Utilisation de la notation complexe pour les quantités harmoniques rencontrées en électromagnétisme

1 - Représentation complexe d'une quantité harmonique

Soit un signal harmonique $\boxed{x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)}$

A est l'amplitude du signal, φ est sa phase (entre 0 et 2π radians) et ω sa pulsation (en radians/s). La période de ce signal est $T = 2\pi/\omega$ et sa fréquence est $\nu = 1/T = \omega/2\pi$.

Il est beaucoup plus facile de résoudre des équations différentielles linéaires en utilisant la notation complexe suivante:

posons $\boxed{x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\,[A\, e^{i(\omega t+\varphi)}] = \mathrm{Re}\,(X\, e^{i\omega t})}$

où Re désigne la partie réelle de la quantité complexe; X désigne <u>l'amplitude complexe</u> du signal. Cette amplitude complexe X est reliée à l'amplitude réelle A et à la phase φ par:

$$\boxed{X = |X|\, e^{i\varphi} \quad \text{où} \quad |X| = A \quad \text{et} \quad \arg(X) = \varphi}$$

En physique, on confond souvent $x(t) = X\, e^{i\omega t} = |X|\, e^{i(\omega t+\varphi)}$ avec sa partie réelle qu'on écrit *par abus de langage de la même manière*, soit $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Il faut simplement se souvenir que seule la partie réelle de $x(t) = X\, e^{i\omega t}$ possède un sens physique.

2 - Valeur moyenne et valeur quadratique moyenne

a - *<u>valeur moyenne de $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ sur une période $T = 2\pi/\omega$</u>*

On la note $<x>$ et elle est nulle.

La notation complexe $x(t) = X\, e^{i\omega t}$ ne perturbe pas ce résultat, sa moyenne est bien nulle sur une période.

b - *<u>valeur moyenne de $x^2(t) = A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$ sur une période $T = 2\pi/\omega$</u>*

On la note $<x^2>$ et elle vaut $A^2/2$.

Cependant, $x^2(t) = A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$ n'est pas la partie réelle de la quantité complexe associée, c'est à dire $X^2\, e^{2i\omega t}$, en effet la valeur moyenne de cette quantité complexe est nulle, sa partie réelle étant un cosinus de l'angle double !
La formule qui donne la valeur quadratique moyenne de la représentation complexe $x(t) = X\, e^{i\omega t}$ est:

$$\boxed{<x^2> = 1/2\ \mathrm{Re}\,(x\, x^*) = 1/2\ \mathrm{Re}\,(X\, X^*) = 1/2\ |X|^2 = A^2/2}$$

où * désigne la quantité conjugée (changer i en -i).

c - *<u>valeur moyenne d'un produit de deux signaux harmoniques</u> $x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $y(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ sur une période $T = 2\pi/\omega$*

On la note $<xy>$ et elle vaut $1/2\ A_1A_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)$; cette quantité peut être négative.

En notation complexe,

$x(t) = X e^{i\omega t}$ et $y(t) = Y e^{i\omega t}$ où $X = |X| e^{i\varphi_1} = A_1 e^{i\varphi_1}$ et $Y = |Y| e^{i\varphi_2} = A_2 e^{i\varphi_2}$

$$\boxed{\langle xy \rangle = 1/2 \text{ Re } (x\, y^*) = 1/2 \text{ Re } (X\, Y^*) = 1/2\, |X|\, |Y| \text{ Re } (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}) = 1/2\, A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Remarque: Re $(x\, y^*)$ = Re $(x^*\, y)$.

3 - Dérivées temporelles

La notation complexe est très commode en ce qui concerne la dérivation; en effet si $x(t) = X e^{i\omega t}$:

$dx(t)/dt = i\omega X e^{i\omega t}$ et $d^2x(t)/dt^2 = - \omega^2 X e^{i\omega t}$

donc *la dérivation est une opération multiplication par iω*

$$\boxed{dx(t)/dt = i\omega\, x(t) \quad \text{et} \quad d^2x(t)/dt^2 = - \omega^2\, x(t)}$$

Conséquence: $\langle x\, dx/dt \rangle = 1/2$ Re $(x\, dx/dt^*)$ = $1/2$ Re $[x\, (-i\omega\, x^*)]$ = $\omega/2\, |x|^2$ Re $(-i)$ = $\underline{0}$

4 - Exemple des oscillations mécaniques forcées d'un oscillateur harmonique en présence de frottement

Un tel oscillateur sur l'axe Ox est régi par l'équation: $m\, d^2x/dt^2 + f\, dx/dt + k\, x = F(t)$
où :
m est la masse de l'oscillateur
k sa constante de raideur (force de rappel $- k\, x$)
f son coefficient de frottement (force de frottement $- f\, dx/dt$ opposée et proportionnelle à la vitesse)

F(t) est une force (par exemple électrique) à laquelle est soumis l'oscillateur. Nous allons étudier cette équation dans le cadre d'oscillations forcées par une force du type: $F(t) = F \cos(\omega t)$.

a - comment déterminer x(t) connaissant F(t) ?

On passe en notation complexe et on pose:

$F(t) = F e^{i\omega t}$ (la force étant la partie réelle de cette quantité);
$x(t) = X e^{i\omega t}$ où X est l'amplitude complexe du mouvement.

On utilise la propriété énoncée ci dessus pour les dérivées dx/dt et d^2x/dt^2, et on obtient:

$- m\, \omega^2\, x + i\, \omega\, f\, x + k\, x = F e^{i\omega t}$

ce qui donne l'équation pour l'amplitude complexe: $(- m\, \omega^2 + i\, \omega\, f + k)\, X = F$

On pose généralement $\boxed{\omega_0^2 = k/m}$ où ω_0 est la pulsation propre (de résonance) de l'oscillateur lorsqu'il n'est soumis à aucune force autre que la force de rappel $- k\, x$.

On en déduit l'amplitude complexe $X = (F/m) / [\, \omega_0^2 - \omega^2 + i\, \omega\, f/m\,]$

Comme $\boxed{|X| = (F/m) / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega f /m)^2]^{1/2}}$

on peut écrire: $X = |X| e^{i\varphi} = |X| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

où $\cos \varphi = (\omega_0^2 - \omega^2) / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega f /m)^2]^{1/2}$ et $\sin \varphi = (\omega f /m) / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega f /m)^2]^{1/2}$

$\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ identifient la phase φ de manière univoque.

Remarque: $\tan \varphi = (\omega f /m) / (\omega_0^2 - \omega^2)$ est plus simple mais identifie φ à π près.

La partie réelle de X donne la solution $\boxed{x(t) = (F/m) \cos(\omega t + \varphi) / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega f /m)^2]^{1/2}}$

b - *<u>valeurs moyennes de l'énergie cinétique, potentielle et de la puissance de frottement</u>*

Le calcul des <u>moyennes</u> sur une période de l'énergie cinétique, potentielle et de la puissance de la force de frottement sont très simplifiés en notation complexe $x(t) = X e^{i\omega t}$:

<u>l'énergie cinétique moyenne</u> est égale à:

$<1/2\, m\, v(t)^2> = 1/2\, m <(dx/dt)^2> =1/2\, m <(i\, \omega\, x)^2> = 1/4\, m\, \mathrm{Re}\, [(i\, \omega\, x)(i\, \omega\, x)^*] = 1/4\, m\, \omega^2 |X|^2$

<u>l'énergie potentielle moyenne</u> est égale à:

$<1/2\, k\, x(t)^2> = 1/2\, k <x^2> = 1/4\, k\, \mathrm{Re}\, (x\, x^*) = 1/4\, k\, |X|^2$

<u>la puissance moyenne développée par la force de frottement</u> est égale à:

$< - f\, v^2(t)> = - f <(dx/dt)^2> = - f/2\, \mathrm{Re}\, [(i\, \omega\, x)\, (i\, \omega\, x)^*]> = - f\, (\omega^2/2)\, \mathrm{Re}(X\, X^*)> = - f\, (\omega^2/2)\, |X|^2$

c - *<u>cas du voisinage de la pulsation de résonance</u> ($\omega \approx \omega_0$)*

$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)\, (\omega_0 + \omega) \approx - 2\, \omega_0\, (\omega - \omega_0)$

$X \approx - (F / 2\omega_0 m) / [\omega - \omega_0 - i\, f /(2m)]$

d'où $\boxed{|X| \approx (F / 2\omega_0 m) / [(\omega - \omega_0)^2 + f^2/4m^2]^{1/2}}$

La puissance moyenne P de la force de frottement est alors au voisinage de la résonance:

$P \approx - (f\, \omega_0^2/2)\, (F / 2\omega_0 m)^2 / [(\omega - \omega_0)^2 + f^2/(4m^2)] = - (f\, F^2 / 8m^2) / [(\omega - \omega_0)^2 + f^2/(4m^2)]$

Posons $\boxed{\gamma = f /m}$

$P \approx - (f\, F^2 / 8m^2) / [(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2] = - (F^2 / 2f)\, (\gamma/2)^2 / [(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2]$

$\boxed{P \approx - (F^2 / 2f)\, L(\omega) \text{ où } L(\omega) = (\gamma/2)^2 / [(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2] \text{ est une Lorentzienne}}$

$L(\omega)$ est maximale pour $\omega = \omega_0$ (pulsation de résonance). Loin de la résonance, $L(\omega) \rightarrow 0$.

$\boxed{\gamma = f /m \text{ est la largeur à mi hauteur de la Lorentzienne}}$