. Malherbe*

Printemps 2017

Cours

VIII Équation de diffusion et d'advection du champ magnétique

On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell Ampère en ARQS :

$$\vec{rot} \, \vec{B} = \mu_0 \, \vec{j}$$

or $\vec{rot} \, \vec{rot} \, \vec{B} = \overrightarrow{grad}(div\vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \, \vec{rot} \, \vec{j}$; on obtient donc $\Delta \vec{B} = -\mu_0 \, \vec{rot} \, \vec{j}$ car $div\vec{B} = 0$

Avec la loi d'Ohm $[\vec{j} = \gamma \, (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})]$ où γ est la conductivité électrique du plasma, on trouve :

$$\Delta \vec{B} = -\mu_0 \, \vec{rot} \, (\gamma \, (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})) = -\mu_0 \, \gamma \, \vec{rot} \, (\vec{E}) - \mu_0 \, \gamma \, \vec{rot} \, (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

où on a fait l'hypothèse simplificatrice que la conductivité γ ne varie pas dans l'espace (ce qui n'est pas vrai, pour l'atmosphère solaire, à cause de la température hétérogène car $\gamma = 8 \times 10^{-4} \, T^{3/2} \, S \, m^{-1}$).

Avec l'équation de Maxwell Faraday $|\vec{rot}\,\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t|$, on obtient :

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \, \gamma \, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \, \gamma \, \vec{rot} \, (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

soit l'équation de diffusion et d'advection du champ magnétique :

$$\boxed{\frac{\Delta \vec{B}}{\mu_0 \, \gamma} + \vec{rot} \, (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

^{*}LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France







— Dans un milieu de conductivité **infinie**, on a simplement

$$\vec{rot} (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

qui constitue une équation de **transport** ou d'advection du champ magnétique dont le temps caractéristique est le temps dynamique égal à $|\tau = L/v|$ (avec L dimension caractéristique).

— Dans un milieu au repos,

$$\frac{\Delta \vec{B}}{\mu_0 \, \gamma} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

est une équation de diffusion pure, dont le temps caractéristique (temps de diffusion) est égal à $|\tau_d = L^2 \mu_0 \gamma$

VIII.1 Échelles de temps caractéristiques dans le cas du soleil

Numériquement, on trouve avec la loi $\gamma = 8 \times 10^{-4} \, T^{3/2} \Omega^{-1} \, m^{-1}$:

 $\gamma \approx 10^3 \, S \, m^{-1}$ dans la photosphère solaire (10 000 K)

 $\gamma \approx 10^6 \, S \, m^{-1}$ à $10^6 \, K$ dans la couronne solaire (proche de la conductivité $10^7 \, S \, m^{-1}$ d'un métal).

On en déduit les temps caractéristiques τ_d et τ dans les structures solaires :

- structures fines photosphériques : $L=10^3\,km,\,v=1\,km/s$: $\tau_d=10^9s,\,\tau=10^3\,s$ structures coronales : $L=10^5\,km,\,v=100\,km/s$: $\tau_d=10^{16}\,s,\,\tau=10^{13}\,s$

On constate qu'aux échelles des structures solaires observables $(L > 100 \, km)$, le temps de diffusion τ_d est toujours **très long** devant le temps dynamique τ ; la diffusion du champ magnétique est donc inefficace, sauf sur des échelles minuscules de l'ordre du mètre, ce qui laisse supposer que les phénomènes purement diffusifs ne se produisent que sur ces petites échelles spatiales qui sont inobservables. Pour $L=1\,km$, on trouve par exemple $\tau_d=10^3\,s$ dans la photosphère.

Mais il existe une échelle de temps intermédiaire qui concerne l'instabilité de déchirement (« tearing mode ») dans une région de champs magnétiques anti parallèles ou nappe de courant. Cette instabilité se produit sur l'échelle de temps caractéristique égale à :

$$\tau_t = (\tau_d \, \tau)^{1/2}$$

Ce qui donne numériquement pour une région d'épaisseur $L = 100 \, km$ (minimum observable) à $T=10\,000\,K$ et $v=1\,km/s$: $\tau_d=10^7\,s$, $\tau=10^3\,s$, et $\tau_t=10^5\,s$ soit

Cependant, ce temps peut être nettement inférieur en cas de conductivité anormale réduite par la turbulence locale (on a vu que le plasma solaire est très turbulent car $Re \gg 1$). Le rapport

$$R_m = \frac{\tau_d}{\tau} = L \,\mu_0 \,\gamma \,v$$

est appelé nombre de Reynolds magnétique et le temps de déchirement est alors

$$\tau_t = \tau(R_m)^{1/2}$$







Dans la couronne solaire avec les valeurs ci-dessus, $R_m \approx 10^{13}$; dans la photosphère, on aurait $R_m \approx 10^6$. R_m est de l'ordre de 1 seulement aux **petites échelles spatiales diffusives** $(L < 1 \, km)$.

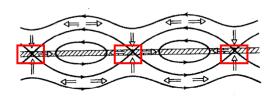


FIGURE 1 – Modes de déchirement du champ magnétique dans une configuration anti parallèle (nappe de courant); seuls les points X (encadrés en rouge) de la nappe (hachurée) sont des sites efficaces et rapides de diffusion magnétique.

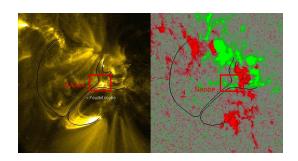


FIGURE 2 – Observation d'une nappe de courant dans un site éruptif (TRACE, NASA, à gauche en EUV et SOHO/MDI, ESA/NASA, à droite en champ magnétique longitudinal)

VIII.2 Diffusion dans quelques cas simples

Diffusion d'un pic isolé de champ magnétique et étalement

On se place dans un espace à 1 dimension x et on suppose connue à l'instant t = 0 la distribution du champ magnétique vertical B(x,0). B(x,t) est donné par la résolution de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial^2 \vec{B}/\partial x^2}{\mu_0 \gamma} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

dont la solution est :

$$B(x,t) = \left(\frac{\mu_0 \gamma}{4\pi t}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} B(u-x,0) e^{-\mu_0 \gamma u^2/4t} du$$

Si $B(x,0) = B_0\Delta(x)$ pic de Dirac, nul partout sauf à l'origine, on obtient la fonction d'étalement :

$$B(x,t) = B_0 \left(\frac{\mu_0 \gamma}{4\pi t}\right)^{1/2} e^{-\mu_0 \gamma u^2/4t}$$

L'étalement du champ magnétique possède une longueur caractéristique L telle que $\mu_0 \gamma L^2/4t = 1$ soit un **étalement L variant en** $t^{1/2}$.







Nappe de courant et point neutre de type X

Une nappe de courant dans le plan yOz infiniment fine peut être décrite par un modèle simple :

 $\vec{B} = B(x,t) \vec{e_y}$ avec $B(x,0) = B_0$ pour x > 0 et $B(x,0) = -B_0$ pour x < 0. On trouve le résultat :

$$B(x,t) = \frac{2B_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-u^2} du \quad \text{pour } y = \frac{x}{(4t/\mu_0 \gamma)^{1/2}}$$

où l'intégrale n'est pas calculable analytiquement, mais seulement numériquement.

On a
$$B(0,t) = 0$$
 (point neutre X) et $\lim B(x,t) = \pm B_0$ lorsque $x \to \pm \infty$

La densité de courant est donnée par

$$j_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx} = \frac{2B_0}{\mu_0 \sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu_0 \gamma}{4t}\right)^{1/2} e^{-\mu_0 \gamma x^2/4t}$$

En x=0 dans la nappe, $j_z(0)$ diminue avec le temps en $t^{-1/2}$. Néanmoins, le courant total

$$j_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} j_z dx = 2B_0/\mu_0$$

est conservé, ce qui signifie que le courant diffuse en s'étendant.

La longueur caractéristique d'étalement L est encore telle que $\mu_0 \gamma L^2/4t = 1$ soit L variant en $t^{1/2}$.

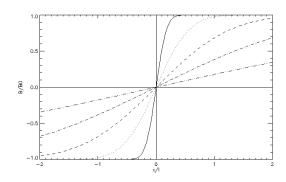


FIGURE 3 – Exemple de diffusion du champ magnétique dans une nappe de courant. Le champ magnétique est initialement antiparallèle dans l'espace x>0 et x<0. On a représenté B/B_0 en fonction de x pour différentes valeurs de t, normalisé par le temps diffusif τ_d . L'espace x est normalisé par l définie par $\tau_d = l^2 \mu_0 \gamma$. Courbes présentées pour $t/\tau_d = 0.01, 0.1, 0.5, 2.0, 10.0$ en partant du centre haut dans le sens horaire.

VIII.3 Reconnexion magnétique

Ainsi que nous l'avons remarqué, une diffusion efficace et rapide ne peut se développer qu'aux petites échelles, au voisinage d'un point d'annihilation des champs







magnétiques dans une nappe de courant très fine dont l'épaisseur l est gouvernée par les mouvements de convergence du milieu vers le point central diffusif X (rond rouge) comme le montre la figure ci dessous.

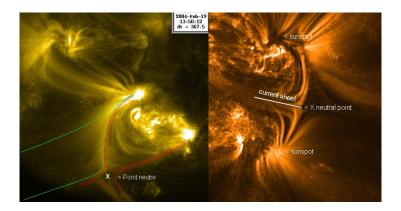


FIGURE 4 – Points X et nappes de courant au dessus d'une région éruptive (TRACE, NASA, en EUV)

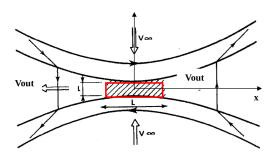


FIGURE 5 – Reconnexion magnétique. La partie hachurée est une région centrale purement diffusive, et d'épaisseur l petite dans laquelle le nombre de Reynolds magnétique R_m est voisin de 1.

Le temps diffusif dans la couche d'**épaisseur** l s'écrit : $\tau_d = l^2 \mu_0 \gamma$. Si v_∞ désigne la vitesse de convergence de la matière vers la nappe, alors $l = \tau_d v_\infty = l^2 \mu_0 \gamma v_\infty$ d'où l'on tire l'épaisseur l de la région de diffusion :

$$l = \frac{1}{\mu_0 \, \gamma \, v_{\infty}}$$

En prenant $v_{\infty}=1\,km/s,\,\gamma\approx 10^3\,\Omega^{-1}\,m^{-1},$ l'ordre de grandeur de l'épaisseur l de la couche est seulement le mètre!

La matière est éjectée du site diffusif à la **vitesse d'Alfven** $v_{out} = B/(\mu_0 \rho)^{1/2}$, vitesse en général élevée mais inobservable vu la faible épaisseur l du site de reconnexion. B est la valeur du champ externe à la nappe de courant; ρ est la masse volumique interne. Voici des exemples :

— photosphère solaire : $B=\bar{10}^{-3}\,T,\, \rho=10^{-6}\,kg\,m^{-3}$ donne $v_{out}=10\,km/s$







- taches solaires : $B=0.1\,T,\,\rho=10^{-6}\,kg\,m^{-3}$ donne $v_{out}=100\,km/s$
- couronne solaire : $B=10^{-3}T$, $\rho=10^{-12}\,kg\,m^{-3}$ donne $v_{out}=1000\,km/s$

La **longueur** L de la région diffusive est donnée par la conservation de la masse : $\rho_{in}Lv_{\infty}=\rho_{out}lv_{out}$, ce qui donne L de l'ordre de $10\,m$ dans la photosphère solaire, et du km dans les conditions de la couronne, avec $v_{\infty}=1km/s$ et $\rho_{in}\approx\rho_{out}$ en première approximation.

Par ailleurs, la conservation du flux magnétique donne $v_{\infty}B_{\infty} = v_{out}B_{out}$. Comme $v_{\infty} \ll v_{out}$, on en déduit que $B_{\infty} \gg B_{out}$. La nappe de courant convertit donc l'énergie magnétique en énergie cinétique et en chaleur (effet Joule).

La topologie locale des lignes de champ peut être décrite par le modèle simple de champ magnétique $\vec{B}(y,\alpha^2x,0)$ dans le repère Oxy de la figure, avec $\alpha^2 \ll 1$. Les lignes de champ magnétique sont des hyperboles d'équation $y^2 - \alpha^2 x^2 = \text{constante}$, ayant pour asymptotes $y = \pm \alpha x$.

La densité de courant est alors donnée par

$$\vec{j} = \frac{\vec{rot}\,\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\alpha^2 - 1}{\mu_0}\vec{e_z}$$

D'où la force de Laplace $\vec{F}(x,y) = \vec{j} \wedge \vec{B} = [(1-\alpha^2)\alpha^2 x \, \vec{e_x} - (1-\alpha^2) y \, \vec{e_y}]/\mu_0$

Cette force montre que la matière est poussée le long de l'axe Oy vers la nappe de courant et éjectée de la nappe le long de l'axe Ox.

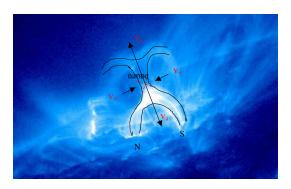


FIGURE 6 – Reconnexion magnétique dans la couronne solaire : observations satellite SDO NASA Instrument AIA Extrême Ultra Violet $T=10^7\,K$ Site diffusif au point X de la nappe de courant





MOOC (ASTRO)PHYSIQUE: HYDRODYNAMIQUE ET MHD

J.M. Malherbe*

Printemps 2017

Cours

IX Ondes

IX.1 Ondes de pression longitudinales (force de rappel : pression gazeuse)

On dispose des équations de base suivantes en négligeant la gravité :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho\,\vec{v}\right) = 0 & \text{conservation de la masse} \\ \rho\,\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\left(\vec{v}\right)\right] = -\overrightarrow{grad}\,P & \text{mouvement (force de rappel gradient de pression)} \end{cases}$$

Le milieu est initialement au repos de pression P_0 et masse volumique ρ_0 uniformes, et on se place dans l'hypothèse de petits mouvements de vitesse v le long de l'axe des x et on pose :

$$P = P_0 + P_1$$

où P_1 est la **surpression** par rapport à l'équilibre (négatif ou positif)

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$

où ρ_1 est la surdensité par rapport à l'équilibre (négatif ou positif) avec $|P_1| \ll P_0$ et $|\rho_1| \ll \rho_0$

En négligeant les termes du second ordre comme $\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\vec{v})$, on obtient des deux équations en projetant celle du mouvement selon Ox, avec $\vec{v} = v(x,t)\vec{e_x}$, P_1 et ρ_1 étant fonctions de x et t:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0\\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} \end{cases}$$

Pour aller plus loin, il faut relier P_1 à ρ_1 :

^{*}LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France









Soit χ le coefficient de compression caractéristique du gaz :

$$\chi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$$

Pour une transformation **isotherme** du gaz parfait, $|\chi = 1/P_0|$

Pour une transformation **isentropique** du gaz parfait, $\chi = 1/(\gamma P_0)$

Or
$$\chi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{P_1}$$
, d'où

$$\rho_1 = \chi P_1 \rho_0$$

$$\begin{cases} \chi \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0\\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}\\ \text{d'où il vient} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \chi \, \rho_0 \, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}$$
 équation de d'Alembert

C'est donc l'équation de propagation d'une OPPH (onde plane progressive harmonique) du type $v = |v|e^{i(\omega t - kx)}$ et de vitesse de phase

$$C_s = 1/(\chi \, \rho_0)^{1/2}$$

- dans un milieu isotherme, $C_s = (P_0/\rho_0)^{1/2} = (RT_0/M)^{1/2}$ avec R constante des gaz parfaits, T_0 température et M masse molaire.
- dans un milieu adiabatique, $P/\rho^{\gamma}={\rm constante},$ $C_s=(\gamma RT_0/M)^{1/2}$ la relation de dispersion est

 $\omega = C_s k$

La linéarisation de l'équation

$$\rho_0 \partial v / \partial t = -\partial P_1 / \partial x$$

pour une OPPH donne, avec $\partial/\partial t = i\omega$ et $\partial/\partial x = -ik$: $\rho_0\omega v = kP_1$ d'où

$$P_1 = \rho_0 C_s v \text{ et } \rho_1 = \chi \rho_0^2 C_s v$$

Exemple: Soleil

- dans la chromosphère solaire, avec T = 8000 K, on trouve $C_s = (\gamma R T_0/M)^{1/2} =$ $11 \, km/s$
- dans la couronne solaire, avec $T = 1.5 \times 10^6 \, K$, on trouve $C_s = (\gamma \, R \, T_0/M)^{1/2} =$ $144 \, km/s$ avec $\gamma = 5/3$ et M masse molaire du proton $(10^{-3} \, kg)$.

Aspects énergétiques

Le vecteur de Poynting de l'onde sonore est $\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}$, où P_1 désigne la surpression $(P = P_0 + P_1 \text{ avec } P_1 \ll P_0)$. L'équation de conservation de la puissance a pour expression:

$$div \vec{\Pi} + \partial(1/2 \rho_0 ||\vec{v}^2|| + 1/2 \chi P_1^2)/\partial t = 0$$







 $1/2 \rho_0 \|\vec{v}^2\|$ et $1/2 \chi P_1^2$ sont respectivement les densités volumiques d'énergie **cinétique** et **potentielle**.

La surpression P_1 étant reliée à la vitesse v par $P_1 = \rho_0 C_s v$, il y a **équipartition** entre énergie cinétique et potentielle. La **puissance** instantanée transportée par l'onde est $\Pi = \rho_0 v^2 C_s$ et en moyenne

$$<\Pi>=1/2 \rho_0 \|\vec{v}^2\| C_s \qquad (W m^{-2})$$

IX.2 Ondes magnétiques d'Alfven transversales (force de rappel : magnétique)

On dispose des équations de base suivantes, dans lesquelles on néglige la gravité et la pression :

$$\begin{cases} \partial \rho/\partial t + div(\rho\,\vec{v}) = 0 & \text{conservation de la masse} \\ \rho[\partial \vec{v}/\partial t + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}\,(\vec{v})] = \vec{j} \wedge \vec{B} & \text{mouvement (Euler, force de rappel magnétique)} \\ \vec{j} = r\vec{o}t\,\vec{B}/\mu_0 & \text{Maxwell Ampère} \\ r\vec{o}t(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \partial \vec{B}/\partial t & \text{Maxwell Faraday en conductivit\'e infinie avec } \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

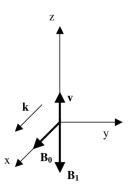


Figure 1 – Onde transversale

On se place dans l'hypothèse de petits mouvements $\vec{v} = v \, \vec{e_z}$ le long de l'axe des z dans un champ uniforme $\vec{B_0} = B_0 \, \vec{e_x}$ porté par l'axe des x, ρ_0 étant la masse volumique uniforme (figure). Les quantités dépendent de la variable x et de t. Si on considère ρ comme constante (pas de force de pression), alors l'équation de conservation de la masse est vérifiée car $div \, \vec{v} = 0$ (\vec{v} est porté par $\vec{e_z}$ et ne dépend que de x). Soit $\vec{B_1}$ la perturbation du champ magnétique ($B_1 \ll B_0$); $\vec{B} = \vec{B_0} + \vec{B_1}$ et $\rho = \rho_0$ (incompressible) d'où les deux équations :

$$\begin{cases} \rho_0 \, \partial \vec{v} / \partial t = \vec{rot} \, \left(\vec{B_1} \wedge \vec{B_0} \right) / \mu_0 \\ \partial \vec{B_1} / \partial t = \vec{rot} \, (\vec{v} \wedge \vec{B_0}) \end{cases}$$









On a éliminé les termes du second ordre.

Avec $\vec{B_1} = B_1 \, \vec{e_z}$,

$$\vec{rot} \ \vec{B_1} = -\frac{\partial B_1}{\partial x} \ \vec{e_y} \Longrightarrow \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = (B_0/\mu_0) \frac{\partial B_1}{\partial x}$$

Avec $\vec{v} \wedge \vec{B_0} = v B_0 \vec{e_y}$,

$$\vec{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B_0}) = B_0 \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e_z} \Longrightarrow \frac{\partial B_1}{\partial t} = B_0 \frac{\partial v}{\partial x}$$

Dérivons la seconde équation par rapport à x:

$$B_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_1}{\partial t \partial x} = (\rho_0 \, \mu_0 / B_0) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

et finalement, on trouve:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (\mu_0 \, \rho_0 / B_0^2) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$
équation de d'Alembert,

qui est une équation de propagation d'une OPPH du type $v=|v|e^{i(\omega t-kx)}$ de vitesse de phase:

$$v_a = B_0 / (\mu_0 \, \rho_0)^{1/2}$$

La relation de dispersion est

$$\omega = v_a k$$

 v_a est appelée vitesse d'Alfvèn, de l'ordre de $1000\,km/s$ dans la couronne solaire, $100 \, km/s$ dans les taches solaires (valeurs très supérieures à la vitesse du son C_s); dans le soleil calme (champ magnétique faible), par contre, v_a est petit devant la vitesse du son C_s ($< 10 \, km/s$).

La seconde équation $\partial B_1/\partial t = B_0\partial v/\partial x$ donne la perturbation de champ magnétique B_1 en utilisant les opérateurs valables pour une OPPH, à savoir :

$$\partial/\partial t = i\omega \text{ et } \partial/\partial x = -ik$$

d'où:

$$i\omega B_1 = -ikvB_0 \Longrightarrow B_1 = -B_0(v/v_a) \ll B_0$$

En présence de la force de pression $(-\overrightarrow{grad}P)$, on obtiendrait des ondes magnéto acoustiques.

Aspects énergétiques

Le vecteur de Poynting de l'onde magnétique est $\vec{\Pi} = (\vec{E} \wedge \vec{B_1})/\mu_0$, où $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B_0}$.

$$\vec{E} = -v \, \vec{e_z} \wedge B_0 \vec{e_x} = -v \, B_0 \, \vec{e_y}$$
 d'où

$$\vec{\Pi} = (\vec{E} \wedge \vec{B_1})/\mu_0 = -v \, B_0 \, \vec{e_y} \wedge B_1 \, \vec{e_z}/\mu_0 = -v \, B_0 \, B_1 \, \vec{e_x}/\mu_0$$







Avec $B_1 = -B_0(v/v_a)$, on déduit $\vec{\Pi} = (B_1^2/\mu_0) v_a \vec{e_x}$

où $||B_1^2/\mu_0||$ est la surpression magnétique à un facteur 2 près (en effet, la pression magnétique totale est $||\vec{B_0} + \vec{B_1}||^2/2\mu_0 = B_0^2/2\mu_0 + B_1^2/2\mu_0$ car $\vec{B_0}$ et $\vec{B_1}$ sont orthogonaux). L'équation de conservation de la puissance a pour expression :

$$div\vec{\Pi} + \partial(1/2 \rho_0 ||v^2|| + 1/2B_1^2/\mu_0)/\partial t = 0$$

 $1/2\rho_0 v^2$ et $1/2B_1^2/\mu_0$ sont respectivement les densités volumiques d'énergie **cinétique** et **magnétique**. Comme $B_1 = -B_0(v/v_a)$, il y a **équipartition** entre les deux.

La **puissance** transportée par l'onde est $\Pi = (B_1^2/\mu_0)v_a = \rho_0 v^2 v_a$ et en moyenne,

$$<\Pi>=1/2 \rho_0 v^2 v_a (W m^{-2})$$

On remarque que le rapport entre la puissance acoustique $<\Pi_s>$ et magnétique $<\Pi_m>$ vaut :

$$<\Pi_s>/<\Pi_m>=C_s/v_a=\beta^{1/2}$$

 $\beta \gg 1$ dans la photosphère solaire calme (champ magnétique faible), $\beta \ll 1$ dans les taches (champ magnétique fort).

IX.3 Application des ondes : chauffage de l'atmosphère solaire

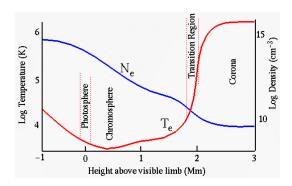


FIGURE 2 – Température T (échelle LOG) dans l'atmosphère solaire en fonction de l'altitude z. La surface est la photosphère en z=0 où $T=6000\,K$. La température remonte brusquement de $10^4\,K$ à $10^6\,K$ en l'espace de $100\,km$ seulement dans la zone de transition chromosphère couronne.

Le transport acoustique (période $300\,s$ ou fréquence $3\,mHz$) domine dans le soleil calme car $\beta\gg 1$ (champs magnétiques faibles); mais comme ρ varie en $e^{-z/h}$, où z est l'altitude et h l'échelle de hauteur hydrostatique ($h=RT/gM\approx 200\,km$), la conservation de la masse $\rho v=$ constante suggère que la vitesse v varie approximativement en $e^{z/h}$ donc augmente; ainsi, dès que $v>C_s$ (environ $10\,km/s$), des chocs peuvent se former et **dissiper** l'énergie en chauffant localement le plasma. Ceci se produit pour $z=2\,h$ ou $z=3\,h$ dans la chromosphère.







IX.4 Ondes de gravité dans un fluide incompressible : la houle

Nous considérons un fluide **incompressible** de masse volumique ρ tel que $div \vec{v} = 0$, soumis aux forces de pression et de gravité, initialement au repos et en équilibre hydrostatique, selon le modèle suivant de profondeur h:

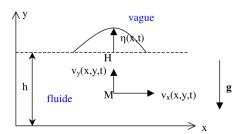


FIGURE 3 – A l'équilibre hydrostatique, la pression $P_0(y)$ du fluide est donnée par la loi : $P_0(y) = P_0(0) - \rho g y$ La vitesse du fluide en M(x,y) est $\vec{v}(x,y,t)$ avec 2 composantes (v_x, v_y) et l'élévation du fluide en H(x, h) est appelée $\eta(x, t)$

Le PFD ou équation d'Euler s'écrit :

$$\rho \, \partial \vec{v} / \partial t + \rho \, \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \, \vec{v} = -\overrightarrow{grad} \, P + \rho \vec{g}$$

On s'intéresse aux petits mouvements à partir de la position de repos du fluide, de telle sorte que le terme $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{grad} \overrightarrow{v}$ peut être négligé (second ordre) devant $\partial \overrightarrow{v}/\partial t$ (premier ordre). Appelons maintenant $P_1(x,y,t)$ la **surpression** (positive ou négative) par rapport à l'équilibre hydrostatique $P_0(y)$ du fluide : on a donc $P = P_0 + P_1$ et, en raison de l'équilibre hydrostatique initial, $-\overrightarrow{grad} P_0 + \rho \overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$

L'équation d'Euler devient donc :

$$\rho \, \partial \vec{v} / \partial t = - \overrightarrow{grad} \, P_1$$

Prenons sa divergence; comme $div \vec{v} = 0$ (fluide incompressible), il vient

$$\Delta P_1 = 0$$

La surpression vérifie donc l'équation de Laplace.

Nous allons rechercher une solution en **ondes progressives selon** Ox de la forme $P_1 = f(y)e^{i(\omega t - kx)}$

L'équation de Laplace devient alors : $d^2f/dy^2 - k^2f = 0$

qui a pour solution $f(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}$

Nous devons maintenant examiner les conditions aux limites du problème :

- en
$$y = 0$$
, $v_y(x, 0, t) = 0$





- en
$$y = h$$
, $v_y(x, h, t) = \partial \eta(x, t) / \partial t$ et $P_1(x, h, t) = \rho g \eta(x, t)$

On peut calculer $v_y=V_y(y)e^{i(\omega t-kx)}$ par l'équation d'Euler : $\rho\,\partial v_y/\partial t=-\partial P_1/\partial y$

$$\rho i\omega v_y = -ke^{i(\omega t - kx)}(Ae^{ky} - Be^{-ky})$$

d'où

$$v_y = i(k/\rho\omega)e^{i(\omega t - kx)}(Ae^{ky} - Be^{-ky})$$

La condition aux limites en y = 0, $v_y(x, 0, t) = 0$, implique A = B

Alors,

$$P_1 = 2A \, ch(ky) e^{i(\omega t - kx)} \text{ et } v_y = 2iA(k/\rho\omega) \, sh(ky) e^{i(\omega t - kx)}$$

La seconde condition en y=h donne d'une part

$$\eta(x,t) = (2A/\rho g) ch(kh) e^{i(\omega t - kx)}$$

et d'autre part,

$$v_y(x, h, t) = \partial \eta(x, t) / \partial t = i\omega (2A/\rho g) ch(kh) e^{i(\omega t - kx)}$$

que nous pouvons comparer à l'expression $v_y(x,h,t)$ déduite de l'équation d'Euler, à savoir :

$$v_y(x, h, t) = 2iA(k/\rho\omega) sh(kh)e^{i(\omega t - kx)}$$

L'égalité entre les deux expressions donne la relation :

$$i\omega(2A/\rho g) ch(kh) = 2iA(k/\rho\omega) sh(kh)$$

c'est à dire la relation de dispersion des ondes :

$$\omega^2 = kg \, th(kh)$$

Examinons deux cas intéressants :

a) en eau **profonde** (pleine mer) : $h \to \infty$ donne $\omega^2 = kg$ indépendant de la profondeur h.

La vitesse de phase $v = \omega/k = g/\omega$ dépend de ω , le milieu est **dispersif**

b) en eau **peu profonde** (plage) : $h \to 0$ donne $\omega = k(gh)^{1/2}$ dépendant de la profondeur h.

La vitesse de phase $v=\omega/k=(gh)^{1/2}$ ne dépend pas de ω , le milieu n'est **pas** dispersif.

Traçons dans le cas général la longueur d'onde $\lambda=2\pi/k$ en fonction de h à ω fixé.







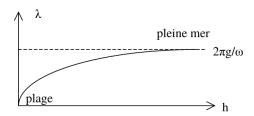


FIGURE 4 – La longueur d'onde de la houle augmente avec la profondeur pour une période $T=2\pi/\omega$ donnée. Elle est plus grande en pleine mer que sur la plage où elle tend vers zéro.

Exemple: Application au soleil : $\omega^2 = kg$ donne le mode fondamental des ondes de **gravité** observées dans l'atmosphère de l'étoile, de fréquence voisine du milli Hertz. Il existe aussi des ondes **acoustiques** de quelques milli Hertz telles que $\omega = C_s k$ où C_s est la vitesse du son égale à $(\gamma RT/M)^{1/2}$, voisine de $9 \, km \, s^{-1}$ pour $T = 6000 \, K$, $\gamma = 5/3$ et $M = 10^{-3} \, kg$ (hydrogène).

IX.5 Ondes élastiques longitudinales dans les liquides et les solides

Considérons un barreau élastique de longueur l au repos et de section S, soumis à une force de traction, subissant ainsi un allongement Δl .

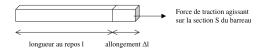


Figure 5 – Barreau soumis à une force de traction

Loi de Hooke

Il apparaît au sein du barreau une contrainte ou surpression σ proportionnelle à son allongement Δl et donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma = E(\Delta l/l)$$
 en Pascals (Pa)

E est un coefficient caractéristique du matériau appelé **module d'Young** ou module d'élasticité. E se mesure en Pa (ou MPa). Pour un solide métallique, E est voisin de $10^{11}Pa$.

Soit χ le coefficient de compression du matériau que nous avons défini par : $\chi = (1/\rho)\partial\rho/\partial P$

Pour un matériau de masse m donnée, $m = \rho V$ implique $\chi = -(1/V)\partial V/\partial P$ Dans le cas présent, V = Sl et $|\partial V/\partial P| \approx S\Delta l/\sigma$, dont on déduit :

$$\chi = 1/E$$







Nous avons vu que dans un gaz, l'onde se propage à la vitesse de phase $C_s = 1/(\chi \rho_0)^{1/2}$

Dans le cas d'un milieu élastique, cette relation donne $C_s = (E/\rho_0)^{1/2}$ où ρ_0 est la masse volumique au repos.

Exemple : Vitesses de propagation de l'onde élastique longitudinale dans un solide, liquide, gaz

acier (solide): $\rho_0 = 7800 \, kg \, m^{-3}$, $E = 2 \times 10^{11} \, Pa$, $C_s = 5000 \, m \, s^{-1}$ eau (liquide): $\rho_0 = 1000 \, kg \, m^{-3}$, $E = 2 \times 10^9 \, Pa$, $C_s = 1400 \, m \, s^{-1}$ air (gaz): $\rho_0 = 1, 3 \, kg \, m^{-3}$, $E = 1, 4 \times 10^5 \, Pa$, $C_s = 330 \, m \, s^{-1}$





MOOC (ASTRO)PHYSIQUE: HYDRODYNAMIQUE ET MHD

J.M. Malherbe*

Printemps 2017

Cours

X Chocs hydrodynamiques : Relations de Rankine Hugoniot

Nous traitons un choc comme une discontinuité de vitesse, température, densité et pression. En amont, le **nombre de Mach** (rapport de la vitesse du fluide à la vitesse du son) est supérieur à l'unité. Un choc engendre une compression du plasma en aval. Appelons v_1 , P_1 , ρ_1 les vitesse, pression, masse volumique en amont du choc, et v_2 , P_2 , ρ_2 les vitesse, pression, masse volumique en aval du choc. On s'intéresse au régime **stationnaire monodimensionnel** adiabatique (axe Ox) du gaz parfait (d'exposant adiabatique γ).

La conservation de la masse $div(\rho \vec{v}) = 0$ donne $\rho v = \text{constante}$, donc $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$

L'équation du mouvement $\rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\vec{v}) + \overrightarrow{grad}P = \vec{0}$ donne

$$\rho_1 v_1^2 + P_1 = \rho_2 v_2^2 + P_2$$

L'équation de conservation de l'énergie $div\left[\left(H+1/2\,\rho\,v^2\right)\vec{v}\right]=0$ (adiabatique, mais pas isentropique) donne :

$$(H_1 + 1/2 \rho_1 v_1^2) v_1 = (H_2 + 1/2 \rho_2 v_2^2) v_2,$$

Comme $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, on obtient avec **l'enthapie massique du gaz parfait** $h = H/\rho = [\gamma/(\gamma - 1)]P/\rho$:

$$\boxed{\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2}$$

^{*}LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France







En fonction du nombre de Mach incident $M_1 = v_1/C_{s_1}$ où $C_{s_1} = (\gamma P_1/\rho_1)^{1/2}$ est la vitesse du son incidente, on obtient pour $M_1 > 1$, les relations de Rankine Hugoniot :

$$\begin{cases} v_1/v_2 = \rho_2/\rho_1 = (\gamma+1){M_1}^2/[2+{M_1}^2(\gamma-1)] > 1 & \text{(compression)} \\ P_2/P_1 = [2\gamma{M_1}^2 - (\gamma-1)]/(\gamma+1) > 1 & \text{(compression)} \\ {M_2}^2 = [{M_1}^2(\gamma-1)+2]/[2\gamma{M_1}^2 - (\gamma-1)] < 1 & \text{(subsonique)} \\ T_2/T_1 = (P_2/P_1)/(\rho_2/\rho_1) > 1 & \text{(chauffage)} \\ S_2 - S_1 = [nR/(\gamma-1)] \ln [(P_2/P_1)/(\rho_2/\rho_1)^{\gamma}] > 0 \end{cases}$$

Ci-dessus, $S = nR/(\gamma - 1) \ln[P/\rho\gamma]$ est l'entropie de n moles de gaz parfait (R constante des gaz parfaits).

Lorsque M_1 varie de 1 à l'infini :

$$\begin{cases} 1 < v_1/v_2 = \rho_2/\rho_1 < (\gamma+1)/(\gamma-1) & (\text{maximum 4 pour } \gamma = 5/3) \\ 1 < P_2/P_1 < \infty & (\text{compression}) \\ 1 < T_2/T_1 = (P_2/P_1)/(\rho_2/\rho_1) < \infty & (\text{chauffage puisque } T_2/T_1 > 1) \\ 0 < s_2 - s_1 < \infty & (\text{augmentation d'entropie}) \end{cases}$$

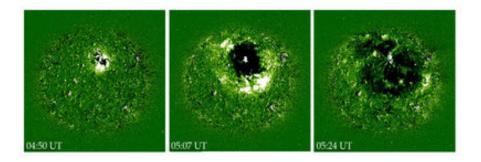


FIGURE 1 – Onde de choc de Moreton déclenchée par une éruption dans l'atmosphère solaire. Observations SOHO EIT, raie du fer ionisé (Fe XII) à 19.5 nm de longueur d'onde (extrême ultra violet). L'onde peut se déplacer jusqu'à 500 km/s et balayer la surface du soleil en 10 minutes.

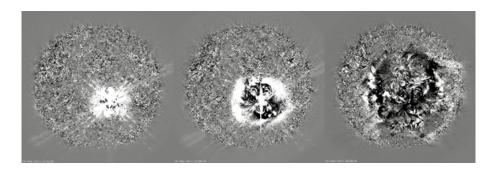


FIGURE 2 – Observations SDO, raie du fer ionisé (Fe XII) à 19.5 nm de longueur d'onde (extrême ultra violet).







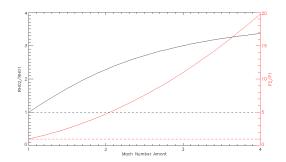


FIGURE 3 – Rapports ρ_2/ρ_1 (noir) et P_2/P_1 (rouge) en fonction du nombre de Mach amont (> 1). Il y a compression. $\rho_2/\rho_1 > 1$

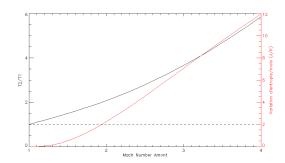


FIGURE 4 – Rapport T_2/T_1 et variation d'entropie par mole $S_2 - S_1$ en fonction du nombre de Mach amont (> 1). Le choc adiabatique s'accompagne d'une augmentation d'entropie et de chauffage $(T_2/T_1 > 1)$, c'est une transformation irréversible.

XI Exemple d'écoulement transsonique : le vent solaire (solution de Parker)

On s'intéresse pour finir à l'écoulement du vent solaire, constitué de particules (protons, électrons) qui s'échappent du soleil en permanence vers le milieu interplanétaire. Les équations fondamentales, en régime stationnaire, et en négligeant toute force magnétique, ainsi que toute source d'énergie, ont été établies précédemment :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\rho\,\vec{v}\right) = 0\\ \rho\,\vec{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,P + \rho\,\vec{g} \end{cases}$$

avec $P=2\rho kT/m$, loi des gaz parfaits (m est la masse atomique du proton, le facteur 2 provient du fait que le milieu est totalement ionisé dans la couronne solaire); on supposera que le milieu est isotherme (T= constante), ce qui donne 3 équations à 3 inconnues, P, ρ et v.

On se place dans un système de coordonnées sphériques, dans lequel la seule variable est r. Le vecteur vitesse est purement radial. La gravité dépend de r (loi de Newton $g=-KM/r^2$). Dans ce cas, $div(\rho\,\vec{v})=\frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}(r^2\,\rho\,v)=0$; on en déduit :

$$r^2 \rho v = \text{constante} \quad (= \rho_0 v_0 r_0^2)$$







L'équation du mouvement devient : $\rho v dv/dr = -dP/dr - \rho KM/r^2$

M est la masse du soleil. On choisit v comme variable, et on exprime ρ et P en fonction de v :

$$\rho = \rho_0 \, v_0 \, r_0^2 / (v \, r^2)$$

et

$$P = 2\rho kT/m = 2(kT/m)\rho_0 v_0 r_0^2/(v r^2)$$

avec les conditions aux limites suivantes à la surface du soleil de rayon $r_0: \rho = \rho_0$ et $v = v_0$.

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{dv}{dr}(v - v_s^2/v) = 2\frac{v_s^2}{r} - \frac{v_l^2}{2}\frac{r_0}{r^2}$$

où $v_s = (2kT/m)^{1/2}$ est la vitesse isotherme du son et $v_l = (2KM/r_0)^{1/2}$ est la vitesse de libération du corps attractif (le soleil)

Remarque: On trouve v_l en écrivant que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en $r=r_0$ (rayon du soleil) est égale à celle que l'on aurait à l'infini, c'est à dire nulle :

$$\frac{1}{2}mv_l^2 - KmM/r_0 = 0 + 0 \quad (à l'infini)$$

d'où l'expression de $v_l = (2KM/r_0)^{1/2}$. La vitesse de libération est donc la vitesse minimale d'éjection de la surface solaire pour échapper à l'attraction du soleil. Elle est de $600 \, km \, s^{-1}$, très supérieure à celle du son.

L'équation différentielle s'intègre facilement :

$$\boxed{\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) - v_s^2 ln(v/v_0) = 2v_s^2 ln(r/r_0) + (v_l^2/2)(r_0/r - 1)}$$

L'équation différentielle admet une **singularité** lorsque le terme de gauche et le terme de droite sont nuls **simultanément** : $v = v_s$ et $r = r_s = \frac{1}{4}r_0(v_l/v_s)^2$

La solution est alors **transsonique** ($v < v_s$ pour $r < r_s$ et $v > v_s$ pour $r > r_s$). Cette solution est atteinte pour la condition initiale v_0 telle que :

$$\boxed{\frac{1}{2}(v_s^2 - v_0^2) - v_s^2 \ln(v_s/v_0) = 2v_s^2 \ln(\frac{1}{4}(v_l/v_s)^2) + (v_l^2/2) \left(4(v_s/v_l)^2 - 1\right)}$$

Numériquement, avec $T=1.5\times 10^6\,K$ (température de la couronne solaire), $M=2\times 10^{30}\,kg$ (masse du soleil), $r_0=700\,000\,km$ (rayon du soleil), $m=1.67\times 10^{-27}\,kg$







(masse du proton), $k = 1.38 \times 10^{-23}$ SI (constante de Boltzman), $K = 6.67 \times 10^{-11}$ SI (constante de gravitation), on a :

$$\begin{cases} v_s = 157 \, km \, s^{-1} \\ v_l = 600 \, km \, s^{-1} \end{cases}$$

dont on déduit $r_s = 3.9 r_0$.

Dans ce modèle, l'écoulement devient supersonique pour $r_s = 4r_0 = 4$ rayons solaires lorsque v_0 satisfait l'équation ci-dessus, ce qui donne $v_0 = 6.3 \, km/s$.

À grande distance du soleil, on a les solutions asymptotiques :

$$v = 2v_s \left[ln(r/r_0) \right]^{1/2}$$
 et $\rho = \rho_0 v_0 r_0^2 / \left[2v_s r^2 \left(ln(r/r_0) \right)^{1/2} \right]$

Ce sont des fonctions à variation spatiale lente. A l'orbite de la Terre (1UA = 150 millions de km), cette solution asymptotique donne $365 \, km \, s^{-1}$ (la valeur observée est voisine de $400 \, km \, s^{-1}$).

La masse volumique observée y est voisine de $\rho = 1.7 \times 10^{-20} \, kg \, m^{-3}$. La solution de Parker permet de calculer la masse volumique dans la couronne à la naissance du vent solaire à partir des mesures à 1 UA par la relation $\rho_0 = r^2 \, \rho \, v/(r_0^2 \, v_0)$, ce qui donne $\rho_0 = 5 \times 10^{-14} \, kg \, m^{-3}$.

La situation réelle est plus complexe en raison du **champ magnétique** solaire et de la rotation de l'étoile. Le mouvement radial des particules se combine à la la rotation du Soleil, et le fluide emporte avec lui les lignes de champ magnétique solaires qui forment une spirale (la **spirale de Parker**) non plane, avec une alternance de secteurs à polarité N ou S dans le plan de l'écliptique. D'autre part, la naissance du vent solaire n'est pas à symétrie sphérique (zones de vent lent et de vent rapide).

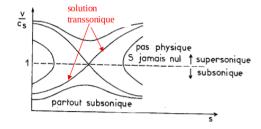


FIGURE 5 – Solutions de Parker $v/v_s(r)$ du vent solaire selon les valeurs de la vitesse initiale v_0 ; la solution transsonique (subsonique dans la basse couronne, puis supersonique) est la seule convenable.







MOOC (ASTRO)PHYSIQUE

J.M. Malherbe*

Printemps 2017

Cours

Annexes

Annexe 1 Quelques constantes fondamentales universelles en physique

Unités fondamentales : mètre, kg, seconde, Ampère, Kelvin (les autres unités s'y ramènent)

 $C = 3 \times 10^8 m/s$ vitesse de la lumière dans le vide

 $e = 1.6 \times 10^{-19} \, C$ charge de l'électron

 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \, kg$ masse de l'électron

 $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \, kg$ masse du proton

 $h=6.62\times 10^{-34}$ constante de Planck

 $k = 1.38 \times 10^{-23}$ constante de Boltzmann

 $N = 6.02 \times 10^{23}$ nombre d'Avogadro

 $R = 8.32 J K^{-1} mole^{-1}$ constante des gaz parfaits

 $R_H = 13.6 \, eV$ constante de Rydberg

 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ perméabilité magnétique du vide

 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ constante gravitationnelle

 $1/(4\pi\epsilon_0) = 9\times 10^9$ permittivité du vide

Annexe 2 Quelques constantes spécifiques au soleil

 $MS = 2 \times 10^{30} \, kg$ masse solaire

 $R_S = 696\,000\,km$ rayon solaire

 $g_S=275\,m/s^2$ accélération de la pesanteur à la surface solaire $=GM_s/R_s^2$

 $L = 3.86 \times 10^{26} \, W$ luminosité solaire (luminosité d'1 m^2 de surface : $6.3 \times 10^7 \, W$)

 $1UA = 149\,600\,000\,km$ distance movenne Terre/Soleil

 $V_l = 620 \, km/s$ vitesse de libération

 $T_e = 5800 K$ température effective

^{*}LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France







Composition : H92.1% et He7.8%,autres éléments (O, C, N, Fe, Mg, Ca...) en

trace (0.1%)

Rotation : 26 jours à l'équateur, 31 jours aux pôles, inclinaison de 6° sur l'écliptique

EXERCICES

CORRIGES

Avec des rappels ou compléments de cours en vert...

et des réponses en bleu...

1 – Analyse vectorielle, divergence, rotationnel	page 77
2 – Mesure expérimentale des vitesses, effet Doppler	page 78
3 - Cinématique des fluides	page 80
4 – Hydrostatique	page 83
5 – Dynamique des fluides, loi de Bernoulli	page 88
6 – Mesure expérimentale des champs magnétiques	page 94
7 – Advection/diffusion du champ magnétique	page 95
9 – Ondes	page 97
10 – chocs hydrodynamiques, écoulements transsoniques	page 104

1 – Analyse vectorielle, divergence, rotationnel

Exercice 1 : signification physique de div v et de rot v pour un écoulement 2D dans le plan (xOy) de vitesse v (v_x, v_y) en coordonnées cartésiennes ou (v_r, v_θ) en coordonnées polaires

En coordonnées cartésiennes (x, y), on définit avec ∇ ($\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$) opérateur "nabla":

div
$$\mathbf{v} = \partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = \nabla \cdot \mathbf{v}$$
 et $\mathbf{rot} \ \mathbf{v} = (\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y) \ \mathbf{e_z} = \nabla \Lambda \mathbf{v}$ (orthogonal au plan xOy)

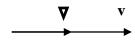
div \mathbf{v} = caractérise la variation spatiale du champ des vitesses dans sa propre direction; **rot** \mathbf{v} caractérise la variation spatiale du champ des vitesses dans la direction orthogonale

En coordonnées polaires (r, θ) , on a:

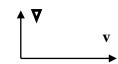
div
$$\mathbf{v} = (1/r) \partial (r\mathbf{v}_r)/\partial r + (1/r) \partial \mathbf{v}_{\theta}/\partial \theta$$
 et **rot** $\mathbf{v} = (1/r) [\partial (r\mathbf{v}_{\theta})/\partial r - \partial \mathbf{v}_r/\partial \theta] \mathbf{e}_{\mathbf{z}}$

div **v** caractérise un mouvement convergent ou divergent; **rot v** caractérise un mouvement de rotation.

1) on donne le champ de vitesse suivant: $\mathbf{v} = \mathbf{x} \ \mathbf{e_x}$ calculer div \mathbf{v} , **rot** \mathbf{v} et l'équation des lignes du champ des vitesses



2) on donne le champ de vitesse suivant: $\mathbf{v} = \mathbf{y} \ \mathbf{e}_{\mathbf{x}}$ calculer div \mathbf{v} , rot \mathbf{v} et l'équation des lignes du champ des vitesses



- 3) en coordonnées polaires, que vaut le rotationnel d'un mouvement <u>radial</u> de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \mathbf{e_r}$? Quelle est l'équation et la nature des lignes de champ?
- 4) en coordonnées polaires, quelle est la dépendance en r du seul mouvement <u>radial</u> de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \, \mathbf{e_r}$ qui soit à divergence nulle ?
- 5) en coordonnées polaires, que vaut la divergence d'un mouvement <u>orthoradial</u> de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ \mathbf{e}_{θ} ? Quelle est l'équation et la nature des lignes de champ?
- 6) en coordonnées polaires, quelle est la dépendance en r du seul mouvement <u>orthoradial</u> de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_{\theta}$ qui soit à rotationnel nul (irrotationnel) ?
- 7) on suppose qu'au point M(x, y) dans un fluide en rotation, $\mathbf{v}(M) = \Omega \mathbf{e}_z \Lambda \mathbf{O} \mathbf{M}$ où Ω est la vitesse angulaire (rd/s). Calculer div \mathbf{v} , rot \mathbf{v} et l'équation des lignes du champ des vitesses. Préciser le sens de rotation selon le signe de Ω .
- 8) on suppose qu'au point M(x, y) dans un fluide, $\mathbf{v}(M) = k$ \mathbf{OM} où k est une constante. Calculer div \mathbf{v} , \mathbf{rot} \mathbf{v} et l'équation des lignes du champ des vitesses. Préciser le caractère convergent ou divergent selon le signe de k.

Réponses:

1) div v = 2, **rot** v = 0

équation des lignes de champ y = constante (droites parallèles à l'axe Ox)

Remarque: \mathbf{v} varie dans sa propre direction ($\mathbf{e}_{\mathbf{x}}$) et ne varie pas dans la direction orthogonale ($\mathbf{e}_{\mathbf{v}}$)

2) div $\mathbf{v} = 0$, rot $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_{\mathbf{z}}$

équation des lignes de champ y = constante (droites parallèles à l'axe Ox)

Remarque: \mathbf{v} varie dans la direction orthogonale $(\mathbf{e}_{\mathbf{v}})$ et ne varie pas dans sa propre direction $(\mathbf{e}_{\mathbf{x}})$

- 3) **rot** $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, équation des lignes de champ $\theta = \text{constante}$ (droites en étoile)
- 4) v(r) proportionnel à 1/r

5) div $\mathbf{v} = 0$, équation des lignes de champ $\mathbf{r} = \text{constante}$ (cercles concentriques)

6) v(r) proportionnel à 1/r

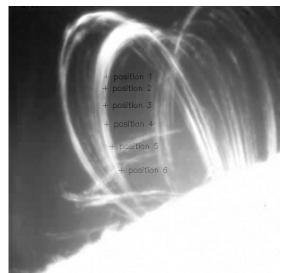
7) Avec \mathbf{v} (- Ω y, Ω x, 0), div \mathbf{v} = 0, \mathbf{rot} \mathbf{v} = 2 Ω $\mathbf{e}_{\mathbf{z}}$ (Ω $\mathbf{e}_{\mathbf{z}}$ vecteur tourbillon) équation des lignes de champ $x^2 + y^2 = constante$ (cercles concentriques).

Rotation dans le sens trigonométrique si $\Omega > 0$, horaire si $\Omega < 0$.

8) Avec \mathbf{v} (kx, ky, 0), div $\mathbf{v} = 2\mathbf{k}$ (convergent si $\mathbf{k} < 0$, divergent si $\mathbf{k} > 0$), **rot** $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ équation des lignes de champ $y = \alpha x$ (droites en étoile).

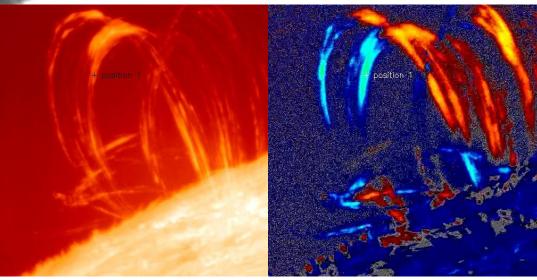
2 – Mesure expérimentale des vitesses, effet Doppler

exercice 2 : cinématique d'une boucle coronale solaire



à gauche: 6 positions d'une particule fluide. 300 s se sont écoulées entre chaque position. L'image couvre un champ de 74752 x 74752 km² (images de 512 x 512 pixels avec 1 pixel = 146 km).

Ci dessous, les images en intensité et en vitesses radiales de la position 1 (bleu = mouvement d'approche; rouge = mouvement d'éloignement).



On s'intéresse au mouvement fluide dans une boucle magnétique coronale observée dans la raie Halpha de l'hydrogène à 656.28 nm. 6 positions d'une particule fluide ont été mesurées toutes les 300 s et superposées sur la figure en noir et blanc. En même temps, les vitesses radiales ont été mesurées au spectrographe. Pour la position 1, on montre les images correspondantes.

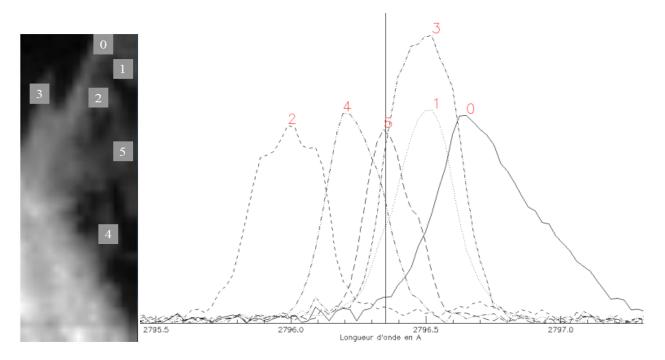
- 1) estimer la vitesse de déplacement du fluide en km/s dans le plan du ciel entre les positions 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, 5 et 6 le plus simplement possible (v = distance parcourue/temps).
- 2) le mouvement dans le plan du ciel est-il accéléré ou ralenti ?
- 3) en position 1, le mouvement orthogonal au plan du ciel est-il d'approche ou d'éloignement ?

Réponses:

- 1) vitesse dans le plan du ciel en km/s
- 10.8 km/s
- 15.6 km/s
- 17.1 km/s
- 21.0 km/s
- 23.4 km/s
- 2) accéléré
- 3) approche

exercice 3 : cinématique des vitesses radiales d'une protubérance solaire

Le satellite IRIS de la NASA est équipé d'un spectrograhe UV qui étudie la raie du magnésium ionisé à 279.635 nm de longueur d'onde centrée sur le trait vertical du graphique ci dessous. On a observé 6 points d'une protubérance numérotés de 0 à 5. Pour chacun des 6 points, dire s'il s'agit d'un mouvement radial d'approche, de repos, ou d'éloignement, et donner la valeur absolue en km/s de la vitesse radiale déduite du décalage Doppler, en prenant la position des pics d'émission pour mesurer ces décalages (méthode approximative, le centre de gravité est préférable).



Réponses:

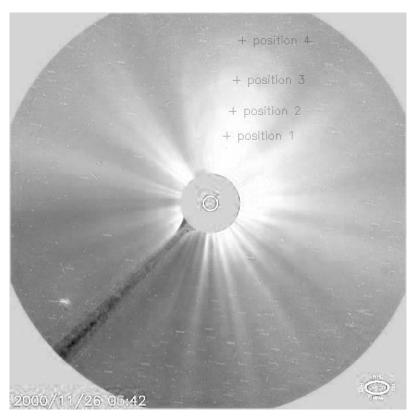
Point 0: éloignement, 31.8 km/s Point 1: éloignement, 16.9 km/s Point 2: approche, 38.2 km/s Point 3: éloignement, 17.9 km/s

Point 4: approche, 15.9 km/s Point 5: repos, 0.0 km/s

exercice 4 : cinématique d'une éjection de masse coronale solaire

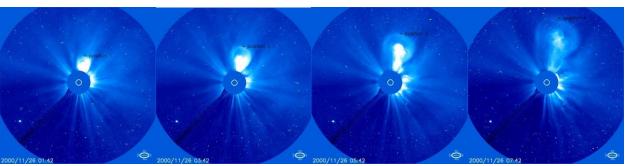
On s'intéresse au mouvement d'une éjection de masse coronale observée par le coronographe C3 du satellite SOHO en lumière blanche (le soleil est le rond blanc au centre, il est occulté par un disque bleu pour éliminer l'éblouissement du capteur). 4 positions d'une particule fluide ont été mesurées toutes les 2 heures et superposées sur la figure en noir et blanc.

- 1) estimer la vitesse de déplacement du fluide en km/s dans le plan du ciel entre les positions 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4 le plus simplement possible (v = distance parcourue/temps).
- 2) le mouvement dans le plan du ciel est-il accéléré ou ralenti ?



à gauche: 4 positions d'une particule fluide. 2 heures se sont écoulées entre chaque position. L'image couvre un champ de 40 x 40 millions de km² (images de 512 x 512 pixels avec 1 pixel = 77778 km).

Ci dessous, les images en intensité des positions 1 à 4.



Réponses:

1) vitesses en km/s:

356

435

556

2) accéléré

3 - Cinématique des fluides

exercice 5 : tourbillon de Rankine stationnaire

On considère un tourbillon fluide en rotation autour de l'axe Oz. On se place en coordonnées cylindriques (r,θ,z) ; la vitesse du fluide \mathbf{v} est <u>orthoradiale</u> et ne dépend que de r. La vorticité du tourbilon est définie par $\mathbf{rot}(\mathbf{v}) = 2 \ \Omega \ \mathbf{e_z}$ avec:

r < R: $\Omega = constante$, R est le rayon du tourbillon

r > R: $\Omega = 0$

Exprimer la vitesse du fluide v_{θ} en fonction de r, R et Ω en utilisant le "théorême d'Ampère" de la cinématique des fluides dans les deux régions:

1) r < R

2) r > R

Aide: la relation $\iint \mathbf{rot}(\mathbf{v}).\mathbf{dS} = \int \mathbf{v.dl}$ constitue le théorême d'Ampère. La circulation du vecteur vitesse \mathbf{v} sera prise sur un contour circulaire fermé de rayon \mathbf{r} , et le flux de la vorticité $\mathbf{rot}(\mathbf{v})$ sera calculé sur le disque de surface πr^2 enlacé par ce contour.

3) que peut-on dire de $div(\mathbf{v})$?

aide: $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = (1/r) \partial v_{\theta} / \partial \theta$ pour un écoulement orthoradial

- 4) en déduire la nature compressible/incompressible de l'écoulement
- 5) existe t-il un potentiel des vitesses Φ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \Phi$ pour $\mathbf{r} < \mathbf{R}$?
- 6) donner le potentiel des vitesses Φ pour r > R en fonction de Ω , R et θ aide: grad $\Phi = [\partial \Phi/\partial r, (1/r) \partial \Phi/\partial \theta, \partial \Phi \partial z]$ en coordonnées cylindriques

Réponses:

```
1) r < R

2 \Omega \pi r^2 = v_\theta 2\pi r \quad d'où v_\theta(r) = \Omega r

2) r > R

2 \Omega \pi R^2 = v_\theta 2\pi r \quad d'où v_\theta(r) = \Omega R^2/r

3) div(\mathbf{v}) = 0 car la vitesse de dépend pas de \theta

4) incompressible car div(\mathbf{v}) = 0

5) non (car la vorticité est non nulle)

6) \Phi(\theta) = \Omega R^2 \theta
```

exercice 6: tourbillon dans un plan

Soit un tourbillon de vecteur vitesse $\mathbf{v} = (k/r)$ \mathbf{e}_{θ} en coordonnées polaires (r,θ) où k est une constante positive ou négative selon le sens de rotation du tourbillon; si z est le nombre complexe x+i y, on rappelle que z=x+i y=r $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\mathrm{r}^2=x^2+y^2=|z|^2$, et $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

1) exprimer les composantes v_x et v_y du vecteur vitesse \mathbf{v} dans le repère (xOy) dérivant du potentiel complexe $f(z) = -i \ k \ ln(z)$ en fonction de r et de θ

```
Aide: e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta et e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta
```

2) En déduire v_r projection du vecteur vitesse $\mathbf{v}(v_x, v_y)$ dans la direction radiale \mathbf{e}_r et v_θ projection dans la direction orthoradiale \mathbf{e}_θ

```
Aide: \mathbf{e_r} = (\cos\theta, \sin\theta) et \mathbf{e_\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta) dans le repère (xOy); \mathbf{v_r} = \mathbf{v.e_r} et \mathbf{v_\theta} = \mathbf{v.e_\theta}
```

- 3) Déduire de $f(z) = \varphi + i \psi$ les fonctions $\varphi(r,\theta)$ et $\psi(r,\theta)$,
- 4) puis l'équation des lignes équipotentielles et leur nature géométrique,
- 5) et enfin l'équation des lignes de champ et leur nature géométrique.

Réponses:

```
1) df/dz = v_x - i \ v_y = -i \ k \ / \ z = -i \ (k \ / \ r) \ e^{-i\theta} = -i \ (k \ / \ r) \ (\cos\theta - i \sin\theta)
d'où v_x = -(k \ / \ r) \sin\theta
v_y = (k \ / \ r) \cos\theta
2) v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta = 0
et v_\theta = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta = k \ / \ r
3) f(z) = -i \ k \ln(r \ e^{i\theta}) = -i \ k \ln(r) + k \ \theta = \phi + i \ \psi
d'où \phi(r,\theta) = k \ \theta \ et \ \psi(r,\theta) = -k \ln(r)
4) lignes équipotentielles: \phi(r,\theta) = \text{constante}, donc \theta = \text{constante} (droites passant par l'origine O)
5) lignes de champ: \psi(r,\theta) = \text{constante}, donc r = \text{constante} (cercles de centre O)
```

exercice 7 : puits ou source dans un plan

Soit $\mathbf{v} = (\mathbf{k/r})$ $\mathbf{e_r}$ un champ de vitesses en coordonnées polaires (\mathbf{r}, θ) où \mathbf{k} est une constante positive ou négative selon que l'on a affaire à une source ou à un puits; si z est le nombre complexe $\mathbf{x} + \mathbf{i}$ y, on rappelle que $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{i}$ y = \mathbf{r} e^{i θ} où $\mathbf{r}^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = |\mathbf{z}|^2$ et $\mathbf{x} = \mathbf{r}$ cos θ , $\mathbf{y} = \mathbf{r}$ sin θ .

1) exprimer les composantes v_x et v_y du vecteur vitesse \mathbf{v} dans le repère (xOy) dérivant du potentiel complexe $f(z) = k \ln(z)$ en fonction de r et de θ

```
Aide: e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta et e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta
```

2) En déduire v_r projection du vecteur vitesse ${\bf v}(v_x,\,v_y)$ dans la direction radiale ${\bf e}_r$ et v_θ projection dans la direction orthoradiale ${\bf e}_\theta$

```
Aide: \mathbf{e_r} = (\cos\theta, \sin\theta) et \mathbf{e_\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta) dans le repère (xOy); \mathbf{v_r} = \mathbf{v.e_r} et \mathbf{v_\theta} = \mathbf{v.e_\theta}
```

- 3) Déduire de $f(z) = \varphi + i \psi$ les fonctions $\varphi(r,\theta)$ et $\psi(r,\theta)$,
- 4) puis l'équation des lignes équipotentielles et leur nature géométrique,
- 5) et enfin l'équation des lignes de champ et leur nature géométrique.

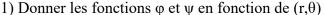
```
Réponses:
```

```
1) df/dz = v_x - i \ v_y = k \ / \ z = (k \ / \ r) \ e^{-i\theta} = (k \ / \ r) \ (\cos\theta - i \ \sin\theta)
d'où
v_x = (k \ / \ r) \ \cos\theta
v_y = (k \ / \ r) \ \sin\theta
2) v_r = v_x \ \cos\theta + v_y \ \sin\theta = k \ / \ r
et v_\theta = -v_x \ \sin\theta + v_y \ \cos\theta = 0
3) f(z) = k \ ln(r \ e^{i\theta}) = k \ ln(r) + i \ k \ \theta = \phi + i \ \psi
d'où \ \phi(r,\theta) = k \ ln(r) \ et \ \psi(r,\theta) = k \ \theta
4) lignes équipotentielles: \phi(r,\theta) = \text{constante}, donc r = \text{constante} (cercles de centre O)
5) lignes de champ: \psi(r,\theta) = \text{constante}, donc \theta = \text{constante} (droites passant par l'origine O)
```

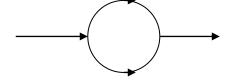
exercice 8 : écoulement plan avec obstacle circulaire (plus difficile)

On considère le potentiel complexe des vitesses suivant: $f(z) = v_0$ ($z + R^2/z$) = $\phi + i \psi$ caractérisant l'écoulement autour d'un obstacle circulaire

de rayon R et centre O. On se place en coordonnées polaires (on rappelle que z=x+i y=r $e^{i\theta}$). A l'infini, ${\bf v}=v_0$ ${\bf e_x}$.



2) montrer que la ligne de courant $\psi = 0$ correspond à l'axe Ox et au contour de l'obstacle.



- 3) Exprimer les composantes (v_x, v_y) du vecteur vitesse \mathbf{v} en fonction de (r, θ) .
- 4) Donner les composantes (v_x, v_y) de \mathbf{v} sur l'axe Ox $(\theta = 0)$
- 5) Donner les composantes (v_x, v_y) de \mathbf{v} sur l'axe Oy $(\theta = \pi/2)$.
- 6) Donner les composantes (v_x, v_y) du vecteur vitesse \mathbf{v} sur l'obstacle (r = R); que vaut sa norme $||\mathbf{v}||$ en fonction de θ ? Qu'obtient t-on lorsque $\theta = \pi/2$?

Aide: la vitesse complexe est donnée par $df/dz = v_x - i \ v_y$ $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$ $\mathbf{e_r} = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\mathbf{e_\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ dans le repète (x0y); $v_r = \mathbf{v.e_r}$ et $v_\theta = \mathbf{v.e_\theta}$

Réponses:

```
1) f(z) = v_0 [ r e^{i\theta} + (R^2/r) e^{-i\theta} ]

= v_0 [ r (\cos\theta + i \sin\theta) + (R^2/r) (\cos\theta - i \sin\theta) ]

= v_0 [ (r + R^2/r) \cos\theta + i (r - R^2/r) \sin\theta ]

= \varphi + i \psi

d'où \varphi(r,\theta) = v_0 (r + R^2/r) \cos\theta

et \quad \psi(r,\theta) = v_0 (r - R^2/r) \sin\theta

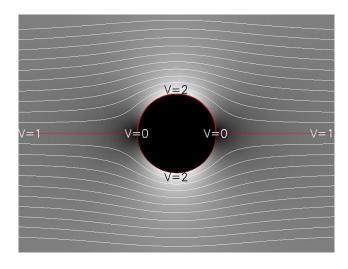
2) \psi(r,\theta) = v_0 (r - R^2/r) \sin\theta = 0 a deux solutions possibles:

a) r = R soit le contour de l'obstacle

b) \theta = 0 ou \pi soit l'axe Ox

3) df/dz = v_x - i v_y = v_0 (1 - R^2/z^2) avec z^2 = r^2 e^{2i\theta}
```

```
\begin{array}{l} df/dz = v_x - i \ v_y = v_0 \ (\ 1 - e^{-2i\theta} \ R^2/r^2 \ ) \\ df/dz = v_x - i \ v_y = v_0 \ [\ 1 - (cos2\theta - i \sin2\theta) \ R^2/r^2 \ ] \\ d'où \ v_x = v_0 \ [\ 1 - cos2\theta \ (R^2/r^2) \ ] \ et \ v_y = -v_0 \ [\sin2\theta \ (R^2/r^2) \ ] \\ 4) \ \theta = 0 \quad donne \ v_x = v_0 \ [\ 1 - R^2/r^2 \ ] \ et \ v_y = 0 \\ 5) \ \theta = \pi/2 \ donne \ v_x = v_0 \ [\ 1 + R^2/r^2 \ ] \ et \ v_y = 0 \\ 6) \ si \ r = R, \ on \ obtient \\ v_x = v_0 \ [\ 1 - cos2\theta \ ] = 2 \ v_0 \ sin^2\theta \ et \ v_y = -v_0 \ sin2\theta \ = -2 \ v_0 \ sin\theta \ cos\theta \\ On \ en \ d\'eduit \ ||\mathbf{v}|| = 2 \ v_0 \ sin\theta| \\ Pour \ \theta = \pi/2, \ ||\mathbf{v}|| = 2 \ v_0 \ soit \ le \ double \ de \ la \ vitesse \ de \ l'\'ecoulement \ \grave{a} \ l'infini} \ (voir \ figure) \end{array}
```



En niveaux de gris: la norme $\|\mathbf{v}\|$ du vecteur vitesse \mathbf{v} , normalisée à v_0

Les lignes blanches sont les lignes du champ des vitesses données par l'équation $\psi(r,\theta)$ = constante

Les lignes rouges correspondent à l'équation $\psi(\mathbf{r}, \theta) = 0$

4 – Hydrostatique

exercice 9 : statique des fluides compressibles et incompressibles

L'équation de la statique des fluides est $dP = -\rho g dz$ où z est l'altitude (axe O_z dirigé vers le haut). On désigne par P_0 la pression atmosphérique au niveau du sol en z = 0.

Liquide incompressible

- 1. Donner P(z) en fonction de ρ , g, z et P_0 .
- 2. Applications numériques : pour l'eau on a $\rho=1000$ kg.m⁻³, g=10 m.s⁻², $P_0=1$ bar = 10^5 Pa. Que vaut la pression P en bars à z=-10 m et z=-5000 m (fond des mers)?

Gaz compressible isotherme

On considère un gaz parfait de pression $P = \rho RT/M$ avec T la température (invariable), R = 8,32 J.mole⁻¹.K⁻¹ la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz.

- 1. Donner P(z) en fonction de P_0 , z et h = RT/(gM) l'échelle de hauteur.
- 2. Applications numériques :
 - a) pour l'air : $T=300~{\rm K},~M=29~{\rm g},~g=10~{\rm m.s^{-2}}.$ Calculer h et la pression P en bars à $z=1000~{\rm m}.$
 - b) pour l'atmosphère solaire : T=6000 K, M=1 g (hydrogène), $g=275~\rm m.s^{-2}.$ Calculer h.

Gaz compressible avec loi en $T(z) = T_0 - \alpha z$

Dans l'atmosphère terrestre on a approximativement $\alpha = 6 \times 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}$ et on considère que l'air obéit à la loi des gaz parfaits $P = \rho RT/M$.

- 1. Exprimer P(z) en fonction de P_0 , α , z, T_0 , M, g et R.
- 2. Applications numériques :
 - a) pour l'air : $T_0=300$ K, M=29 g, g=10 m.s⁻², $P_0=1$ bar. Donner la valeur de la pression à z=9000 m.
 - b) Comparer à la valeur qu'on aurait obtenue dans le cas de l'atmosphère isotherme à $T_0\,=\,300~\mathrm{K}.$

Corrections

Liquide incompressible

- 1. $P = P_0 \rho gz$
- 2. Pour z = -10 m, P = 2 bars. Pour z = -5000 m, P = 500 bars.

Gaz compressible isotherme

- 1. $P = P_0 e^{-z/h}$ avec h = RT/(gM) puisque $dP = -\rho g dz = -P dz/h$ d'où après intégration $\ln{(P/P_0)} = -z/h$.
- 2. a) h = 8,6 km, P(z = 1000) = 0,89 bars.
 - b) h = 185 km, il s'agit de l'épaisseur de la photosphère, couche visible à l'œil nu.

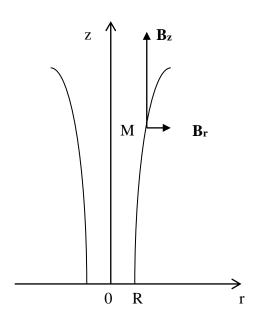
Gaz compressible avec loi en $T(z) = T_0 - \alpha z$

- 1. $P(z) = P_0(1 \alpha z/T_0)^{Mg/(R\alpha)}$ car $\mathrm{d}P/P = -Mg\mathrm{d}z/[(T_0R)(1 \alpha z/T_0)]$, en posant $x = \alpha z/T_0$ on a $\mathrm{d}P/P = Mg\mathrm{d}x/[(\alpha R)(x-1)]$. Après intégration, $\ln{(P/P_0)} = Mg\ln{(1 \alpha z/T_0)/(\alpha R)}$ soit $\ln{(P/P_0)} = \ln{\left[(1 \alpha z/T_0)^{Mg/(\alpha R)}\right]}$.
- 2. $P(z=9000)=0.82^{5,81}=0.31$ bar. Dans le cas de l'atmosphère isotherme, on a $\alpha \to 0$ d'où $P(z) \to P_0 e^{-Mgz/(RT_0)}$ ce qui donnerait P(z=9000)=0.35 bar. On ne fait donc pas de grosse erreur puisque la valeur obtenue est proche de celle trouvée précédemment.

exercice 10 : évasement statique des tubes magnétiques dans la couronne solaire

On considère un tube magnétique vertical d'axe Oz à symétrie cylindrique de rotation atour de Oz. La section de ce tube augmente avec l'altitude, mais cependant, au point M, la composante radiale B_r du champ magnétique reste faible devant la composante verticale B_z .





1) le tube s'évase dans la couronne solaire qu'on assimile à un gaz parfait isotherme de température $T=10^6$ K obéissant à la loi P=2 ρ R T / M, M étant la masse molaire de l'hydrogène; le facteur 2 provient de l'ionisation (autant de protons, qui font la masse volumique ρ , que d'électrons). En partant de l'équilibre hydrostatique $dP=-\rho$ g dz, et en posant h=2 RT / gM, comment varie la pression P en fonction de z, h et P_0 pression au sol ?

- 2) que vaut l'échelle de hauteur h (en km) pour R = 8.314, $T = 10^6$ K, $M = 10^{-3}$ kg, g = 275 ms⁻²?
- 3) l'équilibre latéral des forces entre la pression magnétique interne au tube et la pression gazeuse extérieure impose $B_z^2/2\mu_0 = P(z)$. Exprimer alors $B_z(z)$ en fonction de z et des constantes h, μ_0 et P_0 .

- 4) Quelle est l'échelle de hauteur H de B_z en fonction de h (donner l'expression littérale puis numérique) ?
- 5) l'équation de Maxwell div(\mathbf{B}) = 0 permet de calculer la composante radiale du champ magnétique, par la relation (1/r) $\partial(rB_r)/\partial r + dB_z/dz = 0$. En intégrant, sachant que $B_r(0,z) = 0$, exprimer $B_r(r,z)$ en fonction de r, z et des constantes h, μ_0 et P_0 .
- 6) déterminer l'équation des lignes de champ z(r) en fonction de h et de (r/R) où R est le rayon du tube à sa base. Aide: les lignes de champ sont solution de $dz/dr = B_z/B_r$ (à intégrer)
- 7) à quelle alitude le rayon du tube a t-il doublé (donner l'expression littérale en fonction de h puis numérique) ?

Réponses:

- 1) $P(z) = P_0 e^{-z/h}$
- 2) h = 60465 km
- 3) $B_z(z) = (2\mu_0 P_0)^{1/2} e^{-z/2h}$
- 4) H = 2 h = 120930 km
- 5) $B_r(r,z) = (r/4h) (2\mu_0 P_0)^{1/2} e^{-z/2h}$
- 6) $z = 4 h \ln(r/R)$
- 7) z = 4 h ln2 = 167650 km

exercice 11 : aplatissement d'un corps sphérique homogène en rotation (planète, étoile)

On considère l'équilibre d'un corps sphérique homogène autogravitant, de masse volumique ρ , de rayon R et centre O, en rotation autour de l'axe polaire Oz à la vitesse angulaire Ω . Sous l'effet de la rotation, le corps s'aplatit légèrement de sorte que son rayon équatorial devient $R + \Delta R$ avec $\Delta R \ll R$, R étant le rayon polaire.

Préambule

Le champ de gravitation au sein d'un corps sphérique homogène s'obtient par le théorème de Gauss du champ de gravitation sur une sphère de Gauss de rayon r < R:

$$\iint \mathbf{G.dS} = -4 \pi K M_{intérieure}$$

où $K = 6.67 \ 10^{-11}$ est la constante de gravitation. On obtient :

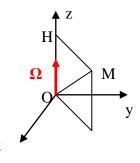
$$G(r) 4 \pi r^2 = -4 \pi K (4/3 \pi r^3 \rho) d'où G(r) = -4/3 \pi K \rho r$$

Au point M de coordonnées (x, y, z), le champ vectoriel est $G(M) = -4/3 \pi K \rho OM$

L'équation de l'équilibre hydrostatique en M est:

- grad P +
$$\rho$$
 G(M) + ρ Ω^2 HM = 0

où P(x,y,z) est la pression et ρ Ω^2 **HM** la force d'inertie centrifuge par unité de volume. H est la projection de M sur l'axe Oz de rotation.



- 1) écrire **G**(M) sous la forme d'un gradient en fonction de
- π K ρ et des coordonnées (x, y, z) du vecteur **OM**
- 2) écrire **HM** de coordonnées (x, y, 0) sous la forme d'un gradient
- 3) à partir des expressions obtenues aux questions 1 et 2, mettre l'équation d'équilibre sous la forme $\mathbf{grad}(f) = 0$ où f est une fonction des coordonnées (x, y, z) du point M, de K, ρ , Ω^2 et de la pression locale P. Cette fonction est constante. Donner son expression.

- 4) la surface libre du corps en rotation a pour équation P(x,y,z) = constante; mettre l'équation de la surface libre sous la forme a $(x^2+y^2) + b$ $z^2 = c$ où c est une constante positive et où a et b sont des quantités positives fonction de K, ρ et Ω^2 . Exprimer a et b en fonction de K, ρ et Ω^2 .
- 5) cette équation est celle d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe de rotation Oz. écrire l'équation aux pôle Nord pour x = y = 0 et z = R, ce qui détermine la constante c.
- 6) Ecrire l'équation à l'équateur pour $x^2 + y^2 = (R + \Delta R)^2$ et z = 0.
- 7) sachant que la force centrifuge est faible devant la gravitation, donc que $\Omega^2 \ll K \rho$, déduire des questions 5 et 6 l'expression de l'applatissement $\Delta R/R$ (petit nombre devant 1) en fonction de K, ρ et Ω^2 .
- 8) application numérique à la Terre
- $\rho = 5500 \text{ kg m}^{-3}$, $\Omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rd/s}$, en déduire l'applatissement $\Delta R/R$
- 9) application numérique au Soleil
- $\rho = 1400 \text{ kg m}^{-3}$, $\Omega = 2.8 \ 10^{-6} \text{ rd/s}$, en déduire l'applatissement $\Delta R/R$

Réponses:

```
1) G(M) = -2/3 \pi K \rho grad(x^2+y^2+z^2)
```

2)
$$HM = grad(x^2 + y^2)/2$$

3)
$$f(x,y,z) = -P - 2/3 \pi K \rho^2 (x^2+y^2+z^2) + \rho \Omega^2 (x^2+y^2)/2$$

4)
$$(x^2+y^2)$$
 $(2/3 \pi K \rho^2 - \rho \Omega^2/2) + 2/3 \pi K \rho^2 z^2 = c$
 $a = 2/3 \pi K \rho^2 - \rho \Omega^2/2$
 $b = 2/3 \pi K \rho^2$

5)
$$2/3 \pi K \rho^2 R^2 = c$$

6)
$$(2/3 \pi \text{ K } \rho^2 - \rho \Omega^2/2) (R + \Delta R)^2 = c$$

7)
$$\Delta R/R = 3 \Omega^2 / (8 \pi K \rho)$$

- 8) 0.0017
- 9) 10⁻⁵

exercice 12 : corps sphérique homogène (planète, étoile) : effet de marée

On considère l'équilibre d'un corps sphérique homogène autogravitant, de masse volumique ρ , de rayon R et centre O, soumis à l'attraction d'un corps distant de masse m situé en P de coordonnées (d, 0, 0). Sous l'effet de marée, le corps autogravitant subit un renflement dans la direction et à l'opposé du corps distant de sorte que son rayon y devient $R + \Delta R$ avec $\Delta R << R$, R étant le rayon polaire.

Préambule

Le champ de gravitation au sein d'un corps sphérique homogène s'obtient par le théorème de Gauss du champ de gravitation sur une sphère de Gauss de rayon r < R:

$$\iint \mathbf{G.dS} = -4 \pi K M_{\text{intérieure}}$$

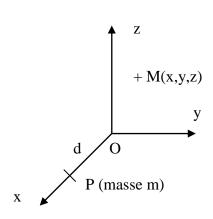
où $K = 6.67 \cdot 10^{-11}$ est la constante de gravitation. On obtient :

$$G(r) 4 \pi r^2 = -4 \pi K (4/3 \pi r^3 \rho) d'où G(r) = -4/3 \pi K \rho r$$

Au point M de coordonnées (x, y, z), le champ vectoriel est $G(M) = -4/3 \pi K \rho OM = -2/3 \pi K \rho grad(x^2+y^2+z^2)$

L'équation de l'équilibre hydrostatique en M est:

- grad
$$P + \rho G(M) + \rho K m grad(1/MP) = 0$$



où P(x,y,z) est la pression et ρ **grad** (K m /MP) la force d'attraction du corps distant placé en P.

- 1) écrire **G**(M) sous la forme d'un gradient en fonction de
- π K ρ et des coordonnées (x, y, z) du vecteur **OM**
- 2) exprimer la distance MP en fonction de d, x, y, z sous la forme MP = d f(x/d, y/d, z/d) où f est une fonction de (x/d, y/d, z/d) << 1, le corps attractif étant placé à grande distance.
- 3) par un développement limité, exprimer 1/MP sous la forme 1/MP = (1/d) g(x/d, y/d, z/d) où g est une fonction de (x/d, y/d, z/d); on ira jusqu'au second ordre.

Aide: pour |x| << 1, on a au second ordre $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + 3/8 x^2$

- 4) exprimer alors **grad** P sous la forme d'une somme de deux gradients de potentiels dépendant de x, y, z et des constantes K, m, d et ρ .
- 5) le corps attractif distant fait apparaître le potentiel ρ K m [$1/d + x/d^2 + 1/2 (2x^2 y^2 z^2)/d^3$] dont on ne retiendra que le terme de marée ρ K m **grad**[$1/2 (2x^2 y^2 z^2)/d^3$].

Exprimer grad P sous la forme du gradient d'un potentiel V(x, y, z) qu'on exprimera en fonction de x, y, z et des constantes K, m, d et ρ .

6) la surface libre a pour équation V(x,y,z) = constante.

Mettre cette équation sous la forme a $(y^2 + z^2) + b$ $x^2 = c$, où a, b et c sont des constantes positives. On exprimera a et b en fonction de K, m, d et ρ .

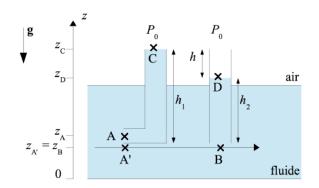
- 7) cette équation est celle d'un ellipsoïde de révolution autour de Ox, axe liant le corps sphérique au corps attractif distant. Soit R le rayon polaire. En se plaçant en x = 0, $y^2 + z^2 = R^2$, trouver l'expression de la constante c en fonction de R, K, m, d et ρ .
- 8) en se plaçant en y = z = 0, $x = R + \Delta R$, trouver une autre expression de la constante c en fonction de $R + \Delta R$, K, m, d et ρ .
- 9) sachant que l'effet de marée est petit, donc que $\rho >> m/d^3$, en déduire le renflement $\Delta R/R$ du corps autogravitant en fonction de ρ , m et d^3 .
- 10) application numérique aux marées terrestres. On donne m = $7.4\ 10^{22}\ kg$ masse de la Lune et d = $384000\ km$ distance Terre Lune. On prend ρ = $5500\ kg\ m^{-3}$. Calculer le renflement $\Delta R/R$ puis ΔR en m pour R = $6400\ km$ (rayon terrestre). Il va de soi que ce modèle est très simpliste: l'amplitude des marées dépend des continents et des formes des côtes.
- 11) On donne $m=2\ 10^{30}\ kg$ masse du Soleil et $d=150\ 10^6\ km$ distance Terre Soleil. On prend $\rho=5500\ kg\ m^{-3}$. Calculer le renflement $\Delta R/R$ puis ΔR en m pour $R=6400\ km$ (rayon terrestre). Les marées solaires sont deux fois moins importantes que les marées lunaires.

```
Réponses:
```

```
1) G(M) = -2/3 \pi K \rho \operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)
2) MP^2 = (d - x)^2 + y^2 + z^2 = d^2 - 2 d x + x^2 + y^2 + z^2
d'où MP = d [1 - 2 x/d + (x^2 + y^2 + z^2)/d^2]^{1/2}
3) 1/MP = 1/d [1 - 2x/d + (x^2 + y^2 + z^2)/d^2]^{-1/2}
            = 1/d [1 + x/d - 1/2 (x^2 + y^2 + z^2)/d^2 + 3/8 (4x^2/d^2)]
            = 1/d [1 + x/d + 1/2 (2x^2 - y^2 - z^2)/d^2]
4) grad P = -2/3 \pi K \rho^2 \text{ grad}(x^2+y^2+z^2) + \rho K \text{ m grad}[1/d + x/d^2 + 1/2 (2x^2 - y^2 - z^2)/d^3]
5) V(x,y,z) = -2/3 \pi K \rho^2 (x^2+y^2+z^2) + \rho K m (2x^2 - y^2 - z^2) / (2d^3)
6) (y^2+z^2) [2/3 \pi K \rho^2 + \rho K m / (2d^3)] + x^2 [2/3 \pi K \rho^2 - \rho K m / d^3] = c
a = 2/3 \pi K \rho^2 + \rho K m / (2d^3)
b=2/3~\pi~K~\rho^2 - \rho~K~m~/d^3
7) c = R^2 \left[ \frac{2}{3} \pi K \rho^2 + \rho K m / (2d^3) \right]
8) c = (R + \Delta R)^2 [2/3 \pi K \rho^2 - \rho K m/d^3]
9) \Delta R/R = 9 \text{ m} / (8 \pi \rho \text{ d}^3)
10) \Delta R/R = 8.5 \cdot 10^{-8}
\Delta R = 0.55 \text{ m}
11) \Delta R/R = 3.8 \cdot 10^{-8} \, donc \, \Delta R = 0.25 \, m
```

5 – Dynamique des fluides, loi de Bernoulli

exercice 13: Tube de Pitot



$$\begin{array}{l} \underline{\text{Hypothèses:}} \\ \text{A est voisin de A'} \\ z_{\text{A}} \approx z_{\text{A'}}, v_{\text{A}} = 0, v_{\text{A'}} \rightarrow 0 \\ z_{\text{C}} - z_{\text{A'}} = h_{1} \\ z_{\text{D}} - z_{\text{B}} = h_{2} \\ P_{\text{C}} = P_{\text{D}} = P_{0} \end{array}$$

Un fluide de masse volumique ρ se déplace à la vitesse v dans un tuyau. Ce dernier contient deux tubes permettant de relier le fluide à l'extérieur (voir Fig. ??). L'objectif de cet exercice est de déterminer la vitesse v du fluide à l'aide de ces deux tubes.

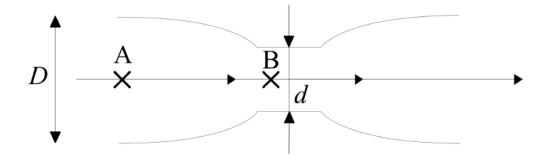
- 1. Déterminer la différence de pression $P_{A'} P_B$ en utilisant la loi de Bernoulli entre les points A' et B. On utilisera pour cela le fait que $v_{A'} \approx 0$.
- 2. a) Déterminer l'expression de P_A dans le tube de gauche en fonction de ρ , g, h_1 et P_0 .
 - b) Déterminer l'expression de $P_{\rm B}$ dans le tube de droite en fonction de $\rho,\,g,\,h_2$ et $P_0.$
 - c) On suppose que $P_A \approx P_{A'}$, donner la différence de pression $P_{A'} P_B$ à l'aide des réponses obtenues aux questions a) et b).
- 3. En utilisant les réponses aux question 1. et 2c), déterminer la vitesse v du fluide en fonction de g et h.

Note: on a $v = v_B$.

Corrections

- 1. $P_{A'} + \rho g z_{A'} + 1/2\rho v_{A'}^2 = P_B + \rho g z_B + 1/2\rho v_B^2$ or $z_{A'} = z_B$ et $v_{A'} = 0$ d'où $P_{A'} P_B = 1/2\rho v_B^2$.
- 2. a) Dans le tube de droite on a : $P_A = \rho g h_1 + P_0$.
 - b) Dans le tube de gauche on a : $P_B = \rho g h_2 + P_0$.
 - c) On a $P_A \approx P_{A'}$ d'où $P_{A'} P_B = \rho g(h_1 h_2) = \rho g h$.
- 3. $P_{A'} P_{B} = 1/2\rho v_{B}^{2} = \rho g h$ d'où $v = v_{B} = \sqrt{2gh}$.

exercice 14 : débitmètre à effet Venturi



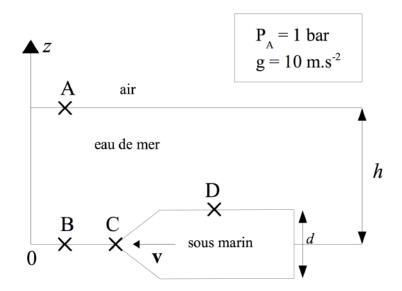
On considère une canalisation de diamètre D=20 cm comportant un étranglement de diamètre d=5 cm. On mesure entre les points A et B une dépression équivalente à 10 cm de Mercure ($\rho_{Hg}=13~600~{\rm kg.m^{-3}}$), c'est l'effet Venturi. Le fluide est incompressible (eau de masse volumique $\rho=1000~{\rm kg.m^{-3}}$).

- 1. Que vaut la dépression $P_{\rm A}-P_{\rm B}$ (en Pa)? On prendra $g=10~{\rm m.s^{-2}}.$
- 2. Déterminer la vitesse du fluide en B (en m.s⁻¹).
- 3. En déduire la vitesse du fluide en A (en m.s⁻¹).
- 4. Que vaut le débit en $m^3.s^{-1}$ et en litres. s^{-1} .

Corrections

- 1. $P_A P_B = 13600 \times 10 \times 0, 1 = 13600 \text{ Pa.}$
- 2. $P_{\rm A}+1/2\rho v_{\rm A}^2=P_{\rm B}+1/2\rho v_{\rm B}^2$ d'où $P_{\rm A}-P_{\rm B}=1/2\rho(v_{\rm B}^2-v_{\rm A}^2)$. On a également $(\pi D^2/4)v_{\rm A}=(\pi d^2/4)v_{\rm B}$ d'où $v_{\rm A}=(d/D)^2v_{\rm B}$. On a ainsi $P_{\rm A}-P_{\rm B}=1/2\rho v_{\rm B}^2[1-(d/D)^4]$ d'où $v_{\rm B}=\sqrt{2(P_{\rm A}-P_{\rm B})/[\rho(1-d^4/D^4)]}=5,2~{\rm m.s^{-1}}$.
- 3. $v_A = (d/D)^2 v_B = 0, 3 \text{ m.s}^{-1}$.
- 4. Le débit vaut $(\pi D^2/4)v_A = 0,01 \text{ m}^3.\text{s}^{-1} = 10 \text{ litres.s}^{-1}$.

exercice 15 : écoulement de Bernoulli autour d'un sous marin



On considère un sous-marin circulant à la vitesse $v=15~\rm km.h^{-1}$ dans l'eau de mer ($\rho=1040~\rm kg.m^{-3}$) à la profondeur $h=18~\rm m$ (voir Fig. ??).

- 1. Que vaut la pression statique en B, notée $P_{\rm B}$? On donnera la valeur en bars. Indication : on utilisera la loi de Bernoulli entre les points A et B.
- 2. Que vaut la pression d'arrêt sur le nez du sous-marin, c'est-à-dire en C, notée $P_{\rm C}$? On donnera la valeur en bars. *Indication*: on utilisera la loi de Bernoulli entre les points B et C.
- 3. On mesure sur les flancs du sous-marin, en D, $P_{\rm D}=1,5$ bars. On précise par ailleurs que le diamètre d du sous-marin est de 7 m. Que vaut la vitesse $v_{\rm D}$ de l'eau de mer en D en km.h⁻¹? Indication: on utilisera la loi de Bernoulli entre les points C et D.

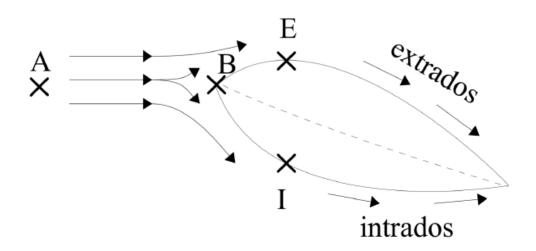
Corrections

1. $P_{\rm B}=2.8$ bars (car en utilisant la loi de Bernoulli on a, entre A et B, $P_{\rm A}+\rho gh=P_{\rm B}$).

- 2. $P_{\rm C}=3,0$ bars (car en utilisant la loi de Bernoulli on a, entre B et C, $P_{\rm B}+1/2\rho v^2=P_{\rm C}$).
- 3. $v_{\rm D}=15~{\rm m.s^{-1}}=54~{\rm km.h^{-1}}$ (car en utilisant la loi de Bernoulli on a, entre C et D, $P_{\rm C}=P_{\rm D}+\rho g d/2+1/2\rho v_{\rm D}^2$).

exercice 16: effet Coanda, portance

<u>Effet Coanda</u>: le gradient de pression est dirigé du centre de courbure de l'écoulement vers l'extérieur autour de l'aile (voir cours).



On étudie le comportement d'une aile d'avion en soufflerie (voir Fig. ??). À grande distance de l'aile en A, $P_{\rm A}=10^5$ Pa, $v_{\rm A}=40$ m.s⁻¹. On considère l'air comme incompressible de masse volumique $\rho=1,225$ kg.m⁻³. On précise que q=10 m.s⁻².

- 1. Que vaut la pression d'arrêt en B?
- 2. Sur l'extrados en E (centre de courbure en dessous de E), on mesure une dépression équivalente à h = 300 mm d'eau (rappel : $\rho_{\text{eau}} = 1000$ kg.m⁻³); calculer P_{E} (en Pa).
- 3. Sur l'intrados en I (centre de courbure en dessous de I), on mesure une surpression équivalente à h = 50 mm d'eau; calculer $P_{\rm I}$ (en Pa).
- Que vaut la portance par mètre carré de surface (en N.m⁻²)?
- 5. À l'aide de l'équation de Bernoulli entre A et E puis A et I, donner l'expression de $v_{\rm E}$, $v_{\rm I}$ puis calculer les valeurs (en m.s⁻¹). Comparer à $v_{\rm A}$.

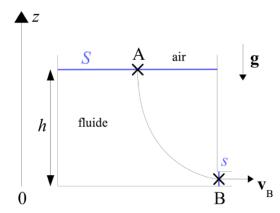
Note : l'épaisseur de l'aile est négligeable de sorte que le voisinage de l'aile est à pression atmosphérique $P_{\rm A}$.

Corrections

- 1. $1/2\rho v_{\rm A}^2 + P_{\rm A} = P_{\rm B}$ d'où $P_{\rm B} = 101~000~{\rm Pa}$.
- 2. $P_{\rm E} = P_{\rm A} \rho_{\rm eau} g h_{\rm eau} = 97~000~{\rm Pa}.$
- 3. $P_{\rm I} = P_{\rm A} + \rho_{\rm eau} g h_{\rm eau} = 100 500 \text{ Pa}.$
- 4. $P_{\rm I} P_{\rm E} = 3500 \text{ N.m}^{-2}$.
- 5. $P_{\rm A} + 1/2\rho v_{\rm A}^2 = P_{\rm E} + 1/2\rho v_{\rm E}^2$ d'où $v_{\rm E} = \sqrt{v_{\rm A}^2 + 2(P_{\rm A} P_{\rm E})/\rho}$, on a donc $v_{\rm E} = 80$ m.s⁻¹. De même pour $v_{\rm I}$ où on trouve 28 m.s⁻¹. L'écoulement est plus rapide sur l'extrados que sur l'intrados. On voit que $v_{\rm E} > v_{\rm A}$ et que $v_{\rm I} < v_{\rm A}$.

exercice 17 : vidange d'un réservoir, équation de Bernoulli

On considère un réservoir de hauteur h et de section S percé d'un trou à sa base en B de section $s \ll S$ (voir Fig. ??). Le fluide qu'il contient est incompressible de masse volumique ρ .



- 1. Écrire en régime stationnaire l'équation de Bernoulli entre A et B et en déduire la vitesse $v_{\rm B}$ de sortie du fluide en fonction de g et h. Comme $s \ll S$, on supposera $v_{\rm A} \approx 0$.
- 2. Appliquer la conservation du débit entre A et B et exprimer v_A en fonction de v_B , S et s.
- 3. a) En faisant l'approximation que l'expression de v_A trouvée à la question 1. reste valable en régime quasi-stationnaire (si $s \ll S$), trouver la loi qui régit la hauteur d'eau z(t) en fonction de h (hauteur initiale), g, S, s et t.

Indication: on a $v_A = -dz/dt$.

- b) Exprimer le temps de vidange.
- 4. Application numérique : on donne h=1 m, S/s=1000 et g=10 m.s⁻². Calculer le temps de vidange.

Corrections

- 1. $P_A + \rho g h = P_B + 1/2\rho v_B^2$ or $P_A = P_B$ = pression atmosphérique d'où $\rho g h = 1/2\rho v_B^2$ et donc $v_B = \sqrt{2gh}$. Il s'agit de la loi de Torricelli.
- 2. $sv_B = Sv_A$ d'où $v_A = (s/S)v_B$.
- 3. a) On a $v_A=-\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ d'où $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=-(s/S)\sqrt{2gz}$ (le signe provient du fait que $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t<0$), en intégrant de h à z on trouve :

$$\int_{h}^{z} z^{-1/2} dz = -(s/S)\sqrt{2g} \int_{0}^{t} dt$$
$$2 \left[z^{1/2} \right]_{h}^{z} = -(s/S)\sqrt{2g} t$$
$$\sqrt{z} - \sqrt{h} = -(s/S)\sqrt{g/2} t$$

d'où
$$z = \left[\sqrt{h} - (s/S)\sqrt{g/2} \ t\right]^2$$
.

- b) Le temps de vidange est obtenu pour z=0 d'où $t=(S/s)\sqrt{2h/g}$.
- 4. Application numérique : t = 446 s.

exercice 18 : jet d'eau et équation de Bernoulli incompressible

La vitesse verticale de l'eau éjectée par la tuyère du célèbre jet d'eau de Genève, de diamètre 10 cm, est voisine de v = 200 km/h.

- 1) que vaut cette vitesse v d'éjection en m/s ?
- 2) quel est le débit du jet d'eau en litres/s ?

- 3) quelle relation lie v à l'accélération de la pesanteur g et à la hauteur h du jet ? aide: utiliser la loi de Bernoulli entre le sol et le sommet du jet
- 4) avec $g = 10 \text{ m/s}^2$, calculer h en m.
- 5) exprimer la surpression ΔP nécessaire pour éjecter l'eau en fonction de sa vitesse d'éjection v et de sa masse volumique ρ
- 6) que vaut ΔP (en bars) pour v=200 km/h et $\rho=1000$ kg m⁻³? aide: utiliser la loi de Bernoulli de part et d'autre de la tuyère d'éjection, en supposant la vitesse nulle en amont
- 7) en déduire la puissance en MW du jet d'eau



<u>Réponses</u>

- 1) 55 m/s
- 2) 432 litres
- 3) $v = (2 g h)^{1/2}$
- 4) h = 150 m
- 5) $\Delta P = 1/2 \rho v^2$
- 6) $\Delta P = 15$ bars
- 7) puissance = $(1/2 \rho v^2) x$ débit = 1.5 $10^6 x 0.43 = 0.65$ MW

exercice 19 : force exercée par un fluide sur un obstacle

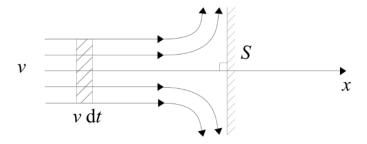


FIGURE 7 – Rencontre d'un fluide avec un obstacle.

On considère un fluide incompressible de masse volumique ρ , se déplaçant à grande distance à la vitesse $v=10~\mathrm{m.s^{-1}}$, le long de l'axe x (voir Fig. ??). Le fluide rencontre dans son parcours un obstacle de surface $S=1~\mathrm{m^2}$.

- 1. Exprimer la force exercée par le fluide sur l'obstacle en fonction de ρ , v et S?

 Indication: on utilisera la quantité de mouvement d'un volume $\mathrm{d}V$.
- 2. Applications numériques : calculer cette force dans le cas où le fluide est de l'eau ($\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, de l'air ($\rho = 1, 3 \text{ kg.m}^{-3}$).

Corrections

- 1. La force est donnée par $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ or la quantité de mouvement d'un volume $\mathrm{d}V = Sv\mathrm{d}t$ s'exprime comme $\mathrm{d}\mathbf{p} = \rho\mathrm{d}V\mathbf{v} = \rho Sv\mathrm{d}t \times v\mathbf{e_x} = \rho Sv^2\mathbf{e_x}\mathrm{d}t$. D'où $\mathbf{F} = \rho Sv^2\mathbf{e_x}$.
- 2. Applications numériques : $F_{\rm eau}=10^5$ N, $F_{\rm air}=130$ N.

exercice 20 : effet des forces de Coriolis sur un écoulement, nombre de Rossby

Tout corps en mouvement dans un référentiel en rotation subit une force d'inertie dite de Coriolis (c'est elle qui s'illustre dans l'expérience célèbre du pendule de Foucault au Panthéon). L'importance des forces de Coriolis est caractérisée par le nombre de Rossby $R_0 = v/(L\omega)$ où v est la vitesse de la matière en mouvement, L sa taille caractéristique et ω la vitesse angulaire de rotation du référentiel en mouvement. Si $R_0 < 1$, les forces de Coriolis sont dominantes.

- 1. Calculer $\omega = 2\pi/T$
 - pour la Terre (on donne T = 24 heures)
 - pour le Soleil (on donne T = 26 jours).
- 2. Calculer R_0
 - pour une dépression ou un anticyclone dans l'atmosphère terrestre ($L=10^3$ km, v=50 km.h⁻¹ à convertir en m.s⁻¹)
 - pour une tache solaire ($L = 10^4$ km, v = 1 km.s⁻¹)

Corrections

- 1. $\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}, 2.8 \times 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$.
- 2. $R_0=0,2$ (ce sont les forces de Coriolis qui pilotent le mouvement des masses d'air autour d'un anticyclone ou d'une dépression).

 $R_0 = 36$.

exercice 21 : effet des forces de visqueuses sur un écoulement, nombre de Reynolds

Le nombre $R_e = Lv/\nu$ permet de savoir si l'advection $(R_e > 1)$ ou les forces visqueuses $(R_e < 1)$ dominent. En première approximation, l'écoulement est turbulent si $R_e \gg 1$ (car l'équation d'Euler est non linéaire) et laminaire (absence de tourbillons) si $R_e \ll 1$ (forces visqueuses dominantes). v désigne la vitesse du fluide et L sa dimension caractéristique, ν est la viscosité cinématique du milieu. On demande de compléter le tableau suivant :

Milieu	$\nu~(\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1})$	L (m)	v (m.s ⁻¹)	R_e
eau (tuyau)	10^{-6}	10^{-2}	1	
air (aile avion)	$1,5\times 10^{-5}$	1	150	
atmosphère solaire	1	10^{7}	10^{3}	
huile (tuyau)	10^{-3}	10^{-2}	1	
miel (cuillère)	10^{-2}	10^{-2}	0,01	
bitume (tuyau)	10^{5}	0,1	0,1	

<u>Réponses</u> (colonne de droite): $R_e = 10^4$, 10^7 , 10^{10} , 10, 10^{-2} , 10^{-7}

exercice 22 : effet des forces magnétiques sur un écoulement, nombre de Reynolds magnétique

Le nombre $R_m = \mu_0 L v \gamma$ permet de savoir si l'advection (transport du champ magnétique) $(R_m > 1)$ ou la diffusion magnétique $(R_m < 1)$ dominent dans un fluide de conductivité γ et de vitesse v. L est la dimension caractéristique du milieu.

Calculer R_m et dire si l'advection ou la diffusion domine :

- dans une tache solaire ($L=10^4$ km, v=1 km.s⁻¹, $\gamma=10^3$ S.m⁻¹)
- dans une nappe de courant (L=1 m, v=1 km.s⁻¹, $\gamma=10^2$ S.m⁻¹).

Corrections

Dans une tache solaire : $R_m = 10^7$, advection dominante. Dans une nappe de courant : $R_m = 0, 1$, diffusion dominante.

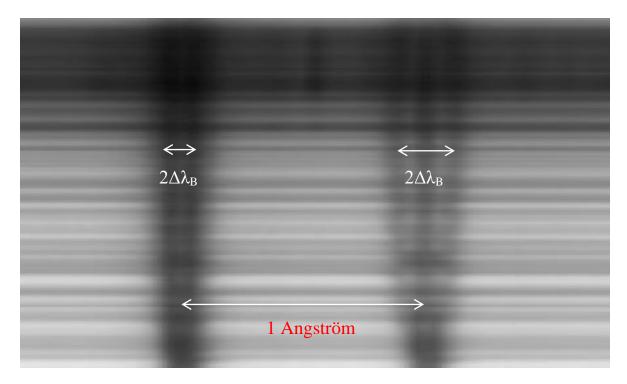
6 – Mesure expérimentale des champs magnétiques

exercice 23 : mesure du champ magnétique dans une tache solaire

Vous avez ci dessous un spectre (en abscisse : la longueur d'onde; en ordonnée: une coordonnée spatiale sur la surface solaire) de deux raies du Fer de longueur d'onde $\lambda = 6301.5$ Angström (à gauche) et 6302.5 Angström (à droite) dans la pénombre d'une tache solaire, de champ magnétique très fort. La distance entre les deux raies est de 0.1 nm. On distingue sur la tache deux composantes Zeeman (à polarisation circulaire gauche et droite) écartées de $\Delta\lambda = 2$ $\Delta\lambda_B$. On démontre que :

$$\Delta \lambda_B = 4.67 \ 10^{-13} \ \lambda^2 \ g^* \ B$$

formule de l'effet Zeeman dans laquelle λ et $\Delta\lambda_B$ sont exprimés en Angström (symbole Å) et le champ magnétique B en Gauss (1 G = 10^{-4} T). g^* est un facteur de mécanique quantique, qui varie selon les raies (facteur de Landé équivalent). Pour la raie à λ = 6301.5 Å, on a g^* = 1.67 et pour la seconde à λ = 6302.5 Å, on a g^* = 2.5.



Pour la raie de droite à $\lambda = 6302.5 \text{ Å}$:

- 1) mesurer $2\Delta\lambda_B$ dans l'ombre de la tache en Å sur l'image
- 2) en déduire B en Gauss

Pour la raie de gauche à $\lambda = 6301.5 \text{ Å}$:

- 3) mesurer $2\Delta\lambda_B$ dans l'ombre de la tache en Å sur l'image
- 4) en déduire B en Gauss

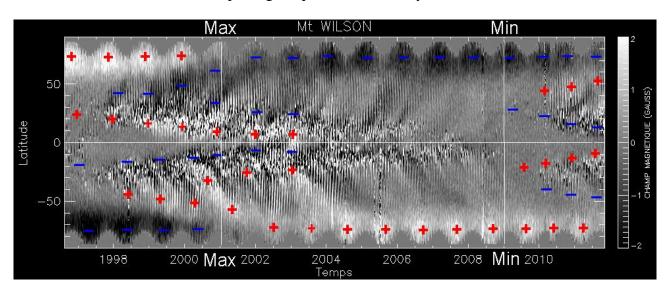
Note: on doit trouver à peu très le même résultat sur les deux raies

Réponses:

- 1) $2\Delta\lambda_B = 0.24 \text{ Å d'où } \Delta\lambda_B = 0.12 \text{ Å}$
- 2) B = 2590 Gauss
- 3) $2\Delta\lambda_B = 0.15 \text{ Å d'où } \Delta\lambda_B = 0.075 \text{ Å}$
- 4) B = 2420 Gauss

7 – Advection/diffusion du champ magnétique

Exercice 24 : advection des champs magnétiques au cours du cycle solaire



Les cartes synoptiques des champs magnétiques solaires (temps en abscisse, latitude en ordonnée) dévoilent un transport des champs magnétiques vers les pôles lors de la phase de montée des cycles (entre le minimum et le maximum solaire, soit 4 ans), comme le montre la figure de 1998 à 2001 (début du cycle 23) puis de 2009 à 2013 (début du cycle 24).

- 1) si R = 700000 km (rayon solaire), que vaut le quart de cercle équateur pôles en mètres ?
- 2) sachant que la circulation méridienne de l'équateur vers les pôles mesurée par les satellites héliosismologiques (SOHO, PICARD) vaut 10 m/s, quel temps faut-il au champ magnétique pour parcourir la distance équateur pôles, en années ?
- 3) ce temps advectif est-il compatible avec la durée du cycle solaire de 11 ans ?

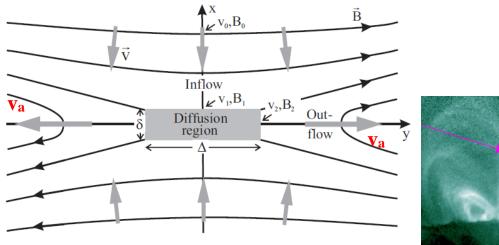
Réponses:

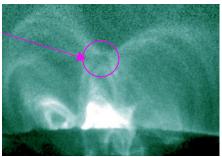
- 1) $R\pi/2 = 1.1 \ 10^9 \ m$
- 2) 3.5 années
- 3) oui

exercice 25: reconnexion magnétique

Le processus de reconnexion magnétique, qui permet une réorganisation des lignes de champ magnétique et une conversion d'énergie magnétique en énergie cinétique et en chaleur (effet Joule) est à l'oeuvre dans les éruptions solaires, la magnétosphère terrestre ou encore les disruptions des machines de laboratoire tels les tokamaks. La reconnexion se fait dans une "nappe de courant" (zone de champs magnétiques anti parallèles) au sein d'une région diffusive de nombre de Reynolds magnétique voisin de 1.

Ci dessous, le champ magnétique anti parallèle $B_0 = 0.01$ T est advecté à la vitesse $v_0 = 1$ km s⁻¹ vers la région diffusive de conductivité $\gamma = 1000$ S m⁻¹. On appelle δ l'épaisseur de la région diffusive et Δ sa longueur.





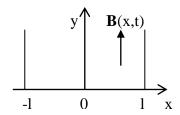
- 1) rappeler la formule donnant le temps convectif τ en fonction de δ et v_0 .
- 2) rappeler la formule donnant le temps diffusif τ_d en fonction de δ , μ_0 et γ .
- 3) en égalisant ces deux temps, exprimer l'épaisseur δ de la région diffusive en fonction de v_0 , μ_0 et γ .
- 4) calculer δ (en m) pour $v_0 = 1000$ m s⁻¹, $\gamma = 1000$ S m⁻¹ et $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7}$
- 5) la matière est éjectée de la zone diffusive à la vitesse $v_a=B_0$ / $(\rho\mu_0)^{1/2}$ dite vitesse d'Alfvèn; calculer v_a (en km s⁻¹) pour $B_0=0.01$ T, $\rho=10^{-11}$ kg m⁻³ (masse volumique) et $\mu_0=4$ π 10^{-7}
- 6) un simple bilan de masse dans la région diffusive (masse entrante = masse sortante) fournit la relation δ v_a = Δ v_0 ; calculer la longueur Δ de la région diffusive (en m).
- 7) la région diffusive est-elle observable sur le Soleil où tout détail inférieur à 70 km échappe aux télescopes ?
- 8) la densité de courant j dans la région diffusive est $B_0/(\delta \mu_0)$, que vaut-elle (en A m⁻²)?
- 9) que vaut la puissance volumique j^2/γ dissipée par effet Joule (en W m⁻³)?

Réponses:

- 1) $\tau = \delta / v_0$
- 2) $\tau_d = \delta^2 \mu_0 \gamma$
- 3) $\delta = 1 / (v_0 \mu_0 \gamma)$
- 4) $\delta = 0.7958 \text{ m}$
- 5) $v_a = 2821 \text{ km s}^{-1}$
- 6) $\Delta = 2257 \text{ m}$
- 7) non
- 8) $j = 9947 \text{ A m}^{-2}$
- 9) $P = 98946 \text{ W m}^{-3}$

exercice 26 : un modèle simple de nappe de courant diffusive

L'équation de diffusion du champ magnétique dans un milieu unidimensionnel de l'espace (axe Ox) tel que -1 < x < 1 et de conductivité y s'écrit: $\partial^2 B/\partial x^2 = \mu_0 \gamma \partial B/\partial t$ On va rechercher une solution à cette équation par séparation des variables, de sorte que



B(x,t) = X(x) T(t)

où X(x) est une fonction de x seulement, et T(t) une fonction

de t seulement. Le champ magnétique est supposé porté par l'axe Oy.

On a alors $T(t) d^2X/dx^2 = \mu_0 \gamma X(x) dT/dt$

- 1) On pose $d^2X/dx^2 = -k^2X(x)$ où k est une constante; exprimer la solution X(x) impaire (qui change de signe en x = 0 et donne des champs anti symétriques) de cette équation différentielle en fonction d'une constante multiplicative X₀, de k et de x.
- 2) Exprimer alors dT/dt en fonction de T(t) et des constantes k, μ_0 et γ .
- 3) Par intégration, formuler T(t) en fonction de t, des constantes k, μ_0 et γ et d'une constante multiplicative T₀
- 4) Donner alors l'expression du champ magnétique B(x,t) en fonction de x, t, des constantes k, μ_0 et γ , et de la constante multiplicative $B_0 = X_0 T_0$
- 5) en t = 0, on a $B(1,0) = B_0$ et $B(-1,0) = -B_0$; quelle relation (la plus simple possible) lie k à la demi largeur l de la nappe?
- 6) On sait que $\mathbf{j} = \mathbf{rot}(\mathbf{B})/\mu_0$ (densité de courant); elle est portée par l'axe Oz orthogonal au plan (xOy). Exprimer la valeur algébrique j en fonction de $\partial B/\partial x$ et de μ_0
- 7) Donner j(x,t) densité de courant en fonction de x, t et des constantes k, μ_0 , γ et B_0 Remarquer que j(x,t) est paire (symétrique) et maximum en x = 0: c'est la nappe de courant
- 8) exprimer la constante de temps τ_d caractéristique de la diffusion en fonction de l, μ_0 , γ qui confère une décroissance exponentielle (question 3) au courant et au champ magnétique.
- 9) application numérique: pour $\gamma = 1000 \text{ S m}^{-1}$ et $\tau_d = 1000 \text{ s}$ (temps caractéristique d'une éruption solaire), quelle est l'épaisseur l de la nappe (en m)?
- 10) sera t-elle observable, sachant qu'aucun télescope ne peut discerner de détails plus fins que 70 km?

Réponses:

```
1) X(x) = X_0 \sin(kx)
2) dT/dt = -k^2 T(t) / (\mu_0 \gamma)
3) T(t) = T_0 \exp[-k^2 t / (\mu_0 \gamma)]
4) B(x,t) = B_0 \sin(kx) \exp[-k^2 t / (\mu_0 \gamma)]
5) k = \pi / (21)
6) j = (1/\mu_0) \partial B/\partial x
7) j(x,t) = (B_0 k/\mu_0) \cos(kx) \exp[-k^2 t/(\mu_0 \gamma)]
8) \tau_d = 4 l^2 \mu_0 \gamma / \pi^2
9) 1 = 1400 \text{ m}
10) non
```

9 – Ondes

Rappel de cours utile pour les ondes :

considérons une onde plane progressive harmonique se propageant dans la direction du vecteur d'onde k; son écriture complexe, en termes de vitesse v (champ vectoriel), surpression P₁ ou surdensité ρ₁ (champs scalaires), s'écrit:

A ei(wt-k.r)

où A est une amplitude (vectorielle ou scalaire). Dans ce cas, l'écriture des opérateurs se simplifie:

```
\begin{array}{ll} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = -\mathrm{i} \; \mathbf{k}.\mathbf{v} & \operatorname{produit} \; \operatorname{scalaire} \; \operatorname{avec} \; (-\mathrm{i} \; \mathbf{k}) \\ \operatorname{rot}(\mathbf{v}) = -\mathrm{i} \; \mathbf{k} \; \Lambda \; \mathbf{v} & \operatorname{produit} \; \operatorname{vectoriel} \; \operatorname{avec} \; (-\mathrm{i} \; \mathbf{k}) \\ \partial \mathbf{v}/\partial t = \mathrm{i} \; \omega \; \mathbf{v} & \operatorname{produit} \; \operatorname{avec} \; (\mathrm{i} \; \omega) \\ \partial^2 \mathbf{v}/\partial t^2 = -\; \omega^2 \; \mathbf{v} & \operatorname{produit} \; \operatorname{avec} \; (-\; \omega^2) \\ \mathbf{grad} \; P_1 = -\mathrm{i} \; \mathbf{k} \; P_1 & \operatorname{produit} \; \operatorname{avec} \; (-\mathrm{i} \; \mathbf{k}) \\ \operatorname{et} \; (\mathbf{v}.\mathbf{grad}) \mathbf{v} \; \operatorname{se} \; \operatorname{n\'eglige} \; \operatorname{pour} \; \operatorname{les} \; \operatorname{petits} \; \operatorname{mouvements} \; \operatorname{car} \; \operatorname{du} \; \operatorname{second} \; \operatorname{ordre} \; \operatorname{en} \; \mathbf{v} \end{array}
```

exercice 27 : vitesses de propagation des ondes dans différents milieux

1) Pour les solides, liquides et gaz, la vitesse de propagation des ondes sonores longitudinales (ondes de pression) s'écrit:

$$v = (E/\rho)^{1/2}$$

où E est le module d'élasticité (module d'Young en Pa) et ρ la masse volumique (en kg m⁻³). Pour un gaz, E est relié à la pression, et la vitesse de propagation n'est pas la même selon le type de transformation au sein du gaz, isotherme (E = P) ou adiabatique (E = γ P, γ = 1.67 ou 1.4 selon que le gaz est mono ou di-atomique). Ici on s'intéressera uniquement au cas adiabatique. On donne le tableau suivant, à compléter (en colonne bleue !).

Matériau	E(Pa)	ρ (kg m ⁻³)	v (m s ⁻¹) - réponses à donner!
diamant	10^{12}	3500	16900
acier	$2\ 10^{11}$	7900	5030
béton	$3.5 \ 10^{10}$	2300	3900
verre	$7 10^{10}$	2500	5290
granite	$6\ 10^{10}$	2600	4800
croûte terrestre	1011	2800	5980
bois	10^{10}	700	3780
caoutchouc	10^{7}	950	100
eau	$2.2 \ 10^9$	1000	1480
air au sol	$1.4 \ 10^5$	1.3	330
surface solaire	10^{3}	10^{-5}	10000
couronne solaire	10^{-4}	10^{-14}	100000

2) pour une corde de masse linéïque μ (kg m⁻¹) et de section S (m²), tendue sous la tension T (N), on a E=T / S et $\rho=\mu$ / S, donc la relation ci dessus devient $v=(T/\mu)^{1/2}$. Quelle est la célérité des ondes (transversales en m s⁻¹) sur une corde de tension T=100 N et de masse linéïque $\mu=5$ grammes par mètre ? Si la corde, fixée à ses deux extrémités, mesure L=32 cm, quelle est la fréquence f=v / 2L (en Hz) du mode fondamental de vibration ?

Note: le mode fondamental correspond à une longueur L égale à une demi longueur d'onde $\lambda = v/f$; d'autres modes peuvent exister à des multiples de la fréquence fondamentale.

- 3) en eau profonde, la relation de dispersion de la houle est $\omega^2 = g \ k$ où ω est relié à la période T de la houle par $\omega = 2\pi/T$; k est relié à la longueur d'onde λ de la houle par $k = 2\pi/\lambda$. Que vaut la longueur d'onde d'une houle de période 10 s ? Sa vitesse de propagation $v = \omega/k = g/\omega$? On prendra $g = 9.8 \ m \ s^{-2}$ (accélération de la pesanteur).
- 4) en eau peu profonde, la relation de dispersion de la houle est $\omega = k (g h)^{1/2}$ où h est la profondeur. Que vaut la longueur d'onde d'une houle de période T=10 s dans h=10 m d'eau ? dans 1 m d'eau ? Et les vitesses de propagation correspondantes $v=(g h)^{1/2}$? On prendra g=9.8 m s⁻² (accélération de la pesanteur).

Réponses:

```
2) v = 141 \text{ m s}^{-1}
f = 220 \text{ Hz}
```

Note: il s'agit de la note de musique "la" du 2ème octave

- 3) $\lambda = 156 \text{ m}, \text{ v} = 15.6 \text{ m s}^{-1}$
- 4) pour h = 10 m, λ = 99 m, v = 9.9 m s⁻¹ pour h = 1 m, λ = 31 m, v = 3.1 m s⁻¹

Note: vitesse et longueur d'onde de la houle diminuent avec la profondeur, expliquant le déferlement des vagues sur la plage.

exercice 28 : vitesse du son, vitesse d'Alfvèn et plasma β

Dans un gaz parfait de masse molaire M et de température T, la vitesse du son est $C_s = \sqrt{\gamma RT/M}$ où R = 8,32 J.mole⁻¹.K⁻¹ est la constante des gaz parfaits et γ l'exposant adiabatique (5/3 pour

un gaz monoatomique, 7/5 pour un diatomique). Dans un milieu magnétisé, les ondes d'Alfvèn se propagent à la vitesse $v_a = B/\sqrt{\mu_0\rho}$ où B est le champ magnétique et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. Le nombre β du plasma indique si les forces de pression dominent $(\beta > 1)$ ou non $(\beta < 1)$ les forces magnétiques. β est lié à C_s et à v_a par la relation $\beta = 2/\gamma \times (C_s/v_a)^2$.

- 1. Calculer C_s (en km.s⁻¹)
 - dans une tache solaire ($M=10^{-3}$ kg, T=4000 K, $\gamma=5/3$)
 - dans la photosphère solaire ($M=10^{-3}$ kg, T=6000 K, $\gamma=5/3$)
 - dans la couronne solaire ($M=10^{-3}$ kg, $T=1,5\times10^6$ K, $\gamma=5/3$)
 - dans l'atmosphère terrestre (M=0,029 kg, T=300 K, $\gamma=7/5$).
- 2. Calculer v_a (en km.s⁻¹)
 - dans une tache solaire ($B = 0, 1 \text{ T}, \rho = 10^{-5} \text{ kg.m}^{-3}$)
 - dans la photosphère solaire ($B = 10^{-3}$ T, $\rho = 3 \times 10^{-5}$ kg.m⁻³)
 - dans une boucle magnétique coronale ($B = 10^{-3} \text{ T}$, $\rho = 10^{-12} \text{ kg.m}^{-3}$).
- 3. Calculer β et dire si les forces de pression ou magnétiques dominent :
 - dans une tache solaire
 - dans la photosphère solaire
 - dans une boucle magnétique coronale.

Corrections

- 1. $C_s = 7, 4; 9, 1; 144, 4; 0, 34 \text{ km.s}^{-1}$.
- 2. $v_a = 28, 2; 0, 16; 892 \text{ km.s}^{-1}.$
- 3. $\beta = 0.08$ (forces magnétiques dominent)
 - $\beta = 3870$ (forces de pression dominent)
 - $\beta = 0,03$ (forces magnétiques dominent).

exercice 29: onde sonore longitudinale

On considère une onde sonore longitudinale dans un fluide isentropique de pression et masse volumique uniformes au repos, notées P_0 et ρ_0 , se propageant selon Ox. Le vecteur d'onde \mathbf{k} et le vecteur vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ sont portés par Ox. On pose:

 $\begin{array}{l} \rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t) \ \ \text{où } \rho_1 \, \text{est la perturbation de masse volumique ou "surdensité" avec } |\rho_1| << \rho_0 \\ P(x,t) = P_0 + P_1(x,t) \ \ \text{où } P_1 \, \text{est la perturbation de pression ou "surpression" avec } |P_1| << P_0 \\ \text{Les quantités } \textbf{v}, \, \rho_1 \, \text{et } P_1 \, \text{varient en } e^{i(\omega t - kx)}. \end{array}$

1) on rappelle la loi de conservation de la masse:

```
\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0
```

 $\rightarrow \partial \rho_1/\partial t + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ au premier ordre (petits mouvements).

En utilisant les opérateurs pour les ondes, en déduire ρ_1 en fonction de ρ_0 , k, v, ω

```
2) on rappelle l'équation du mouvement (Euler): \rho \partial \mathbf{v}/\partial t + \rho(\mathbf{v.grad})\mathbf{v} = -\mathbf{grad} \ P \rightarrow \rho_0 \, \partial \mathbf{v}/\partial t = -\mathbf{grad} \ P_1 \quad \text{au premier ordre (petits mouvements)}. En utilisant les opérateurs pour les ondes, en déduire P_1 en fonction de \rho_0, k, v, \omega 3) on rappelle que pour une transformation isentropique: P/\rho^{\gamma} = \text{constante} \rightarrow P_1 \ / \ P_0 = \gamma \ \rho_1 \ / \ \rho_0
```

En utilisant les expressions de P_1 et de ρ_1 issues des deux premières questions, en déduire la relation de dispersion exprimant ω^2 en fonction de k^2 , P_0 , γ et ρ_0

- 4) exprimer la vitesse du son Cs donnée par la relation $\omega = \text{Cs k}$ en fonction de γ , P_0 et ρ_0
- 5) soit le vecteur de Poynting $\Pi = P_1 \mathbf{v}$

Exprimez la valeur algébrique de Π (puissance transportée par l'onde) en fonction de ρ_0 , v et Cs

- 6) exprimez la densité d'énergie cinétique Ec en fonction de ρ_0 et v
- 7) exprimez la densité d'énergie potentielle Ep=1/2 χ P_1^2 en fonction de ρ_0 et v sachant que χ est le coefficient de compressibilité isentropique défini par $\chi=(1/\rho)$ $(\partial\rho/\partial P)=(1/\rho_0)$ $(\rho_1/P_1)=1/(\gamma$ $P_0)$; remarquez qu'il y a équipartition entre énergie cinétique et potentielle
- 8) exprimez la densité d'énergie mécanique Em = Ec + Ep en fonction de ρ_0 et v
- 9) quelle relation y a t-il entre Π , Em et Cs ? Constatez que l'onde propage son énergie mécanique à la vitesse Cs.
- 10) quelle relation existe t-il entre la valeur moyenne $\langle \Pi \rangle$, ρ_0 et V amplitude de la vitesse?
- 11) application numérique pour la surface solaire.

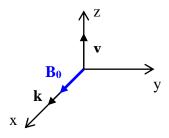
Calculez Cs avec $P_0 = 1000$ Pa, $\rho = 2 \cdot 10^{-5}$ kg m⁻³, $\gamma = 5/3$; en supposant V = 1 km/s, calculez ensuite $\langle \Pi \rangle$. Sachant que l'estimation de $\langle \Pi \rangle$ est plutôt de 2000 W/m², quel pourcentage de la surface solaire est couvert par les ondes acoustiques progressives ?

```
Réponses : 
1) \rho_1 = \rho_0 \ k \ v \ / \ \omega
2) P_1 = \rho_0 \ \omega \ v \ / \ k
3) \omega^2 = k^2 \ (\gamma \ P_0 \ / \ \rho_0)
4) Cs = (\gamma \ P_0 \ / \ \rho_0)^{1/2}
5) \Pi = \rho_0 \ \omega \ v^2 \ / \ k = \rho_0 \ v^2 \ Cs
6) Ec = 1/2 \ \rho_0 \ v^2
7) Ep = 1/2 \ \chi \ P_1^2 = 1/(2 \ \gamma \ P_0) \ (\rho_0 \ \omega \ v \ / \ k)^2 = (\rho_0 \ Cs \ v)^2 \ / \ (2 \ \gamma \ P_0) = 1/2 \ \rho_0 \ v^2
8) Em = \rho_0 \ v^2
9) \Pi = Em \ Cs
10) <\Pi>= 1/2 \ \rho_0 \ V^2 \ Cs
11) Cs = 9130 \ m/s \ et \ 1/2 \ \rho_0 \ V^2 \ Cs = 91300 \ W/m^2 \ donne \ un \ pour centage \ de 2.2 \ %
```

exercice 30 : onde magnétique d'Alfvèn transversale incompressible

On considère une onde dans un fluide incompressible de masse volumique ρ , se propageant selon Ox dans un champ magnétique uniforme et constant $\mathbf{B_0} = B_0 \, \mathbf{e_x}$. Le vecteur d'onde \mathbf{k} est porté par Ox. On pose: $\mathbf{B}(x,t) = \mathbf{B_0} + \mathbf{B_1}(x,t)$ où $\mathbf{B_1}$ est la perturbation de champ magnétique avec $|\mathbf{B_1}| << B_0$. Les quantités ondulatoires $\mathbf{v}(x,t)$ et $\mathbf{B_1}(x,t)$ varient en $e^{i(\omega t - kx)}$.

On supposera que la vitesse du fluide v est portée par Oz donc orthogonale à k et B₀ (qui sont tous deux portés par Ox). L'onde est donc transversale.



```
1) on rappelle la loi de conservation de la masse:
```

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

 \rightarrow div(v) = 0 pour un fluide incompressible.

En utilisant les opérateurs pour les ondes, \mathbf{v} porté par Oz satisfait-il div $(\mathbf{v}) = 0$?

2) dans un milieu de conductivité infinie, dans lequel la densité de courant doit rester finie, on a:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

ce qui permet d'exprimer l'équation de Maxwell Faraday sous la forme d'une équation de transport ou d'advection du champ magnétique:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B}/\partial \mathbf{t}$$

 \rightarrow rot(v \land B₀) = ∂ B₁/ ∂ t au premier ordre (petits mouvements).

En utilisant les opérateurs pour les ondes, exprimer le vecteur $\mathbf{B_1}$ en fonction du vecteur \mathbf{v} et des quantités algébriques k, $\mathbf{B_0}$ et ω . Remarquer alors que $\mathbf{B_1}$ est orthogonal à $\mathbf{B_0}$.

Aide: développer le double produit vectoriel par la relation $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A.C}) \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A.B}) \mathbf{C}$

3) on rappelle l'équation du mouvement (Euler) en présence d'une force de Laplace dans laquelle la densité de courant \mathbf{j} est donnée par l'équation de Maxwell Ampère en ARQS, $\mathbf{j} = \text{rot}(\mathbf{B})/\mu_0$: $\rho \partial \mathbf{v}/\partial t + \rho(\mathbf{v.grad})\mathbf{v} = \text{rot}(\mathbf{B}) \Lambda \mathbf{B}/\mu_0$

```
\rightarrow \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{B}_0/\mu_0 au premier ordre (petits mouvements).
```

En écrivant les opérateurs pour les ondes, en déduire le vecteur \mathbf{v} en fonction du vecteur \mathbf{B}_1 et des quantités algébriques ρ , k, B_0 , ω et μ_0 .

Aide: développer le double produit vectoriel par la relation $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A.C}) \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A.B}) \mathbf{C}$

- 4) en combinant les relations entre les vecteurs \mathbf{v} et $\mathbf{B_1}$ trouvées aux questions 2 et 3, en déduire la relation de dispersion reliant ω^2 à k^2 , B_0 , ρ et μ_0 .
- 5) exprimer la vitesse d'Alfvèn Va donnée par la relation $\omega = Va$ k en fonction de $B_0, \, \rho$ et μ_0
- 6) soit le vecteur de Poynting $\Pi = \mathbf{E} \Lambda \mathbf{B}_1/\mu_0$

Sachant que $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \Lambda \mathbf{B_0}$ au premier ordre, et que $\mathbf{B_1}$ s'exprime en fonction de \mathbf{v} par le résultat de la question 2, exprimez la valeur algébrique du vecteur de Poynting (porté par Ox) en fonction de \mathbf{k} , ω , $\mathbf{B_0}$, \mathbf{v} et μ_0

Aide: développer le double produit vectoriel par la relation $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A.C}) \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A.B}) \mathbf{C}$

- 7) Exprimez la valeur algébrique de Π (puissance transportée par l'onde) en fonction de ρ_0 , v et Va
- 8) exprimez la densité d'énergie cinétique Ec en fonction de ρ et v
- 9) exprimez la densité d'énergie magnétique $Em = B_1^2 / 2\mu_0$ en fonction de ρ et v à partir du résultat des questions 2 et 5; remarquez qu'il y a équipartition entre énergie cinétique et magnétique
- 10) exprimez la densité d'énergie totale Et = Ec + Em en fonction de ρ et v
- 11) quelle relation y a t-il entre Π , Et et Va ? Constatez que l'onde propage son énergie totale à la vitesse d'Alfvèn Va.

Réponses:

```
1) \mathbf{k}.\mathbf{v}=0 est satisfait car \mathbf{v} et \mathbf{k} sont orthogonaux 2) - \mathbf{k} \Lambda (\mathbf{v} \Lambda \mathbf{B}_0) = \omega \mathbf{B}_1 Développons le double produit vectoriel: - (\mathbf{k}.\mathbf{B}_0) \mathbf{v} + (\mathbf{k}.\mathbf{v}) \mathbf{B}_0 = \omega \mathbf{B}_1 Or \mathbf{k} et \mathbf{v} sont orthogonaux, d'où \mathbf{B}_1 = - (\mathbf{k}.\mathbf{B}_0) \mathbf{v}/\omega = - (\mathbf{k} \mathbf{B}_0/\omega) \mathbf{v} 3) \rho \omega \mathbf{v} = - (\mathbf{k} \Lambda \mathbf{B}_1) \Lambda \mathbf{B}_0/\mu_0 = \mathbf{B}_0 \Lambda (\mathbf{k} \Lambda \mathbf{B}_1) /\mu_0 Développons le double produit vectoriel: \rho \omega \mathbf{v} = (\mathbf{B}_0.\mathbf{B}_1) \mathbf{k}/\mu_0 - (\mathbf{B}_0.\mathbf{k}) \mathbf{B}_1/\mu_0 Or \mathbf{B}_0 et \mathbf{B}_1 sont orthogonaux, d'où \mathbf{v} = - (\mathbf{B}_0 \mathbf{k}) \mathbf{B}_1/ (\rho \omega \mu_0) 4) les questions 2 et 3 ont fourni les relations: \mathbf{v} = - (\mathbf{B}_0 \mathbf{k}) \mathbf{B}_1/ (\rho \omega \mu_0) et \mathbf{B}_1 = - (\mathbf{k} \mathbf{B}_0/\omega) \mathbf{v} On en déduit la relation de dispersion: (\mathbf{B}_0^2 \mathbf{k}^2) / (\rho \omega^2 \mu_0) = 1 soit \omega^2 = \mathbf{k}^2 \mathbf{B}_0^2/(\rho \mu_0) 5) \mathbf{V}a = \mathbf{B}_0/(\rho \mu_0) \mathbf{k}0
```

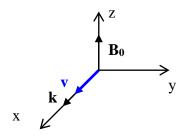
```
Développons le double produit vectoriel: \Pi = (\textbf{B}_1.\textbf{B}_0) \ \textbf{v} \ / \mu_0 \ \textbf{-} \ (\textbf{B}_1.\textbf{v}) \ \textbf{B}_0 \ ) \ / \mu_0 Or \textbf{B}_0 \ \text{et} \ \textbf{B}_1 \ \text{sont} \ \text{orthogonaux}, \ d'où \ \Pi = k \ B_0^2 \ v^2 / \ (\omega \ \mu_0) 7) \Pi = \rho \ v^2 \ Va 8) Ec = 1/2 \ \rho \ v^2 9) Em = B_1^2 \ / \ 2 \ \mu_0 = (k \ B_0/\omega)^2 \ v^2 \ / \ 2 \ \mu_0 = 1/2 \ \rho \ v^2 10) Et = \rho \ v^2 11) \Pi = Et \ Va
```

exercice 31 : onde magnéto-sonore

On considère une onde dans un fluide compressible de masse volumique au repos ρ_0 , se propageant selon Ox dans un champ magnétique uniforme et constant $\mathbf{B_0} = \mathbf{B_0} \ \mathbf{e_z}$. Le vecteur d'onde \mathbf{k} est porté par Ox. On pose:

$$\begin{split} \boldsymbol{B}(x,t) &= \boldsymbol{B_0} + \boldsymbol{B_1}(x,t) \ \text{ où } \boldsymbol{B_1} \text{ est la perturbation de champ magnétique avec } |B_1| << B_0. \\ \rho(x,t) &= \rho_0 + \rho_1(x,t) \ \text{ où } \rho_1 \text{ est la perturbation de masse volumique ou "surdensité" avec } |\rho_1| << \rho_0 \\ P(x,t) &= P_0 + P_1(x,t) \ \text{ où } P_1 \text{ est la perturbation de pression ou "surpression" avec } |P_1| << P_0 \\ \text{Les quantités ondulatoires } \boldsymbol{v}(x,t), \ \rho_1(x,t), \ P_1(x,t) \text{ et } \boldsymbol{B_1}(x,t) \ \text{ varient en } e^{i(\omega t - kx)}. \end{split}$$

On supposera que la vitesse du fluide \mathbf{v} est portée par Ox donc orthogonale à $\mathbf{B_0}$ \mathbf{k} et \mathbf{v} sont <u>colinéaires</u> selon Ox donc l'onde est longitudinale.



1) on rappelle la loi de conservation de la masse:

$$\partial \rho / \partial t + div(\rho \mathbf{v}) = 0$$

 $\rightarrow \partial \rho_1/\partial t + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ au premier ordre (petits mouvements).

En utilisant les opérateurs pour les ondes, exprimer ρ_1 en fonction de k, ρ_0 et v. 2) dans un milieu de conductivité infinie, dans lequel la densité de courant doit rester finie, on a:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \Lambda \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

ce qui permet d'exprimer l'équation de Maxwell Faraday sous la forme d'une équation de transport ou d'advection du champ magnétique:

$$rot(\mathbf{v} \ \Lambda \ \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B}/\partial t$$

 \rightarrow rot(v \land B₀) = ∂ B₁/ ∂ t au premier ordre (petits mouvements).

En utilisant les opérateurs pour les ondes, exprimer le vecteur B_1 en fonction du vecteur B_0 et des quantités algébriques k, v et ω . Remarquer alors que B_1 est colinéaire à B_0

Aide: développer le double produit vectoriel par la relation $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A.C}) \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A.B}) \mathbf{C}$ 3) on rappelle l'équation du mouvement (Euler) en présence d'un gradient de pression et d'une force

de Laplace dans laquelle la densité de courant \mathbf{j} est donnée par l'équation de Maxwell Ampère en ARQS, $\mathbf{j} = \text{rot}(\mathbf{B})/\mu_0$:

$$\rho \partial \mathbf{v} / \partial t + \rho(\mathbf{v.grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} P + rot(\mathbf{B}) \Lambda \mathbf{B} / \mu_0$$

 $\rightarrow \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad} P_1 + rot(\mathbf{B_1}) \Lambda \mathbf{B_0}/\mu_0$ au premier ordre (petits mouvements)

En écrivant les opérateurs pour les ondes, en déduire la valeur algébrique v de la vitesse en fonction des quantités algébriques ρ_0 , k, P_1 , B_0 , B_1 , ω et μ_0 .

Aide: développer le double produit vectoriel par la relation $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$

4) La question 2 exprime B_1 en fonction de v; la question 1 exprime ρ_1 en fonction de v; on peut alors exprimer P_1 en fonction de v connaissant ρ_1 en fonction de v en faisant l'hypothèse d'un fluide isentropique régi par la loi de Laplace $P/\rho^{\gamma}=$ constante ce qui donne P_1 / $P_0=\gamma$ ρ_1 / ρ_0 .

Remplacer, dans le résultat de la question 3, B_1 et P_1 par leurs expressions respectives en fonction de v. En déduire la relation de dispersion reliant ω^2 à k^2 , P_0 , B_0 , ρ_0 , γ et μ_0 .

5) exprimer la vitesse Vm donnée par la relation $\omega = Vm$ k en fonction de P_0 , P_0 , P_0 , P_0 , P_0 et P_0

```
sonores ou magnétiques ?
Réponses:
1) \rho_1 = \rho_0 \, k \, v / \omega
2) - \mathbf{k} \Lambda (\mathbf{v} \Lambda \mathbf{B}_0) = \omega \mathbf{B}_1
Développons le double produit vectoriel:
-(k.B_0) v + (k.v) B_0 = \omega B_1
Or k et B<sub>0</sub> sont orthogonaux, d'où B<sub>1</sub> = (kv) B<sub>0</sub> /\omega = (kv) B<sub>0</sub> e_z/\omega
3) \rho_0 \omega \mathbf{v} \mathbf{e}_{\mathbf{x}} = \mathbf{k} \mathbf{P}_1 \mathbf{e}_{\mathbf{x}} - (\mathbf{k} \mathbf{e}_{\mathbf{x}} \Lambda \mathbf{B}_1 \mathbf{e}_{\mathbf{z}}) \Lambda \mathbf{B}_0 \mathbf{e}_{\mathbf{z}} / \mu_0
                    = k P_1 e_x + (k B_1 e_y) \Lambda B_0 e_z / \mu_0
                    = k P_1 e_x + (k B_1 B_0 e_x) / \mu_0
\rho_0 \omega v = k P_1 + k B_1 B_0 / \mu_0
4) la question 2 donne: B_1 = (kv) B_0 / \omega
la question 1 fournit: \rho_1 = \rho_0 k v / \omega
l'hypothèse isentropique donne P_1 = P_0 \gamma \rho_1 / \rho_0, soit compte tenu de la question 1: P_1 = P_0 \gamma k v / \omega
Le résultat de question 3 s'exprime alors:
\rho_0 \omega v = k P_1 + k B_1 B_0 / \mu_0 = P_0 \gamma k^2 v / \omega + k^2 v B_0^2 / (\mu_0 \omega)
d'où la relation de dispersion:
\omega^2 = k^2 [P_0 \gamma / \rho_0 + B_0^2 / (\mu_0 \rho_0)]
5) Vm = [P_0 \gamma / \rho_0 + B_0^2 / (\mu_0 \rho_0)]^{1/2}
6) Vm = [Cs^2 + Va^2]^{1/2}
7) Vm = Cs [1 + 2/(\beta \gamma)]^{1/2}
8) sonores
9) magnétiques
```

exprimer la vitesse de propagation des ondes magnéto-sonores Vm en fonction de Cs et de Va.

9) dans un milieu magnétique (tache solaire), $\beta \ll 1$; Vm est-il voisin de la vitesse des ondes

8) dans un milieu non magnétique (soleil calme), $\beta >> 1$; Vm est-il voisin de la vitesse des ondes

Exercice 32 : modes d'ondes stationnaires d'une cavité sphérique

6) on donne la vitesse du son Cs = $[P_0 \gamma / \rho_0]^{1/2}$

sonores ou magnétiques ?

et la vitesse des ondes magnétiques $Va = B_0 / (\mu_0 \rho_0)^{1/2}$

7) soit $\beta = P_0 / [B_0^2/(2\mu_0)]$; exprimer Vm en fonction de Cs et β .

On considère un écoulement irrotationnel à symétrie sphérique dans lequel le vecteur vitesse ${\bf v}$ dérive du potentiel ϕ par la relation ${\bf v}={\bf grad}$ ϕ . Le potentiel ϕ est solution de l'équation de d'Alembert $\Delta \phi = (1/Cs^2) \, \partial^2 \phi / \partial t^2$ où Cs est la vitesse du son dans le milieu. La cavité est délimitée par deux rayons R_1 et $R_2 > R_1$. On donne en symétrie sphérique $\Delta \phi = 1/r \, \partial^2 (r\phi) / \partial r^2$. On recherche des solutions de la forme $\phi(r,t) = f(r) \, e^{i\omega t}$ où f(r) est une fonction de la variable radiale r seulement, telle que $R_1 < r < R_2$.

- 1) A partir de l'équation de d'Alembert, écrire l'équation vérifiée par le produit [r f(r)]
- 2) On pose $\underline{k} = \underline{\omega/Cs}$; vérifier que $[r \ f(r)] = A \ e^{-ikr} + B \ e^{ikr}$ est solution; donner ensuite $\varphi(r,t)$ sous la forme de la somme de deux ondes sphériques progressives harmoniques (complexes) ayant A et B pour amplitudes.
- 3) on impose les conditions aux limites suivantes: $\mathbf{v}(R_1,t) = \mathbf{v}(R_2,t) = \mathbf{0}$ pour tout t; sachant que l'onde est <u>longitudinale</u>, donc que la vitesse \mathbf{v} est <u>radiale</u>, en déduire deux conditions aux limites sur $\partial \phi / \partial r(R_1,t)$ et sur $\partial \phi / \partial r(R_2,t)$
- 4) exprimer $\partial \varphi(\mathbf{r}, t)/\partial \mathbf{r}$
- 5) déduire des conditions aux limites sur $\partial \phi/\partial r(R_1,t)$ et sur $\partial \phi/\partial r(R_2,t)$ deux équations liant A et B, du type A $g(kR_1) = B$ $h(kR_1)$ et A $g(kR_2) = B$ $h(kR_2)$ où g et h sont deux fonctions complexes que l'on explicitera

6) en effectuant le rapport des deux équations trouvées à la question 5, éliminer A et B et en déduire la relation suivante:

```
tan[k(R_2-R_1)] = k(R_2-R_1) / (1+k^2R_2R_1)
```

Cette relation définit des \underline{modes} stationnaires discrets (valeurs discrètes de k donc de ω)

Aide: $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ et $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$

- 7) étudions le cas particulier où $R_1 = 0$ et où $R_2 = R$; que devient la relation de la question 6 portant sur le produit (kR) ?
- 8) les premiers modes solution de l'équation trouvée à la question 7sont donnés par kR = 4.49, 7.72, 10.90, 14.06... Lorsque kR >> 1, donner la solution asymptotique en fonction du nombre π et d'un nombre entier n >> 1
- 9) quelles valeurs de kR obtient-on pour les quatre premiers modes en adoptant la solution asymptotique ?

Remarque: le soleil est une cavité résonante plus complexe comportant des centaines de modes de vibration découverts par les techniques de sondage héliosismologique qui analysent les oscillations de la surface de l'étoile.

```
Réponses:
```

```
1) \partial^2(\mathbf{rf})/\partial \mathbf{r}^2 + (\omega^2/\mathbf{C}\mathbf{s}^2)(\mathbf{rf}) = 0
```

2)
$$\varphi(r,t) = A e^{i(\omega t - kr)}/r + B e^{i(\omega t + kr)}/r$$

- 3) $\partial \varphi / \partial r(R_1, t) = \partial \varphi / \partial r(R_2, t) = 0$
- 4) $\partial \phi(r,t)/\partial r = -A e^{i(\omega t kr)}/r^2 B e^{i(\omega t + kr)}/r^2 ik A e^{i(\omega t kr)}/r + ik B e^{i(\omega t + kr)}/r$
- 5) $A e^{-ikR_1} (1 + ikR_1) = B e^{ikR_1} (ikR_1 1)$

A $e^{-ikR_2} (1 + ikR_2) = B e^{ikR_2} (ikR_2 - 1)$

6)
$$e^{-ik(R_1-R_2)}(1+ikR_1)/(1+ikR_2) = e^{ik(R_1-R_2)}(ikR_1-1)/(ikR_2-1)$$

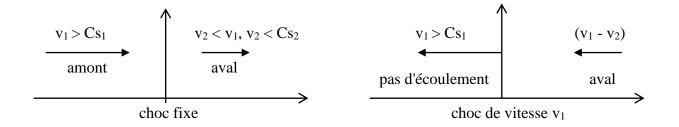
En développant cette expression et en regroupant les exponentielles, on fait apparaître une équation dans laquelle $\sin[k(R_2-R_1)]$ apparaît dans le terme de gauche et $\cos[k(R_2-R_1)]$ dans le terme de droite; en faisant le quotient, on en déduit la formule donnée $\tan[k(R_2-R_1)] = k(R_2-R_1) / (1+k^2R_2R_1)$

- 7) tan(kR) = kR
- 8) $kR = \pi/2 + n \pi \text{ pour } n >> 1$
- 9) kR = 1.5π , 2.5π , 3.5π , 4.5π soit 4.71, 7.85, 10.99, 14.14, on peut dire qu'à partir de n = 5, la valeur asymptotique convient.

10 – chocs hydrodynamiques, écoulements transsoniques

Exercice 33 : effet destructeur d'une onde de choc

Les relations de Rankine Hugoniot, établies pour une discontinuité fixe (choc) de pression, vitesse, masse volumique et température en présence d'un écoulement amont supersonique $(v_1 > Cs_1)$ et aval subsonique $(v_2 < Cs_2)$, où Cs_1 et Cs_2 sont les vitesses du son dans chaque zone, sont également valides pour un choc mobile. On passe du choc fixe au choc mobile de vitesse v_1 (sans écoulement amont) selon le schéma suivant :



$$v_1/v_2 = \rho_2/\rho_1 = (\gamma+1) M_1^2 / [2 + M_1^2 (\gamma-1)] > 1$$

$$P_2/P_1 = [2 \gamma M_1^2 - (\gamma-1)]/(\gamma+1) > 1$$

Le choc fixe réalise une compression $(P_2 > P_1)$ avec augmentation de température $(T_2 > T_1)$, donc $Cs_2 > Cs_1$ et diminution de la vitesse d'écoulement $(v_2 < v_1)$.

En amont du choc mobile de vitesse v₁, il n'y a pas d'écoulement; en aval la vitesse est (v₁ - v₂).

- 1) On donne pour l'air $Cs_1 = 330 \text{ m s}^{-1}$ et γ (exposant adiabatique) = 7/5 = 1.4. Supposons qu'une explosion s'accompagne d'un choc de vitesse $v_1 = 990 \text{ m s}^{-1}$. Que vaut le nombre de Mach $M_1 = v_1/Cs_1$ du choc ?
- 2) connaissant M_1 , utiliser les relations de Rankine Hugoniot ci dessus pour en déduire $\rho_2/\rho_1 = v_1/v_2$; en déduire v_2 puis la vitesse de l'écoulement aval $(v_1 v_2)$ en m s⁻¹

Note: le choc s'accompagne d'un souffle violent en aval

3) utiliser les relations de Rankine Hugoniot ci dessus pour en déduire la compression P_2/P_1 ; en supposant $P_1 = 1$ bar, que vaut P_2 en bars ?

Note: le choc s'accompagne d'une forte compression

- 4) que vaut la force $F = (P_2-P_1)$ exercée par le choc sur une surface de 1 m², exprimée en Nm²? ? Quel est son équivalent en tonnes par mètre carré, c'est à dire $(P_2-P_1)/g$, où g = 9.8 m s²? ?
- Note: la force énorme exercée par l'onde de choc explique son effet destructeur
- 5) connaissant ρ_2/ρ_1 et P_2/P_1 , déduire de la loi des gaz parfaits T_2/T_1 ; en supposant $T_1=300$ K, que vaut T_2 en K?

Note: le choc s'accompagne d'une forte augmentation de température

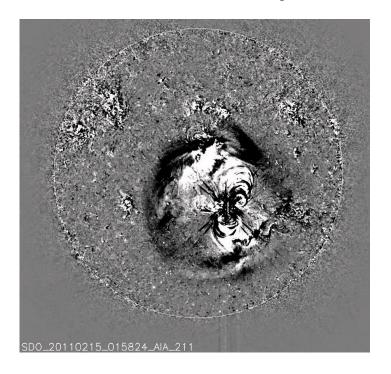
Réponses

- 1) $M_1 = 3$
- 2) $\rho_2/\rho_1 = v_1/v_2 = 3.86$

 $v_1 = 990 \text{ m s}^{-1} \text{ donne alors } v_2 = 257 \text{ m s}^{-1} \text{ puis } (v_1 - v_2) = 733 \text{ m s}^{-1}$

- 3) $P_2/P_1 = 10.33$ d'où $P_2 = 10.33$ bars
- 4) $F = 9.33 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} \text{ ou } 95 \text{ tonnes/m}^2$
- 5) $T_2/T_1 = 2.68$ d'où $T_2 = 800$ K

exercice 34 : onde de choc lors d'une éruption solaire



Observation d'une onde de choc déclenchée par une éruption solaire: satellite SDO/NASA, Instrument AIA, Raie du Fer ionisé à 21.1 nm, Température 10⁶ K

On considère un choc se propageant à la vitesse $v_1 = 450 \text{ km s}^{-1}$ dans la basse couronne solaire où la vitesse du son est $Cs_1 = 150 \text{ km s}^{-1}$. On donne les relations de Rankine Hugoniot:

$$v_{1}/v_{2} = \rho_{2}/\rho_{1} = \left(\gamma + 1\right)\,M_{1}{}^{2}\,/\left[2 + M_{1}{}^{2}\left(\gamma - 1\right)\right] \,> 1$$

$$P_2/P_1 = [2 \gamma M_1^2 - (\gamma-1)]/(\gamma+1) > 1$$

Dans la couronne solaire, γ (exposant adiabatique) = 5/3 = 1.667

- 1) que vaut le nombre de Mach $M_1 = v_1/Cs_1$ du choc ?
- 2) déduire des relations de Rankine Hugoniot ρ_2/ρ_1
- 3) déduire des relations de Rankine Hugoniot P₂/P₁

Note: la compression au passage du choc peut expliquer la déstabilisation des filaments solaires

4) connaissant ρ_2/ρ_1 et P_2/P_1 , déduire de la loi des gaz parfaits T_2/T_1

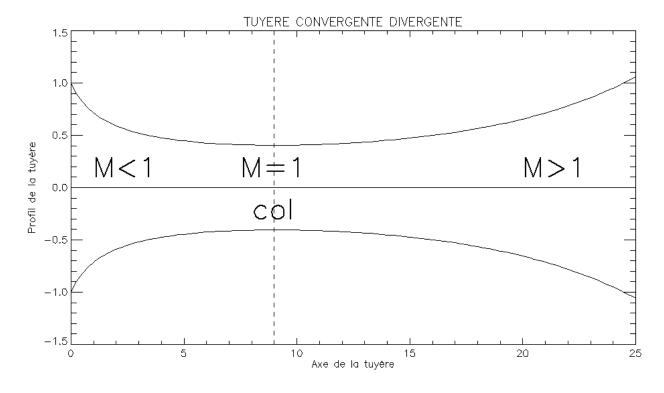
Note: l'élévation de température au passage du choc peut aussi expliquer la disparition thermique des filaments solaires, parfois observée, et leur réapparition après refroidissement

Réponses:

- 1) $M_1 = 3$
- 2) $\rho_2/\rho_1 = 3$
- 3) $P_2/P_1 = 11$
- 4) $T_2/T_1 = 3.67$

exercice 35 : écoulement transsonique dans une tuyère convergente divergente

Cet exercice a pour but de comprendre le fonctionnement de la tuyère convergente divergente, utilisée dans les moteurs fusée, pour éjecter des gaz à grande vitesse. Le principe a été établi par l'ingénieur suédois Laval à la fin du XIXème siècle. La tuyère est composée d'une section convergente subsonique (nombre de Mach M < 1), où la vitesse augmente jusqu'au col pour atteindre la vitesse du son (M = 1). Dans la partie divergente, la vitesse est supersonique (M > 1) et continue de croître progressivement jusqu'à la sortie. En général, la pression d'entrée est élevée et la vitesse d'entrée faible; par contre, en sortie, la pression est la pression atmosphérique (1 bar) et la vitesse des gaz est supersonique.



Soit x l'abscisse d'un point sur l'axe Ox de la tuyère. Appelons S(x) sa section (connue) de la tuyère, v(x) la vitesse de l'écoulement le long de l'axe, P(x) la pression et $\rho(x)$ la masse volumique. On se place en régime <u>stationnaire</u>.

- 1) quelle relation lie ρ , v et S (conservation de la masse)?
- 2) écrire l'équation d'Euler liant ρ, v, dv/dx et dP/dx (on néglige la pesanteur)
- 3) on suppose l'écoulement isentropique de sorte que P/ρ^{γ} = constante où γ est l'exposant adiabatique. Montrer que dP/dx est proportionnel à $d\rho/dx$ par un facteur (le carré de la vitesse locale du son) qu'on exprimera en fonction de γ , P et ρ .
- 4) en combinant les trois équations précédentes, on obtient une équation pour v(x) à S(x) connu: dv/dx ($M^2 1$) = (v/S) dS/dx

où M(x) = v(x)/Cs(x) est le nombre de Mach à l'abscisse x.

Pour que V(x) croisse dans la section convergente, quelle condition a t-on sur $M\ ?$

Pour que V(x) croisse dans la section divergente, quelle condition a t-on sur M?

Réponses:

```
1) \rho v S = constante = \rho_0 v<sub>0</sub> S<sub>0</sub>
```

- 2) $\rho v dv/dx = dP/dx$
- 3) Cs = $(\gamma P / \rho)^{1/2}$
- 4) section convergente, dS/dx < 0; dv/dx > 0 implique M < 1 section divergente, dS/dx > 0; dv/dx > 0 implique M > 1

exercice 36 : tuyère d'un moteur fusée

Le moteur fusée Vulcain de la fusée Ariane 5 brûle de l'oxygène O_2 et de l'hydrogène H_2 produisant de la vapeur H_2O à la température de 3570 K sous pression de 115 bars dans la chambre de combustion. Les gaz pénètrent dans une tuyère convergente divergente; l'écoulement dans la tuyère est transsonique (subsonique à l'entrée, supersonique en sortie, sonique au col) et s'accompagne d'une détente et d'une chute de température. A l'abscisse x le long de la tuyère, on désigne par V(x), C(x), P(x), P(x

conservation de la masse: ρ v S = constante loi des gaz parfaits: ρ v S = constante ρ v S = constante ρ v S = constante ρ v S = constante

conservation de l'énergie: $h + v^2/2 = constante$ avec $h = [\gamma/(\gamma-1)] R T / M$ (enthalpie massique)

Constantes utiles:

 $\gamma = 1.3$ (exposant adiabatique)

M = 0.018 kg (masse molaire de l'eau)

 $R = 8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1} \text{ (constante des gaz parfaits)}$

Entrée de la tuyère (indice e):

Pression: $P_e = 115$ bars Température: $T_e = 3570$ K

Sortie de la tuyère (indice s): vitesse: $V_s = 3400 \text{ m s}^{-1}$

diamètre: $D_s = 1.76 \text{ m}$

1) Température et vitesse au col (indice c pour le col)

On néglige la vitesse d'entrée dans la tuyère et on écrit la conservation de l'énergie entre l'entrée de la tuyère et le col:

$$[\gamma/(\gamma-1)] R T_e / M = [\gamma/(\gamma-1)] R T_c / M + V_c^2/2$$

T_c est la température au col.

On fixe la vitesse V_c au col à la vitesse du son: $V_c^2 = \gamma R T_c / M$

Exprimer le rapport T_c / T_e en fonction de γ ; T_e étant donné, que vaut numériquement T_c ? En déduire la valeur numérique de V_c en m s⁻¹.

2) Pression et masse volumique au col

La loi de Laplace (transformation isentropique) nous donne $P_c = P_e (T_c/T_e)^{\gamma/(\gamma-1)}$

Exprimer le rapport P_c / P_e en fonction de γ ; P_e étant donné, en déduire la valeur numérique de la pression P_c au col en bars, puis la masse volumique (kg m⁻³) par la loi des gaz parfaits, soit $\rho_c = P_c$ M / (R T_c).

3) Température de sortie T_s

On écrit la conservation de l'énergie entre la sortie de la tuyère et le col, ce qui donne Ts:

$$[\gamma/(\gamma-1)] R T_s / M + V_s^2/2 = [\gamma/(\gamma-1)] R T_c / M + V_c^2/2$$

Que vaut numériquement T_s ? La vitesse du son en sortie $C_s = (\gamma R T_s / M)^{1/2}$? Le nombre de Mach $M_s = V_s/C_s$?

4) Pression et masse volumique de sortie

La loi de Laplace (transformation isentropique) nous donne $P_s = P_c (T_s/T_c)^{\gamma/(\gamma-1)}$

En déduire la valeur numérique de la pression P_s de sortie en bars, puis la masse volumique (kg m⁻³) par la loi des gaz parfaits, soit $\rho_s = P_s M / (R T_s)$

- 5) Que vaut le débit massique $d = \rho_s V_s S_s = \rho_s V_s (\pi D_s^2/4)$ en kg s⁻¹?
- 6) Que vaut la poussée du moteur fusée $F = d\ V_s$ en N puis en tonnes (on prendra 9.81 m s⁻² pour l'accélération de la pesanteur) ?
- 7) En écrivant la conservation du débit massique entre la sortie et le col:

$$d = \rho_s V_s S_s = \rho_c V_c S_c$$

que vaut numériquement le rapport de section sortie/col S_s/S_c ?

Réponses:

```
1) T_c / T_e = 2/(\gamma + 1)

T_c = 3104 \text{ K}

V_c = 1365 \text{ m s}^{-1}

2) P_c / P_e = [2/(\gamma + 1)]^{\gamma/(\gamma - 1)}

P_c = 62.75 \text{ bars}

\rho_c = 4.37 \text{ kg m}^{-3}

3) T_s = 682 \text{ K}

C_s = 640 \text{ m s}^{-1}

M_s = 5.31

4) P_s = 0.088 \text{ bars}

\rho_s = 0.028 \text{ kg m}^{-3}

5) d = 232 \text{ kg s}^{-1}

6) F = 788300 \text{ N} ou bien 80.35 tonnes

7) S_s/S_c = 62.7
```

Figures en Annexe:

résultat purement indicatif d'un calcul numérique le long de la tuyère dans laquelle la vitesse de l'écoulement est proportionnelle à x: $V(x) = V_e + (V_s - V_e) x$, ce qui conditionne la dépendance de la section en fonction de x (le rayon de la tuyère est calculé à partir de cette donnée).

