# mécanique du point matériel et problème à deux corps

(les vecteurs sont en caractères **gras**)

Sommaire

I - Cinématique
- I - 1 - Vitesse, quantité de mouvement, accélération
- I - 2 - Mouvement à accélération centrale

II - Changement de repère; formules de composition des vitesses et des accélérations; notion de force d'inertie

III - Dynamique
- III - 1- Lois de Newton
- III - 2- Travail, puissance, énergie cinétique, potentielle, mécanique

IV - Dynamique des mouvements de rotation
- IV - 1 - Moment d'une force et moment cinétique
- IV - 2 - Théorème du moment cinétique
- IV - 3 - Compléments: mécanique du solide en rotation

V - Le problème à deux corps
- V - 1 - Moment cinétique et quantité de mouvement
- V - 2 - Référentiel barycentrique: quantité de mouvement et moment cinétique
- V - 3 - Principe fondamental de la dynamique dans le référentiel barycentrique
- V - 4 - Mouvement fictif de la particule de masse réduite μ dans le repère barycentrique
- V - 5 - Energie mécanique et condition pour avoir une ellipse, une parabole ou une hyperbole
- V - 6 - Particularités du mouvement elliptique et lois de Kepler

## I - Cinématique

### I - 1 - Vitesse, quantité de mouvement, accélération

- vitesse **v** d'une particule de masse m située au point M dans un repère d'origine O

$\boxed{\mathbf{v} = d\mathbf{OM}/dt}$ (unité: m $s^{-1}$)

**v** a pour composantes (dx/dt, dy/dt, dz/dt) si les coordonnées de M sont (x, y, z) et dépendent du temps.

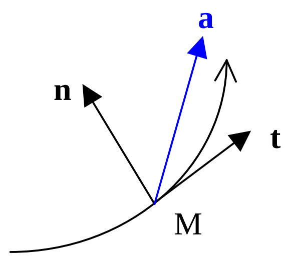
- quantité de mouvement ou impulsion $\boxed{\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}}$ (unité: kg m $s^{-1}$)

- accélération **a** d'une particule de masse m située au point M dans un repère d'origine O

$\boxed{\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{OM}/dt^2}$ (unité: m $s^{-2}$)

**a** a pour composantes ($d^2x/dt^2$, $d^2y/dt^2$, $d^2z/dt^2$) si les coordonnées de M sont (x, y, z) et dépendent du temps.

- Dans le repère de Frênet lié à la masse m (repère **t, n** où **t** est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et **n** est le vecteur unitaire normal en M), on a:



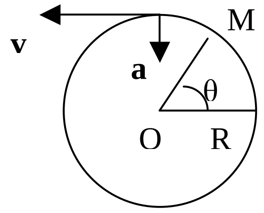

$\boxed{\mathbf{v} = v\,\mathbf{t} \quad (\mathbf{v} \text{ vitesse vectorielle, } v \text{ vitesse algébrique})}$

dans ce repère, si s est l'abscisse curviligne du point M, on a $ds/dt = v$ et $d\mathbf{t}/ds = \mathbf{n}/R$, d'où:

$$\boxed{\mathbf{a} = (dv/dt)\ \mathbf{t} + v^2/R\ \mathbf{n}}$$

<u>R est le rayon de courbure</u> local (varie le long de la trajectoire)

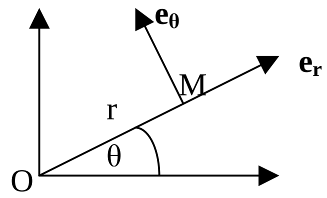
- cas du mouvement <u>circulaire</u> de rayon R fixé
  à la vitesse angulaire $\omega$ constante (unité: radian $s^{-1}$) :
  $\mathbf{v} = \omega R\ \mathbf{t}$
  $\mathbf{a} = \omega^2 R\ \mathbf{n}$




*le vecteur vitesse est $\mathbf{v} = \omega R\ \mathbf{t}$ est tangent au cercle*
*le vecteur accélération **a** est normal au cercle et <u>centripète</u> dirigé vers le centre O*

- Dans le plan en coordonnées <u>polaires</u> $(r, \theta)$ dans le repère $(\mathbf{e_r}, \mathbf{e_\theta})$:

$\mathbf{OM} = r\ \mathbf{e_r}$




La dérivée de $\mathbf{e_r}$ par rapport à $\theta$ est $\mathbf{e_\theta}$
de sorte que $d\mathbf{e_r}/dt = (d\mathbf{e_r}/d\theta)\ (d\theta/dt) = d\theta/dt\ \mathbf{e_\theta}$,
La dérivée de $\mathbf{e_\theta}$ par rapport à $\theta$ est $-\mathbf{e_r}$,
de sorte que $d\mathbf{e_\theta}/dt = (d\mathbf{e_\theta}/d\theta)\ (d\theta/dt) = -\ d\theta/dt\ \mathbf{e_r}$

$$\boxed{\mathbf{v} = d\mathbf{OM}/dt = dr/dt\ \mathbf{e_r} + r\ d\theta/dt\ \mathbf{e_\theta}}$$

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{OM}/dt^2 = [d^2r/dt^2 - r\ (d\theta/dt)^2]\ \mathbf{e_r} + [2\ dr/dt\ d\theta/dt + r\ d^2\theta/dt^2]\ \mathbf{e_\theta}$$

$$\boxed{\mathbf{a} = [d^2r/dt^2 - r\ (d\theta/dt)^2]\ \mathbf{e_r} + (1/r)\ d/dt(r^2\ d\theta/dt)\ \mathbf{e_\theta}}$$

## I - 2 - Mouvement à accélération centrale (colinéaire au rayon vecteur $r\ \mathbf{e_r}$)

Un tel mouvement n'a pas d'accélération sur $\mathbf{e_\theta}$ et est donc tel que $d/dt(r^2\ d\theta/dt) = 0$,

soit $\boxed{r^2\ d\theta/dt = C = \text{constante des aires}}$ (unité $m^2\ s^{-1}$)

L'aire dS balayée par le rayon vecteur en dt est $dS = [1/2\ r^2\ d\theta/dt]\ dt$

Alors $\boxed{dS/dt = C / 2 = \text{constante} = \text{vitesse aréolaire}}$ (unité $m^2\ s^{-1}$)

Dans ce cas, on peut exprimer la vitesse et l'accélération uniquement en fonction de r(t):

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{v} = dr/dt\ \mathbf{e_r} + C/r\ \mathbf{e_\theta} \\ \mathbf{a} = [d^2r/dt^2 - C^2/r^3]\ \mathbf{e_r} \end{array}}$$

Un tel mouvement se produit lorsque la particule est soumise à une force dirigée selon le rayon vecteur $\mathbf{OM} = r\ \mathbf{e_r}$

C'est le cas de:

- l'attraction gravitationnelle (force en $-\ K\ m\ m'/r^2\ \mathbf{e_r}$ où $K = 6.67\ 10^{-11}$ SI),
- de la force électrostatique (force en $q\ q' / 4\pi\varepsilon_0 r^2\ \mathbf{e_r}$ où $1/4\pi\varepsilon_0 = 9\ 10^9$ SI),

- ou encore de l'oscillateur harmonique soumis à une force de rappel de la forme - k r $\mathbf{e_r}$ (k = constante de raideur en N $m^{-1}$).

## II - Changement de repère; formules de composition des vitesses et des accélérations; notion de force d'inertie

Considérons deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, de même origine O, $\mathcal{R}'$ étant en rotation à la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ par rapport à $\mathcal{R}$, et $\mathbf{\Omega}$ étant le vecteur rotation. La direction du vecteur $\mathbf{\Omega}$ est celle de l'axe de rotation. La norme $\|\mathbf{\Omega}\|$ est la vitesse angulaire de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ en rd/s.

On montre que si A est un vecteur, $(d\mathbf{A}/dt)_{\mathcal{R}} = (d\mathbf{A}/dt)_{\mathcal{R}'} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{A}$

Cette relation permet de changer de repère. Ainsi, pour un point M:

$(d\mathbf{OM}/dt)_{\mathcal{R}} = (d\mathbf{OM}/dt)_{\mathcal{R}'} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$

Posons $\mathbf{v_a} = (d\mathbf{OM}/dt)_{\mathcal{R}}$ vitesse absolue dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{v_r} = (d\mathbf{OM}/dt)_{\mathcal{R}'}$ vitesse relative dans $\mathcal{R}'$

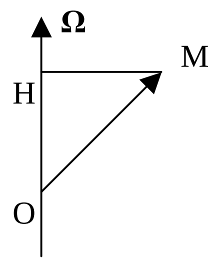
alors $\boxed{\mathbf{v_a = v_r + \Omega \wedge OM}}$ constitue la formule de composition des vitesses.

Dérivons par rapport au temps dans le référentiel $\mathcal{R}$:
$(d\mathbf{v_a}/dt)_{\mathcal{R}} = (d\mathbf{v_r}/dt)_{\mathcal{R}} + [d(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{OM})/dt]_{\mathcal{R}}$

Appliquons la formule de changement de repère $(d\mathbf{A}/dt)_{\mathcal{R}} = (d\mathbf{A}/dt)_{\mathcal{R}'} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{A}$

$(d\mathbf{v_a}/dt)_{\mathcal{R}} = (d\mathbf{v_r}/dt)_{\mathcal{R}'} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v_r} + d\mathbf{\Omega}/dt \wedge \mathbf{OM} + \mathbf{\Omega} \wedge [(d\mathbf{OM}/dt)_{\mathcal{R}'} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{OM}]$

$= (d\mathbf{v_r}/dt)_{\mathcal{R}'} + 2\,\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v_r} + d\mathbf{\Omega}/dt \wedge \mathbf{OM} + \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{OM})$




Or $\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{OM} = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{HM}$ où H est la projection de M sur l'axe de rotation ($\mathbf{OM = OH + HM}$); comme $\mathbf{OH}$ est colinéaire à $\mathbf{\Omega}$, celà implique $\mathbf{\Omega \wedge OH = 0}$.

$\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{HM}) = (\mathbf{\Omega.HM})\,\mathbf{\Omega} - \Omega^2\,\mathbf{HM}$ (formule du double produit vectoriel, dans laquelle $\mathbf{\Omega.HM} = 0$ en raison de leur orthogonalité).

Finalement, $(d^2\mathbf{v_a}/dt^2)_{\mathcal{R}} = (d\mathbf{v_r}/dt)_{\mathcal{R}'} + 2\,\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v_r} + d\mathbf{\Omega}/dt \wedge \mathbf{OM} - \Omega^2\,\mathbf{HM}$

Posons $\mathbf{a_a} = (d^2\mathbf{OM}/dt^2)_{\mathcal{R}}$ accélération absolue dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{a_r} = (d^2\mathbf{OM}/dt^2)_{\mathcal{R}'}$ accélération relative dans $\mathcal{R}'$, et supposons que $\mathbf{\Omega}$ soit un vecteur constant; on obtient la formule de composition des accélérations:

$$\boxed{\mathbf{a_a} = \mathbf{a_r} + 2\,\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v_r} - \Omega^2\,\mathbf{HM}}$$

| |
|---|
| $-\Omega^2\,\mathbf{HM}$ est l'accélération d'entraînement centripète<br>$2\,\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v_r}$ est l'accélération complémentaire de Coriolis (elle est nulle si $\mathbf{v_r} = \mathbf{0}$) |

Dans le repère $\mathcal{R}'$, une particule de masse m à la vitesse **v** subit alors deux forces d'inertie:
m $\Omega^2$ **HM** est la force d'inertie centrifuge
- 2 m $\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ est la force d'inertie de Coriolis (nulle si la vitesse **v** est nulle dans $\mathcal{R}'$)

Par exemple, la force d'inertie centrifuge est celle que l'on ressent sur un manège ou sur une route dans un virage: elle est dirigée vers l'extérieur. La force d'inertie de Coriolis oriente le mouvement des masses d'air dans le sens trigonométrique autour d'une dépression, ou dans le sens horaire autour d'un anticyclone, dans l'hémisphère Nord de la Terre (et vice versa dans l'hémisphère Sud). Elle est également à l'origine de mouvements de type anticyclonique dans l'atmosphère solaire au voisinage des taches, contribuant à expliquer le cycle solaire de 11 ans.

## III - Dynamique

### III - 1- Lois de Newton

Un référentiel dans lequel s'applique les lois de Newton est dit galiléen. Par exemple, le référentiel de Kepler, ayant pour centre le Soleil et trois axes othogonaux pointant vers trois étoiles de la Galaxie peut être considéré comme galiléen pour décrire le mouvement des planètes et des comètes.

- 1ère loi de Newton: dans un référentiel galiléen, un point matériel isolé (donc ne subissant aucune force) est en translation rectiligne uniforme.

- 2ème loi de Newton ou ou Principe Fondamental de la Dynamique (PFD):

$\boxed{d\mathbf{p}/dt = m\, d\mathbf{v}/dt = m\, \mathbf{a} = \sum \mathbf{F}}$ (somme des forces appliquées au point matériel, unité N ou Newton)

Si $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$, alors $\mathbf{v} = \textbf{constante}$ (et on retrouve la 1ère loi de Newton)

- 3ème loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction (ou des actions mutuelles) entre deux points matériels A et B:

$\mathbf{F}_{A\to B} + \mathbf{F}_{B\to A} = \mathbf{0}$
où $\mathbf{F}_{A\to B}$ est la force exercée par A sur B et $\mathbf{F}_{B\to A}$ est la force exercée par B sur A.

Remarque: Le PFD s'applique à un solide de masse m sous la forme $\boxed{m\, d\mathbf{v}_G/dt = m\, \mathbf{a}_G = \sum \mathbf{F}}$

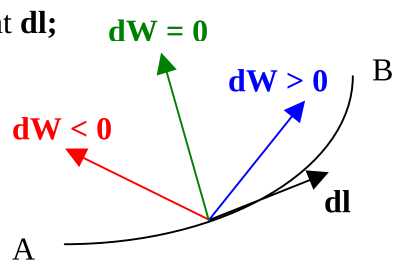
où $\mathbf{v}_G$ et $\mathbf{a}_G$ sont respectivement la vitesse et l'accélération du centre de masse ou de gravité.

### III - 2- Travail, puissance, énergie cinétique, potentielle, mécanique

- Travail d'une force

dW = **F.dl** constitue le travail élémentaire dans un déplacement **dl;**
lors d'un déplacement du point A vers le point B

$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}.\mathbf{dl}}$ (unité: J ou Joule)




c'est un produit scalaire, le travail est moteur si dW > 0
résistant si dW < 0

**dl** est tangent à la trajectoire: c'est le déplacement élémentaire de la masse m qui subit la force

*exemple: lors d'un déplacement horizontal, le poids m* ***g*** *ne travaille pas car il est orthogonal au déplacement; lors d'un déplacement vertical vers le haut d'une hauteur h, il vaut - m g h (il est résistant); pour un déplacement vers le bas, vaut m g h et est moteur.*

- <u>Puissance</u> instantanée d'une force

$\boxed{P = \mathbf{F.v}}$ (unité: W ou Watt)

(produit scalaire de la force avec la vitesse du point matériel, peut être > 0 ou < 0)

- <u>Energie cinétique</u>

$\boxed{Ec = 1/2\ m\ v^2}$ (unité: J ou Joule)

pour un solide de masse m, $Ec = 1/2\ m\ v_G^2$ où $v_G$ est la vitesse du centre de masse ou de gravité

- <u>théorème de l'énergie cinétique</u> de la position A vers B:

$\boxed{Ec_B - Ec_A = W_{AB}}$

démonstration simple à partir du PFD: m d**v**/dt = **F**
effectuons le produit scalaire avec le vecteur vitesse **v** = d**OM**/dt :
m **v.**d**v**/dt = **F.v**
donc dEc/dt **=** **F**.d**OM**/dt
dEc **=** **F**.d**OM**

et de A vers B: $\int_A^B dEc = \int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{OM}$ c'est à dire $Ec(B) - Ec(A) = W_{AB}$

- <u>Force dérivant d'une énergie potentielle, dite conservative</u>

Une force est conservative si elle dérive d'un gradient, soit si $\boxed{\mathbf{F} = -\ \mathbf{grad}\ Ep}$

Ep est la fonction énergie potentielle (unité: J ou Joule); elle dépend des variables de position.

La force est conservative parce que sa circulation sur un chemin <u>fermé</u> est nulle.

En effet, $\int \mathbf{F}.d\mathbf{l} = - \int \mathbf{grad}\ Ep\ .\ d\mathbf{l} = - \int dEp = 0$ car on revient au point de départ.

*exemples de forces et d'énergie potentielle associée telle que* ***F*** *= -* ***grad*** *Ep*

* *poids m* ***g****, Ep(z) = m g z (z = hauteur de la masse m)*

* *force de gravitation entre deux masses m et m' distantes de r*
*loi de Newton* $\mathbf{F} = - K\ m\ m'/r^2\ \mathbf{u}$, $Ep(r) = - Km\ m' / r$

* *force électrique entre deux charges q et q' distantes de r*
*loi de Coulomb* $\mathbf{F} = q\ q'/4\pi\varepsilon_0 r^2\ \mathbf{u}$, $Ep(r) = (1/4\pi\varepsilon_0)\ q\ q' / r$

* *force de rappel d'un ressort d'allongement x et de raideur k:*

*$F = - k\,x$, $Ep(x) = 1/2\ k\ x^2$*
*et plus généralement, si* $\mathbf{F} = - k\ \mathbf{OM}$, *$Ep(x) = 1/2\ k\ ||OM||^2$*

** charge q et de masse m dans un champ électrique dérivant du potentiel V:*
$\mathbf{E} = - \mathbf{grad}\ V$, *$Ep = q\ V$*

- <u>Principe de conservation de l'énergie mécanique</u>

lorsque la force dérive d'une énergie potentielle:
on a vu ci dessus dans la démonstration du théorème de l'énergie cinétique que:
$dEc = \mathbf{F}.d\mathbf{OM}$
Pour une force dérivant d'une énergie potentielle, $\mathbf{F}.d\mathbf{OM} = - \mathbf{grad}(Ep).\mathbf{dOM} = - dEp$
d'où $dEc + dEp = 0$

donc $\boxed{Ec + Ep = constante}$ (unité: J ou Joule)

Il n'y a pas conservation de l'énergie mécanique en cas de dissipation par frottement, parce que les forces de frottement ne dérivent pas d'un potentiel et ne peuvent donc être conservatives.

*quelques exemples:*

*masse m dans le champ de pesanteur:*
*$1/2\ m\ v^2 + m\ g\ z = constante$*

*charge électrique en mouvement dans un champ électrique dérivant du potentiel V:*
*$1/2\ m\ v^2 + q\ V = constante$*

*planète de masse m gravitant autour du Soleil de masse M à la distance r:*
*$1/2\ m\ v^2 - K\ m\ M/r = constante$*

*électron de masse m et de charge -e, autour du noyau de charge Ze (Z nombre de protons du noyau), à la distance r, et décrit par la mécanique classique:*
*$1/2\ m\ v^2 - Ze^2 / 4\pi\varepsilon_0 r = constante$*

*ressort de raideur k:*
*$1/2\ m\ v^2 + 1/2\ k\ x^2 = constante$*

- <u>position d'équilibre stable et instable; notion de particule liée/libre</u>

Lorsqu'une particule de masse m possède une énergie potentielle Ep(x,y,z), les positions d'équilibre correspondent aux extrema de la fonction Ep(x,y,z). Les positions des maxima sont des points d'équilibre instable, tandis que les minima sont des points d'équilibre stable.

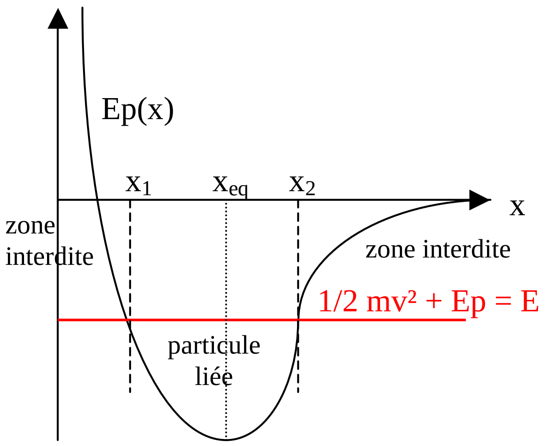
Soit une particule en mouvement sur l'axe Ox de vitesse $v = dx/dt$ et une fonction énergie potentielle Ep(x) du type de celle présentée sur la figure ci dessous. La position $x_{eq}$ est une position d'équilibre stable: c'est un minimum d'énergie potentielle.

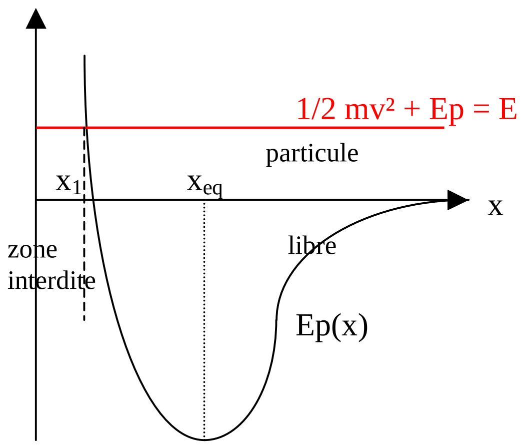
Mathématiquement, les positions d'équilibre sont données par $\boxed{dEp(x)/dx = 0}$

Les positions <u>stables</u> sont telles qu'au point d'équilibre, $\boxed{d^2Ep(x)/dx^2 > 0}$ (concavité vers le haut)

Les positions <u>instables</u> sont telles qu'au point d'équilibre, $\boxed{d^2Ep(x)/dx^2 > 0}$ (concavité vers le bas)

Si la particule possède l'énergie totale E constante, deux cas sont possibles:
- à gauche, la particule est <u>liée</u> car son espace possible est situé dans l'intervalle $[x_1, x_2]$
- à droite, la particule est <u>libre</u> car son espace possible est situé dans l'intervalle $[x_1, +\infty[$




Dans un mouvement à accélération centrale en coordonnées polaires $(r, \theta)$, on a vu que le vecteur vitesse est $\mathbf{v} = dr/dt\ \mathbf{e_r} + C/r\ \mathbf{e_\theta}$ où C est la constante des aires.

L'énergie cinétique s'exprime par $Ec = 1/2\ m\ [\ (dr/dt)^2 + C^2/r^2\ ]$

à laquelle on doit ajouter l'énergie potentielle Ep(r) des forces conservatives (on suppose aucune perte par frottement) pour avoir l'énergie totale E; le principe de conservation de l'énergie s'écrit:

$Ec = 1/2\ m\ (dr/dt)^2 + [\ 1/2\ m\ C^2/r^2 + Ep(r)\ ] = \text{constante}$

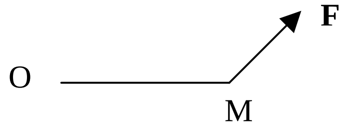
La stabilité du mouvement nécessite dans ce cas l'analyse de la fonction $\boxed{1/2\ m\ C^2/r^2 + Ep(r)}$ en fonction de r.

## IV - Dynamique des mouvements de rotation

Imaginons qu'une particule de masse m en M effectue un mouvement de rotation autour du point O sous l'action d'une force **F**.

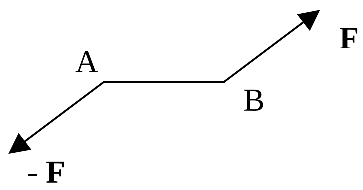
### IV - 1 - Moment d'une force et moment cinétique

- <u>Moment</u> de la force au point O: $\boxed{\mathcal{M}_O = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}}$
  (unité N m)




La force **F** est appliquée au point M.
En norme, le moment est maximal lorsque
**OM** et **F** sont orthogonaux (il est nul s'ils sont colinéaires).

- Notion de <u>couple</u> de forces
  Il s'agit de la somme des moments en O
  de deux forces **F** et **- F** égales
  en norme mais opposées en direction.



$\mathcal{M}_O$ = **OA** Λ (- **F**) + **OB** Λ **F** = **(AO + OB)** Λ **F** = **AB** Λ **F**

est indépendant de O (unité N m); on écrira alors que le couple de forces est $\boxed{\mathcal{C} = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}}$

*exemple: action d'un tournevis sur la tête d'une vis.*

- <u>Moment cinétique</u> de la particule de masse m située en M, en un point O: $\boxed{\mathbf{K_O} = \mathbf{OM} \wedge m\,\mathbf{v}}$

C'est le moment en O de la quantité de mouvement **p** = m **v** (unité: m² kg $s^{-1}$)

Le moment cinétique est une notion utile pour décrire les mouvements de rotation.

*exemple1: dans un mouvement circulaire uniforme de rayon R à la vitesse angulaire ω, on a en norme: $v = \omega R$, $p = m v = m \omega R$, $K_O = R p = m \omega R^2$*

*exemple2: le moment cinétique de l'électron de l'atome d'Hydrogène est quantifié par la relation de Bohr: $K_O = n (h/2\pi)$ où n est un nombre entier positif. La constante de Planck réduite (h/2π) apparaît donc comme un <u>quantum</u> de moment cinétique.*

- <u>Moment cinétique en coordonnées polaires (r, θ) ; cas des mouvements à accélération centrale</u>

On a vu que $\mathbf{v} = dr/dt\, \mathbf{e_r} + C/r\, \mathbf{e_\theta}$

Alors $\mathbf{K_O} = \mathbf{OM} \wedge m\, \mathbf{v} = r\, \mathbf{e_r} \wedge m\, (dr/dt\, \mathbf{e_r} + C/r\, \mathbf{e_\theta}) = m\, C\, \mathbf{e_z}$

| |
|---|
| Dans un mouvement à accélération centrale, la valeur du moment cinétique est lié à la constante des aires C par la loi $K_O$ = m C = constante. |

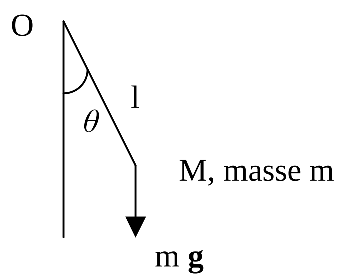
**IV - 2 - Théorème moment cinétique**

- <u>théorème du moment cinétique</u>: $\boxed{d\mathbf{K_O}/dt = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}}$

c'est l'analogue du PFD, pour les mouvements de rotation.

démonstration simple:
$\mathbf{K_O} = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p}$
dérivons par rapport au temps:
$d\mathbf{K_O}/dt = d\mathbf{OM}/dt \wedge \mathbf{p} + \mathbf{OM} \wedge d\mathbf{p}/dt$
or d**OM**/dt = **v** et **p** = m **v** sont colinéaires (donc leur produit vectiriel nul) et d'après le PFD, on a:
d**p**/dt = **F** d'où
$d\mathbf{K_O}/dt = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$

*exemple: mouvement du pendule de masse m, de longueur l dans le champ de pesanteur g, en négligeant le poids de la tige ou du fil.*
*Soit $\mathbf{e_z}$ le vecteur unitaire orthogonal au plan de la figure.*
*On a un mouvement de rotation circulaire à vitesse angulaire dθ/dt non constante.*




$\mathbf{K_O} = m\, l^2\, d\theta/dt\, \mathbf{e_z}$

$\rightarrow\ d\mathbf{K_O}/dt = m\, l^2\, d^2\theta/dt^2\, \mathbf{e_z}$

*le moment du poids par rapport à O est:* $\boldsymbol{M_O} = - m\, g\, l \sin\theta\, \boldsymbol{e_z}$

$\rightarrow\ m\, l^2\, d^2\theta/dt^2 = - m\, g\, l \sin\theta$

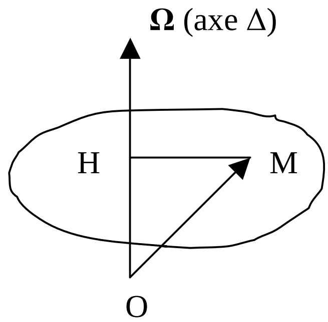
*et pour les petits mouvements* ($\theta << 1$ *implique* $\sin\theta \approx \theta$), $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\, \theta = 0$

*le mouvement est périodique de pulsation* $\omega = (g/l)^{1/2}$ *et de période* $T = 2\pi/\omega = 2\pi\, (l/g)^{1/2}$

**IV - 3 - Compléments: mécanique du solide en rotation**

- complément 1: moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Δ

$\mathbf{K}_\Delta = \iiint \mathbf{HM} \wedge \mathbf{v}(M)\, dm$




Le moment cinétique du solide par rapport à un axe de rotation Δ est la somme des moments cinétiques élémentaires, en affectant à chaque point M du solide une masse élémentaire dm = ρ dv occupant le volume élémentaire dv (ρ masse volumique locale).
La vitesse du point M est $\mathbf{v}(M) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{HM}$
où H est la projection de M sur l'axe de rotation Δ
et **Ω** le vecteur rotation autour de Δ.

$\mathbf{K}_\Delta = \iiint \mathbf{HM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{HM})\, dm$

$= \iiint [HM^2\, \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{HM}.\boldsymbol{\Omega})\, \mathbf{HM})]\, dm$

Or le produit scalaire **HM.Ω** est nul; il reste alors: $\mathbf{K}_\Delta = \iiint HM^2\, \boldsymbol{\Omega}\, dm = \boldsymbol{\Omega} \iiint HM^2\, dm$, soit

$\boxed{\mathbf{K}_\Delta = J\, \boldsymbol{\Omega} \quad \text{où } J = \iiint HM^2\, dm \text{ désigne le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe } \Delta}$

Le théorème du moment cinétique s'écrit dans ce cas $\boxed{d\mathbf{K}_\Delta/dt = \iiint \mathbf{HM} \wedge d\mathbf{F}(M)}$

où $d\mathbf{F}(M)$ est la force élémentaire appliquée à la masse dm = ρ dv au point M.

- complément 2: quelque exemples de moments d'inertie pour des solides homogènes de masse m en rotation autour d'un axe Δ

sphère pleine de rayon R: $J = 2/5\, m\, R^2$
disque ou cylindre plein de rayon R: $J = 1/2\, m\, R^2$
anneau fin de rayon R: $J = m\, R^2$
masse ponctuelle à la distance l: $J = m\, l^2$
tige pleine de longueur l par rapport à une extrémité: $J = 1/3\, m\, l^2$
tige pleine de longueur l par rapport à son milieu: $J = 1/12\, m\, l^2$

- complément 3: énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Δ

$Ec = \iiint 1/2\, v^2\, dm \quad$ où $\mathbf{v}(M) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{HM}$

$= \iiint 1/2\, (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{HM}).(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{HM})\, dm$

On a un produit mixte dans l'intégrale que l'on peut transformer:

$(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{HM}).(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{HM}) = \mathbf{\Omega}.\ [\mathbf{HM} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{HM})]$
$= \mathbf{\Omega}.\ [\ HM^2\ \mathbf{\Omega} - (\mathbf{\Omega}.\mathbf{HM})\ \mathbf{HM}]$
$= HM^2\ \Omega^2$ car $\mathbf{\Omega}$ et $\mathbf{HM}$ sont orthogonaux

donc $Ec = \iiint 1/2\ HM^2\ \Omega^2\ dm = 1/2\ \Omega^2\ \iiint 1/2\ HM^2\ dm$,

$\boxed{Ec = 1/2\ J\ \Omega^2}$ où J est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $\Delta$

Si le solide de masse m et de moment d'inertie J possède en plus un mouvement de translation,

$\boxed{Ec = 1/2\ m\ v_g^2 + 1/2\ J\ \Omega^2}$ où $v_g$ est la vitesse du centre de gravité du solide

Rappelons que le centre de gravité G d'un solide de masse m est défini par la relation vectorielle:

$\iiint \mathbf{GM}\ dm = \mathbf{0}$ ou encore $\boxed{\mathbf{OG} = (1/m) \iiint \mathbf{OM}\ dm}$ si O est l'origine d'un repère lié au solide.

Le point M décrit l'ensemble des points du solide; on lui affecte une masse élémentaire dm.

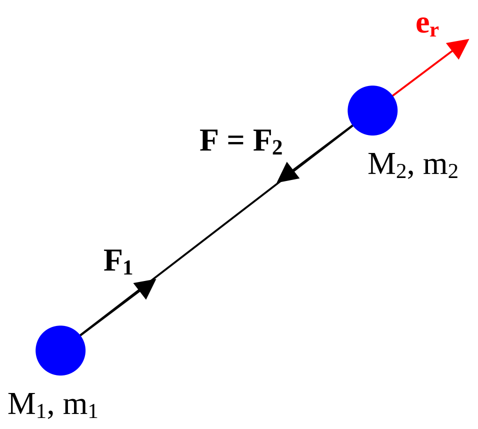
La vitesse du centre de gravité est définie par $\boxed{\mathbf{v_G} = (1/m) \iiint \mathbf{v}(M)\ dm}$

Un corps comme la Terre possède deux mouvements rotatoires: la révolution autour du Soleil d'énergie cinétique $Ec_1 = 1/2\ m\ v_g^2 = 1/2\ m\ l^2\ \omega^2$ où l est la distance Soleil Terre et $\omega$ la vitesse angulaire de révolution ($T = 2\pi/\omega = 365.25$ jours); la rotation diurne autour de l'axe de pôles avec $Ec_2 = 1/2\ J\ \Omega^2$ où $\Omega$ est la vitesse angulaire de rotation ($T = 2\pi/\Omega = 23$ h 56 min).

*Application numérique: la Terre se déplace dans l'espace à la vitesse $v_g = 30$ km/s et tourne sur elle même à la vitesse angulaire $\Omega = 3\ 10^{-4}$ rd/s; sa masse est $m = 6\ 10^{24}$ kg; pour une sphère homogène de masse m et de rayon de rayon R, $J = 2/5\ m\ R^2$; avec R = 6400 km, $J = 10^{38}$ kg m².*
*$Ec_1 = 1/2\ m\ v_g^2 = 2.510^{33}$ J*
*$Ec_2 = 1/2\ J\ \Omega^2 = 4.5\ 10^{30}$ J*
*L'énergie cinétique de révolution autour du Soleil est donc 1000 fois plus grande que celle due à la rotation autour de l'axe des pôles.*

## V - Le problème à deux corps

### V - 1 - Moment cinétique et quantité de mouvement




Comment décrire le mouvement de deux corps isolés et en interaction gravitationnelle mutuelle ? Tel est l'objet de cette section.
On considère deux masses ponctuelles $m_1$ et $m_2$ de positions $M_1$ et $M_2$ et de vitesses vectorielles respectives $\mathbf{V_1}$ et $\mathbf{V_2}$ dans un référentiel galiléen, dans lequel on pourra appliquer les lois de Newton. Il peut par exemple s'agir du référentiel de Kepler pour décrire le mouvement d'une planète ou d'une comète autour du Soleil (en faisant abstraction des autres corps du système solaire, le problème

étant à deux corps).
L'attraction gravitationnelle entre les masses $m_1$ et $m_2$ est donnée par la loi de Newton:

$$\boxed{\mathbf{F_2} = -K\, m_1 m_2 / r^2\, \mathbf{e_r} \quad \text{et} \quad \mathbf{F_1} = -\mathbf{F_2} \text{ ; on posera } \mathbf{F_2} = -\mathbf{F_1} = \mathbf{F}}$$

- <u>Moment cinétique total</u>

L'application du théorème du moment cinétique au système à deux corps donne, avec

$\boxed{\mathbf{K_O} = \mathbf{OM_1} \wedge m_1 \mathbf{V_1} + \mathbf{OM_2} \wedge m_2 \mathbf{V_2}}$ moment cinétique total où O est l'origine du référentiel:

$$d\mathbf{K_O}/dt = \mathbf{OM_1} \wedge \mathbf{F_1} + \mathbf{OM_2} \wedge \mathbf{F_2} = (\mathbf{OM_2} - \mathbf{OM_1}) \wedge \mathbf{F} = \mathbf{M_1M_2} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

car $\mathbf{M_1M_2}$ et $\mathbf{F}$ sont colinéaires.

*Le moment cinétique total $\mathbf{K_O}$ est donc une <u>constante vectorielle</u>, et le mouvement est plan ($\mathbf{K_O}$ est un vecteur constant orthogonal à ce plan).*

- <u>Quantité de mouvement totale</u>

L'application du principe fondamental de la dynamique au système à deux corps donne, avec

$\boxed{\mathbf{P} = m_1 \mathbf{V_1} + m_2 \mathbf{V_2}} = \mathbf{P_1} + \mathbf{P_2}$ quantité de mouvement totale:

$$d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \mathbf{0}$$

*La quantité de mouvement totale $\mathbf{P} = \mathbf{P_1} + \mathbf{P_2}$ est donc une <u>constante vectorielle</u>.*

**V - 2 - Référentiel barycentrique: quantité de mouvement et moment cinétique**

Introduisons maintenant le barycentre G du système des deux corps. G est défini par:

$$\mathbf{OG} = (m_1 \mathbf{OM_1} + m_2 \mathbf{OM_2}) / (m_1 + m_2)$$

La vitesse du barycentre (ou centre de gravité, ou centre de masse) est donnée par:

$$\mathbf{V_G} = (m_1 \mathbf{V_1} + m_2 \mathbf{V_2}) / (m_1 + m_2) = \mathbf{P} / (m_1 + m_2) = \underline{\textit{constante vectorielle}}$$

On en conclut que le référentiel barycentrique (ayant pour origine G) est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel supposé galiléen de centre O de départ; *le <u>référentiel barycentrique est donc galiléen</u>, et on peut étudier le mouvement des deux corps dans ce repère.*

<u>Vitesses et quantités de mouvement dans le référentiel barycentrique</u>

posons $\boxed{\mathbf{v_1} = \mathbf{V_1} - \mathbf{V_G} \text{ et } \mathbf{v_2} = \mathbf{V_2} - \mathbf{V_G}}$

les vitesses des corps de masse $m_1$ et $m_2$ <u>dans le référentiel barycentrique</u>.

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{V_1} - (m_1 \mathbf{V_1} + m_2 \mathbf{V_2}) / (m_1 + m_2) = [m_2 / (m_1 + m_2)]\, (\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2})$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{V_2} - (m_1 \mathbf{V_1} + m_2 \mathbf{V_2}) / (m_1 + m_2) = [m_1 / (m_1 + m_2)]\, (\mathbf{V_2} - \mathbf{V_1})$$

Posons $\mathbf{v} = \mathbf{V_2} - \mathbf{V_1}$ vitesse relative de $M_2$ par rapport à $M_1$.

$$\boxed{\mathbf{v_1} = - [m_2 / (m_1 + m_2)]\, \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{v_2} = [m_1 / (m_1 + m_2)]\, \mathbf{v}}$$

Dans le repère barycentrique, les quantités de mouvement s'écrivent:

$\mathbf{p_1} = m_1 \mathbf{v_1} = - [m_1 m_2 / (m_1 + m_2)]\, \mathbf{v}$ et $\mathbf{p_2} = m_2 \mathbf{v_2} = [m_1 m_2 / (m_1 + m_2)]\, \mathbf{v}$

Appelons la quantité $\boxed{\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)}$ <u>masse réduite</u> du système à deux corps; alors:

$$\boxed{\mathbf{p_1} = m_1 \mathbf{v_1} = - \mu \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{p_2} = m_2 \mathbf{v_2} = \mu \mathbf{v} \quad \text{avec} \quad \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} = \mathbf{0}}$$

*La quantité de mouvement totale est <u>nulle</u> dans le repère barycentrique.*

- <u>Moment cinétique dans le référentiel barycentrique</u>

$\mathbf{K_G} = \mathbf{GM_1} \wedge m_1 \mathbf{v_1} + \mathbf{GM_2} \wedge m_2 \mathbf{v_2} = \mathbf{GM_1} \wedge (- \mu \mathbf{v}) + \mathbf{GM_2} \wedge \mu \mathbf{v} = \mathbf{M_1M_2} \wedge \mu \mathbf{v}$

Soit M le point défini par $\mathbf{GM} = \mathbf{M_1M_2}$

alors $\boxed{\mathbf{K_G} = \mathbf{GM} \wedge \mu \mathbf{v}}$

est le moment cinétique d'une particule fictive de masse $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ située au point fictif M tel que $\mathbf{GM} = \mathbf{M_1M_2} = r\, \mathbf{e_r}$ et soumise à la force gravitationnelle $\mathbf{F} = - K m_1 m_2 / r^2\, \mathbf{e_r}$

*Ce moment cinétique est <u>constant</u>*, car d'après le théorème du moment cinétique,

$d\mathbf{K_G}/dt = \mathbf{GM_1} \wedge (- \mathbf{F}) + \mathbf{GM_2} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{M_1M_2} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$ car $\mathbf{M_1M_2}$ et $\mathbf{F}$ sont colinéaires.

$\boxed{\text{La vitesse du point M fictif est } \mathbf{v} = \mathbf{V_2} - \mathbf{V_1}}$ puisque

$d\mathbf{GM}/dt = d\mathbf{M_1M_2}/dt = d(\mathbf{OM_2} - \mathbf{OM_1})/dt = d\mathbf{OM_2}/dt - d\mathbf{OM_1}/dt = \mathbf{V_2} - \mathbf{V_1}$

### V - 3 - Principe fondamental de la dynamique dans le référentiel barycentrique

Appliquons le PFD à la masse $m_2$ dans le référentiel barycentrique

$m_2\, d\mathbf{v_2}/dt = \mathbf{F}$

or $m_2 \mathbf{v_2} = \mu \mathbf{v}$ d'où l'on déduit $\boxed{\mu\, d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F} = - K m_1 m_2 / r^2\, \mathbf{e_r}}$

Ainsi, le PFD permet de déterminer le mouvement de la particule fictive M de masse $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ dans le référentiel barycentrique de centre G, avec r = GM.

Une fois connu ce mouvement fictif, il sera aisé d'en déduire le mouvement réel des masses $m_1$ et $m_2$ aux points respectifs $M_1$ et $M_2$ par la relation barycentrique $m_1 \mathbf{GM_1} + m_2 \mathbf{GM_2} = \mathbf{0}$.

En effet, $m_1 \mathbf{GM_1} + m_2 (\mathbf{GM_1} + \mathbf{M_1M_2}) = \mathbf{0}$ et on a posé $\mathbf{GM} = \mathbf{M_1M_2}$. Il vient les relations:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \mathbf{GM_1} = - m_2 \mathbf{GM} / (m_1 + m_2) & \text{et} & \mathbf{GM_2} = m_1 \mathbf{GM} / (m_1 + m_2) \\ \mathbf{v_1} = - m_2 \mathbf{v} / (m_1 + m_2) & \text{et} & \mathbf{v_2} = m_1 \mathbf{v} / (m_1 + m_2) \end{array}}$$

On remarque que $\boxed{\mathbf{GM_1} = -(m_2/m_1)\ \mathbf{GM_2} \text{ et } \mathbf{v_1} = -(m_2/m_1)\ \mathbf{v_2}}$

*Ainsi, les positions et les vitesses sont <u>dans le rapport des masses</u>.*

Que se passe t-il si <u>$m_1 >> m_2$</u> ? Dans ce cas, $\mu \approx m_2$, $\mathbf{GM_1} \approx \mathbf{0}$ et $\mathbf{GM_2} \approx \mathbf{GM}$

C'est presque le cas dans le système solaire si $M_1$ représente le Soleil de masse $m_1$.

**V - 4 - Mouvement fictif de la particule M de masse réduite μ dans le repère barycentrique**

Posons $\mathbf{GM} = r\ \mathbf{e_r}$ et utilisons les coordonnées polaires $(r, \theta)$ dans le plan du mouvement.

Le mouvement étant à accélération centrale, on a vu que:

$\mathbf{v} = dr/dt\ \mathbf{e_r} + C/r\ \mathbf{e_\theta}$ , $\mathbf{a} = [d^2r/dt^2 - C^2/r^3]\ \mathbf{e_r}$ où C est la constante des aires.

Le PFD s'écrit alors $\mu\ [d^2r/dt^2 - C^2/r^3] = - K\ m_1\ m_2 / r^2$

soit encore $\boxed{d^2r/dt^2 - C^2/r^3 = - K\ (m_1 + m_2) / r^2}$

Pour résoudre cette équation, on fait le changement de variable suivant: $\boxed{u = 1/r}$
et sachant que:
$d\theta/dt = C\ u^2$ (loi des aires), on transforme l'équation en $r(t)$ contre une équation en $u(\theta)$.

$dr/dt = d(1/u)/d\theta\ \ d\theta/dt = - (1/u^2)\ du/d\theta\ C\ u^2 = - C\ du/d\theta$

$d^2r/dt^2 = d(- C\ du/d\theta)/dt = - C\ d^2u/d\theta^2\ d\theta/dt = - C^2\ u^2\ d^2u/d\theta^2$

Ainsi, $\boxed{a = - C^2\ u^2\ (d^2u/d\theta^2 + u) \text{ se nomme formule de Binet pour l'accélération}}$

et le PDF s'écrit: $- C^2\ u^2\ (d^2u/d\theta^2 + u) = - K\ (m_1 + m_2)\ u^2$

et finalement, $\boxed{d^2u/d\theta^2 + u = K\ (m_1 + m_2) / C^2}$

dont la solution est de la forme $u = K\ (m_1 + m_2) / C^2 + A \cos\theta = 1/r$ (avec A constante), d'où

$\boxed{r(\theta) = [C^2 / K\ (m_1 + m_2)] / (1 + e \cos\theta) = p / (1 + e \cos\theta)}$ où $\boxed{p = C^2 / [K\ (m_1 + m_2)]}$ (en km)

qui constitue l'équation d'une <u>conique</u> dont la nature dépend de la valeur de <u>l'excentricité e</u>.

*$e > 1$: hyperbole d'asymptotes $\cos\theta = -1/e$ et de foyer G (la particule part à l'infini)*
*$e = 1$: parabole de foyer G (la particule part à l'infini)*
*$e < 1$: ellipse de foyer G*
*$e = 0$: cercle de centre G*

Le <u>périgée</u> de la conique est obtenu pour $\theta = 0$ et vaut $r_p = p / (1 + e)$
L'<u>apogée</u> n'existe que pour une <u>ellipse</u>, dans ce cas, $\theta = \pi$ et vaut $r_a = p / (1 - e)$

**V - 5 - Energie mécanique et condition pour avoir une ellipse, une parabole ou une hyperbole**

L'énergie mécanique du mouvement est conservée et donnée par $E = Ec + Ep$, soit

$E = 1/2\ \mu\ v^2 - K\ m_1\ m_2 / r$

où $v^2 = (dr/dt)^2 + (r\ d\theta/dt)^2 = [(dr/d\theta)^2 + r^2]\ (d\theta/dt)^2 = [(dr/d\theta)^2 + r^2]\ C^2/r^4$

Or $dr/d\theta = p\ e \sin\theta / (1+ e \cos\theta)^2 = r^2\ e \sin\theta / p$

donc $v^2 = C^2\ e^2 \sin^2\theta / p^2 + C^2\ (1 + e \cos\theta)^2 / p^2 = (C^2/p^2)\ (e^2 + 1 + 2\ e \cos\theta)$

$E = 1/2\ \mu\ (C^2/p^2)\ (e^2 + 1 + 2\ e \cos\theta) - (1 + e \cos\theta)\ K\ m_1\ m_2 / p$

Remarquant que $\boxed{C^2 = K\ p\ (m_1 + m_2)}$ , on a $\mu\ C^2 = K\ p\ m_1\ m_2$

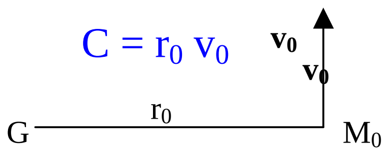
$E = 1/2\ K\ m_1\ m_2\ (e^2 + 1 + 2\ e \cos\theta) / p - (1 + e \cos\theta)\ K\ m_1\ m_2 / p$

$\boxed{E = 1/2\ K\ m_1\ m_2\ (e^2 - 1) / p}$ = constante, qui amène à la conclusion suivante:

*$e > 1 \rightarrow E > 0$; trajectoire hyperbolique*
*$e = 1 \rightarrow E = 0$; trajectoire parabolique*
*$e < 1 \rightarrow E < 0$; trajectoire elliptique*

- Energie en fonction de la position et de la vitesse initiale

$C = r_0\ v_0$




On suppose qu'en $t = 0$, $r = r_0$ et $v = v_0$, le vecteur vitesse $\mathbf{v_0}$ étant orthogonal au rayon vecteur $\mathbf{GM_0}$.

Alors $E = 1/2\ \mu\ v_0^2 - K\ m_1\ m_2 / r_0 = 1/2\ K\ m_1\ m_2\ (e^2 - 1) / p$

Introduisons la vitesse de libération $v_L$ obtenue lorsque $e = 1$, $E = 0$ (trajectoire parabolique):

$1/2\ \mu\ v_L^2 = K\ m_1\ m_2 / r_0$ soit $\boxed{v_L = [2\ K\ (m_1 + m_2) / r_0]^{1/2}}$

$E = 1/2\ \mu\ (v_0^2 - v_L^2) = 1/4\ \mu\ v_L^2\ (e^2 - 1)\ r_0/p$

d'où $\boxed{v_0 = v_L\ [\ 1 + (e^2 - 1)\ r_0/2p\ ]^{1/2}}$

*Cas de l'hyperbole ou de la parabole ($e \geq 1$)*
$r_0 = p / (1 + e)$ est le périgée de la trajectoire, alors $v_0 = v_L\ [\ (1 + e)/2\ ]^{1/2} \geq v_L$

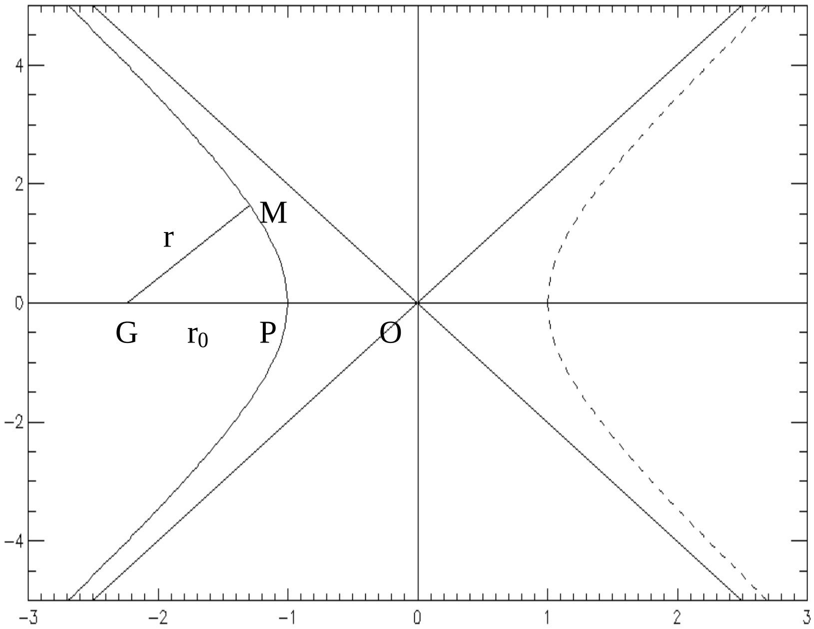
*Cas de l'ellipse ($0 < e < 1$)*
si $r_0 = p / (1 + e)$ est le périgée de la trajectoire, alors $v_0 = v_L\ [\ (1 + e)/2\ ]^{1/2}$ et $v_L/\sqrt{2} < v_0 < v_L$
si $r_0 = p / (1 - e)$ est l'apogée de la trajectoire, alors $v_0 = v_L\ [\ (1 - e)/2\ ]^{1/2}$ et $0 < v_0 < v_L/\sqrt{2}$

*Cas du cercle ($e = 0$)*
$r_0 = p$ et $v_0 = v_L/\sqrt{2}$

En résumé, la vitesse initiale conditionne la nature de la trajectoire:

| | |
|---|---|
| $0 < v_0 < v_L/\sqrt{2}$ | ellipse dont la position initiale est l'apogée |
| $v_0 = v_L/\sqrt{2}$ | cercle |
| $v_L/\sqrt{2} < v_0 < v_L$ | ellipse dont la position initiale est le périgée |
| $v_0 = v_L$ | parabole |
| $v_0 > v_L$ | hyperbole |

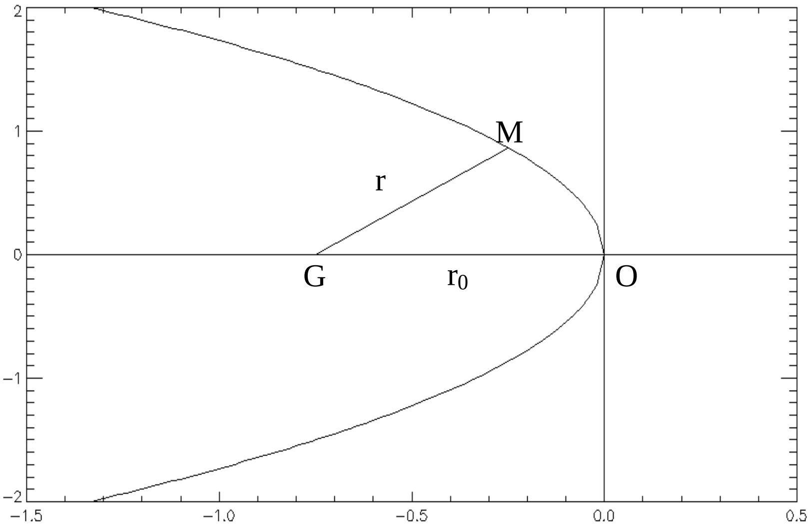
$\boxed{v_L = [2\ K\ (m_1 + m_2) / r_0]^{1/2}}$
vitesse de libération




### Hyperbole

équation cartésienne:
$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
asymptotes $y = \pm (b/a)\, x$
foyer $OG = c = (a^2 + b^2)^{1/2}$
périgée $OP = a$
excentricité $e = c/a > 1$
$b = a\,(e^2 - 1)^{1/2}$

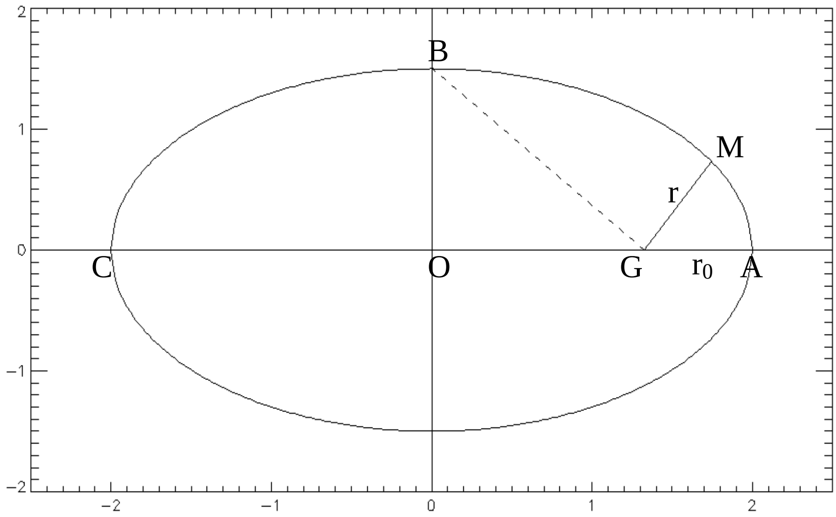
équation polaire:
$r = p/(1 + e \cos\theta) = GM$
$p = a\,(e^2 - 1)$
périgée $r_p = GP = p/(1 + e)$




### Parabole

équation cartésienne:
$x = - y^2 / 2p$
foyer $OG = c = p/2$
excentricité $e = 1$

équation polaire:
$r = p/(1 + \cos\theta) = GM$
périgée $r_p = GO = p/2$

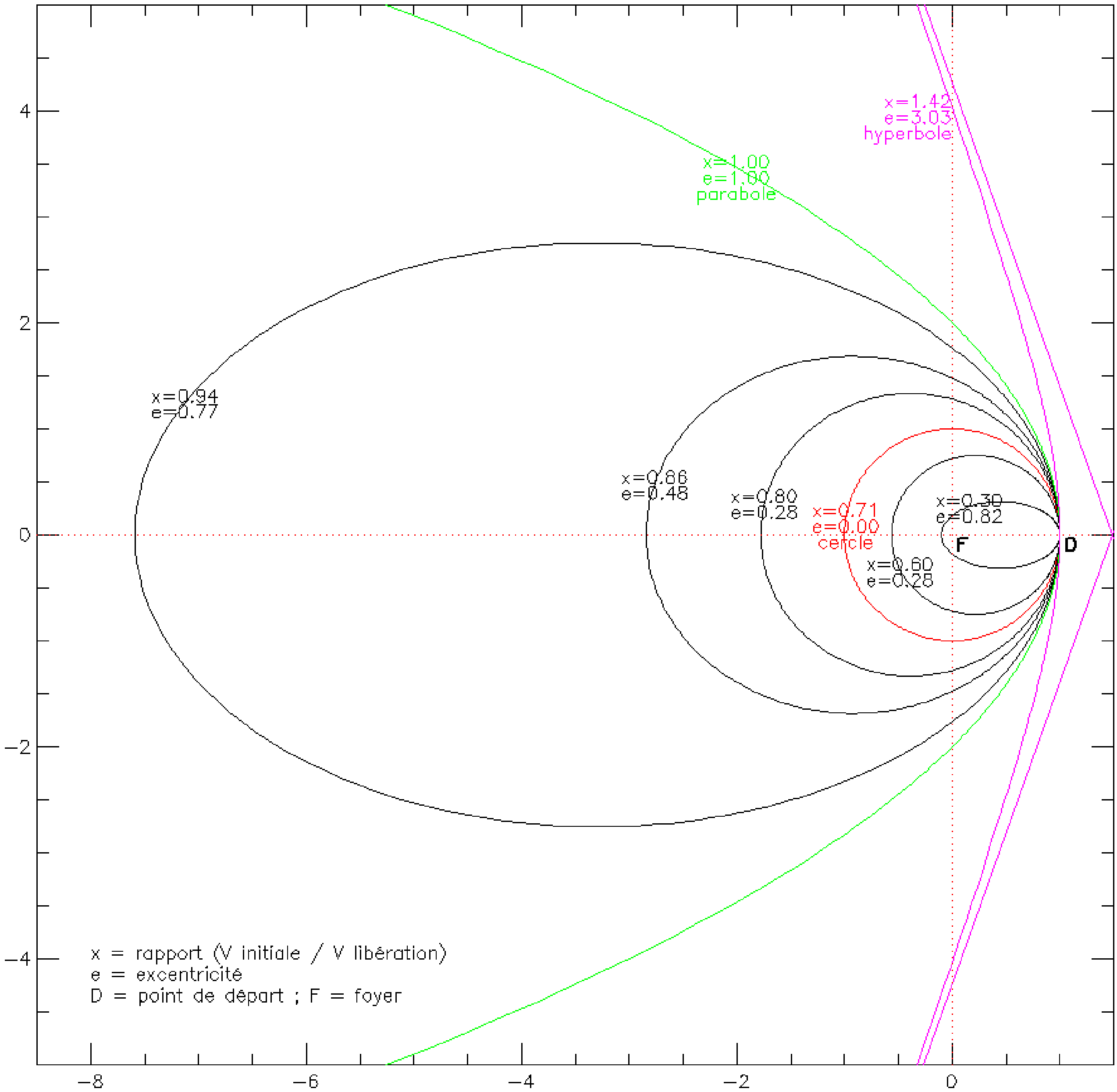



### Ellipse

équation cartésienne:
$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
$OA = a$ et $OB = b$
foyer $OG = c = (a^2 - b^2)^{1/2}$
$GB = a$
excentricité $e = c/a < 1$
$b = a\,(1 - e^2)^{1/2}$

équation polaire:
$r = p/(1 + e \cos\theta) = GM$
$p = a\,(1 - e^2)$
périgée $r_a = GA = a\,(1 - e)$
apogée $r_p = GC = a\,(1 + e)$

Dans chaque cas, $\boxed{p = C^2 / K\,(m_1 + m_2) \text{ et } C = r_0\, v_0}$




Trajectoires possibles d'un objet de masse réduite $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ autour du centre de gravité ou foyer noté F. La vitesse initiale $v_0$ au point de départ D est supposée orthoradiale (donc orthogonale à **FD**). La nature de la trajectoire dépend du paramètre $x = v_0/v_L$ où $v_L$ est la vitesse de libération. L'excentricité e dépend aussi du rapport $x = v_0/v_L$. Si $m_1 >> m_2$, la masse $m_1$ est en F et le corps de masse $m_2$ gravite autour. La vitesse de libération est dans ce cas $v_L = [2 K m_1 / r_0]^{1/2}$.

*Trajectoires partant à l'infini:*

x > 1 : hyperbole (et ses asymptotes) en violet

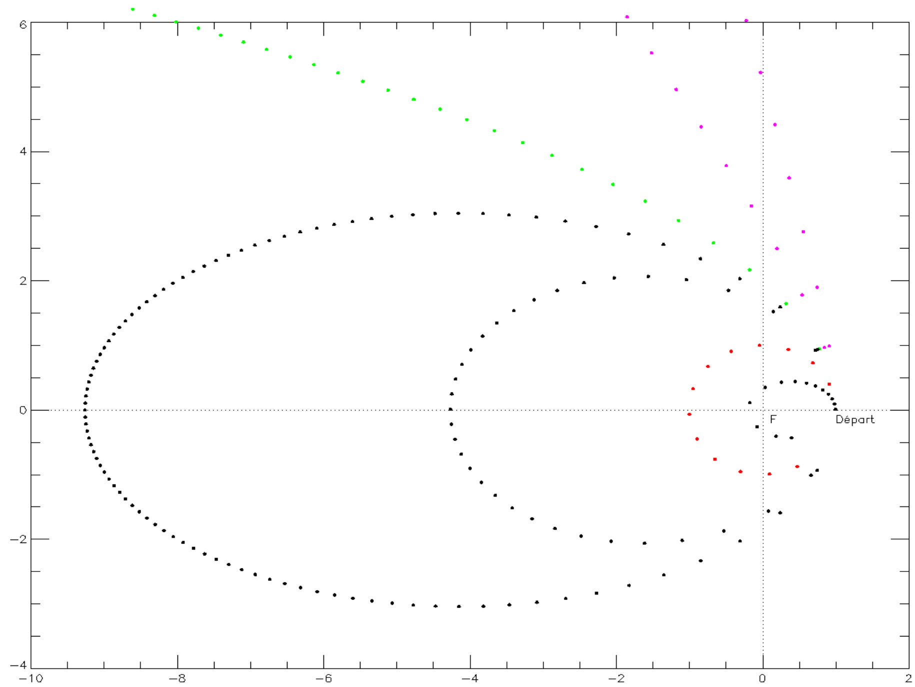
x = 1 : parabole en vert

*Trajectoires fermées:*

$1/\sqrt{2} < x < 1$: ellipse dont D est le périgée en noir

$x = 1/\sqrt{2}$ : cercle en rouge (e = 0, r = constante)

$x < 1/\sqrt{2}$ : ellipse dont D est l'apogée en noir




Cinématique des positions d'un objet de masse réduite $\mu = m_1\, m_2 / (m_1 + m_2)$ autour du centre de gravité ou foyer F. La vitesse initiale $v_0$ au point de départ D est supposée orthoradiale (donc orthogonale à **FD**). Entre deux positions successives (représentées par les points), l'intervalle de temps est constant. Plus les points sont proches, et plus la vitesse est faible. Avec $x = v_0/v_L$,

*Trajectoires partant à l'infini:*

$x > 1$ : hyperboles en violet, vitesse décroissante vers une valeur asymptote non nulle

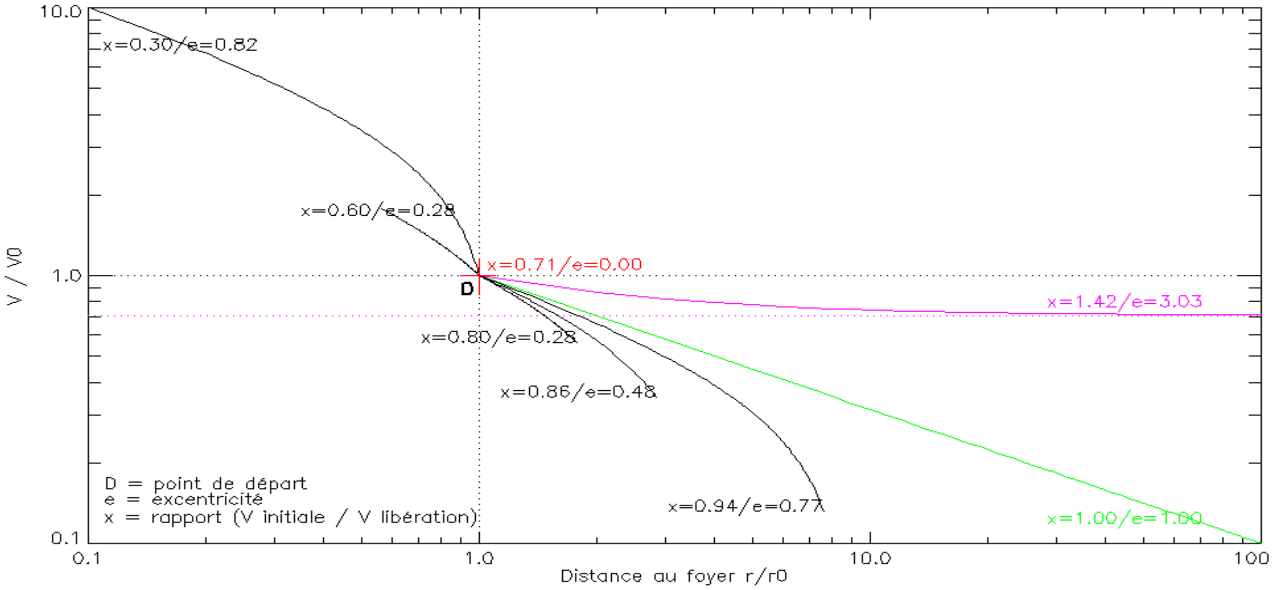
$x = 1$ : parabole en vert, vitesse décroissante vers zéro

*Trajectoires fermées:*

$1/\sqrt{2} < x < 1$: ellipse dont D est le périgée en noir (vitesse maximale au périgée D)

$x = 1/\sqrt{2}$ : cercle en rouge ($e = 0$, vitesse constante)

$x < 1/\sqrt{2}$ : ellipse dont D est l'apogée en noir (vitesse minimale à l'apogée D)




Vitesse $v/v_0$ en fonction de la distance $r/r_0$ au foyer F. D point de départ; $v_0$ vitesse initiale.

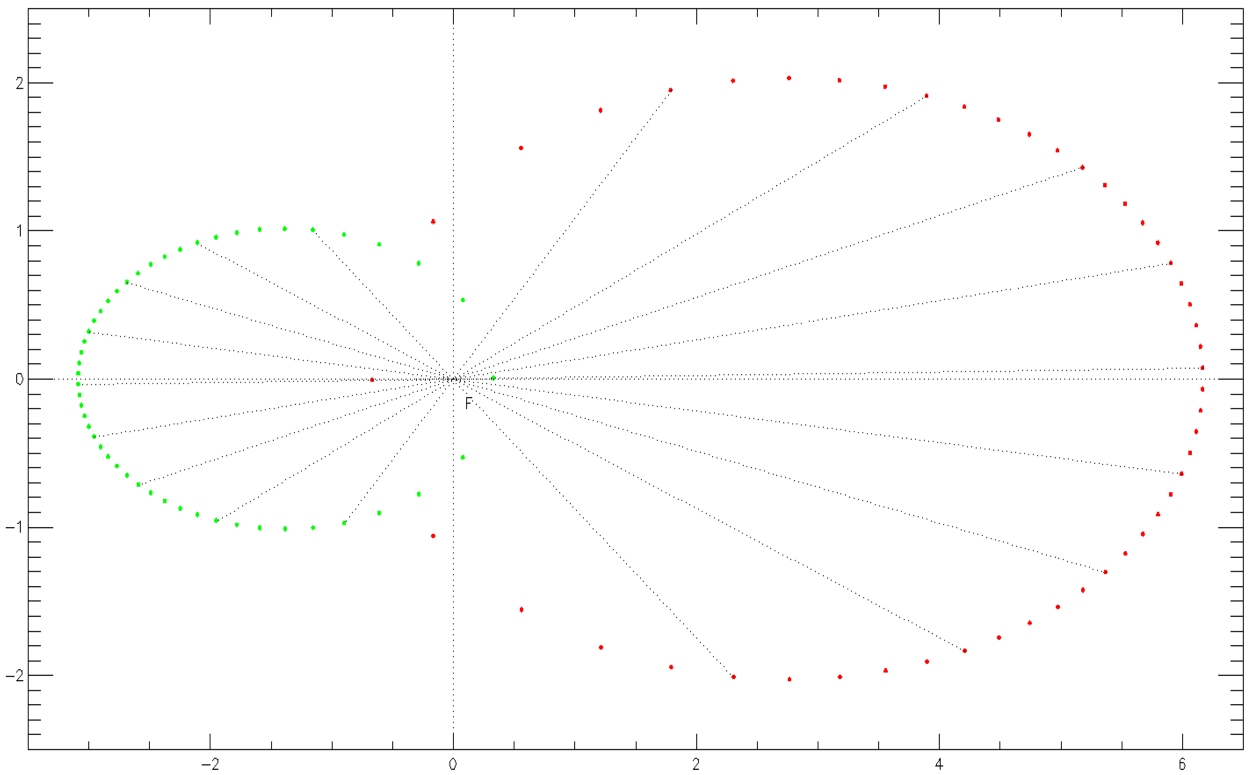
*Trajectoires partant à l'infini, $r(t) > r_0$ , à vitesse décroissante $v(t) < v_0$ :*

$x > 1$ : hyperbole (violet, vitesse asymptote) et $x = 1$ : parabole (vert, vitesse nulle à l'infini)

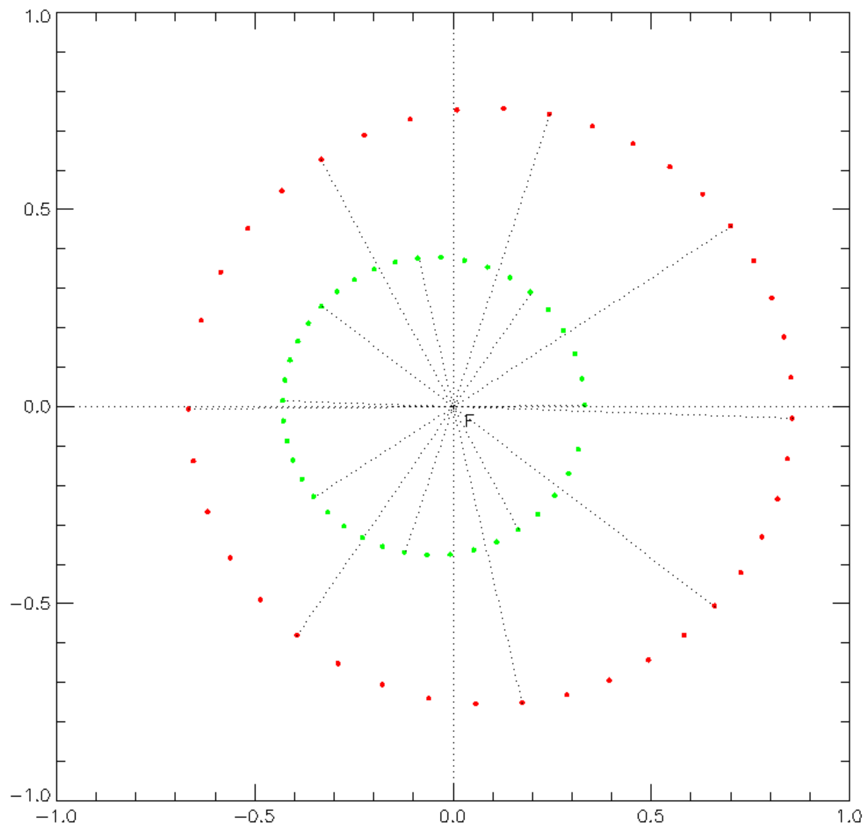
*Trajectoires fermées à vitesse $v(t) < v_0$ :* $1/\sqrt{2} < x < 1$, ellipse dont D est le périgée en noir, $r(t) > r_0$

*Trajectoires fermées à vitesse $v(t) = v_0$ :* $x = 1/\sqrt{2}$, cercle = point rouge, $r(t) = r_0$

*Trajectoires fermées à vitesse $v(t) > v_0$ :* $x < 1/\sqrt{2}$, ellipse dont D est l'apogée en noir, $r(t) < r_0$




Cinématique du problème à deux corps de masse $m_1$ et $m_2$ (la masse du corps vert est <u>double</u> de celle du rouge) gravitant autour de leur centre de gravité situé au foyer F. Les droites en trait pointillé relient les positions respectives des deux corps.
<u>Entre deux positions successives</u> (représentées par les points), <u>l'intervalle de temps est constant</u>.
L'excentricité des ellipses dépend du paramètre $x = v_0/v_L$ ($v_0$ vitesse initiale du corps fictif de masse réduite $\mu = m_1 m_2 /(m_1 + m_2)$, $v_L = [2K(m_1 + m_2)/r_0]^{1/2}$ , $r_0$ étant la distance initiale au centre de gravité F). Cas où $x = 0.95$. Les vitesses et distances des corps sont dans le rapport des masses**.**




Même figure, mais avec $x = 0.75$ (proche de la valeur critique 0.707 pour laquelle on aurait eu deux cercles concentriques de centre F (ou centre de gravité du système). La masse du corps vert est <u>double</u> de celle du rouge. On a les relations:

$$m_1 \mathbf{FM_1} + m_2 \mathbf{FM_2} = \mathbf{0}$$
$$m_1 \mathbf{v_1} + m_2 \mathbf{v_2} = \mathbf{0}$$

**V - 6 - Particularités du mouvement elliptique**

L'énergie E prend la forme suivante, sachant que $\boxed{p = a\,(1 - e^2)}$

$\boxed{E = -\,1/2\ K\ m_1\, m_2 / a}$

où a est le demi grand axe de l'ellipse.

Si e est son excentricité ($0 < e < 1$), le demi petit axe est $\boxed{b = a\,(1 - e^2)^{1/2}}$

e est déterminée par la condition initiale:

$$\boxed{\begin{array}{l} v_L/\sqrt{2} < v_0 < v_L\ ,\ e = 2\,(v_0 / v_L)^2 - 1 \\ 0 < v_0 < v_L/\sqrt{2}\ ,\ \ e = 1 - 2\,(v_0 / v_L)^2 \end{array}}$$

$r = p/(1 + e \cos\theta)$ fournit $\boxed{\text{l'apogée } r_a = a\,(1 + e) \text{ et le périgée } r_p = a\,(1 - e)}$

On a $\boxed{r_a + r_p = 2\,a}$

Si $v_a$ et $v_p$ désignent la vitesse à l'apogée et au périgée, la loi des aires s'écrit:

$\boxed{C = r_a\, v_a = r_p\, v_p = r_0\, v_0}$

où $r_0$ et $v_0$ sont respectivement la position et la vitesse initiale (supposée orthoradiale).

Par ailleurs, la conservation de l'énergie entre l'apogée et le périgée donne une seconde relation:

$E = 1/2\ \mu\, v_a^2 - K\, m_1\, m_2 / r_a = 1/2\ \mu\, v_p^2 - K\, m_1\, m_2 / r_p$ où $\mu = m_1\, m_2 / (m_1 + m_2)$ masse réduite

comme $v_p = (r_a / r_p)\, v_a$

$1/2\ \mu\, v_a^2\,(1 - (r_a/r_p)^2) = -\,K\, m_1\, m_2\,(1/r_p - 1/r_a)$

On a vu que $r_a = a\,(1 + e)$ et le périgée $r_p = a\,(1 - e)$, il vient alors:

$1/2\ \mu\, v_a^2\,[1 - (1 + e)^2/(1 - e)^2] = -\,K\, m_1\, m_2\,(2\,a\,e) / a^2\,(1 - e^2)$

$1/2\ v_a^2\,(-4\,e) / (1 - e)^2 = -\,K\,(m_1 + m_2)\,(2\,e) / a\,(1 - e^2)$

ce qui donne finalement
puis

$$\boxed{\begin{array}{l} v_a = [K\,(m_1 + m_2) / a]^{1/2}\ \ [(1 - e) / (1 + e)]^{1/2} \\ v_p = [K\,(m_1 + m_2) / a]^{1/2}\ \ [(1 + e) / (1 - e)]^{1/2} \end{array}}$$

- <u>Période de révolution T</u>

On peut la calculer à lartir de la loi des aires: $dS/dt = C/2 =$ constante

ce qui donne en intégrant: $S =$ surface de l'ellipse $= \pi\, a\, b = C\, T/2 = r_a\, v_a\, T/2$

d'où $T = 2\pi\, a\, b / r_a\, v_a$

Comme $r_a = a\,(1 + e)$ et $v_a = [K\,(m_1 + m_2) / a]^{1/2}\ \ [(1 - e) / (1 + e)]^{1/2}$

En élevant T au carré, on obtient: $T^2 = 4\pi^2 a^2 b^2 / K (m_1 + m_2) a (1 - e^2)$

Cependant, $b^2 = a^2 (1 - e^2)$, d'où $T^2 = 4\pi^2 a^3 / K (m_1 + m_2)$, loi qui s'énonce ainsi:

$$\boxed{T^2/a^3 = 4\pi^2 / K (m_1 + m_2)}$$

- <u>Lois de Kepler</u>

* 1ère loi: la trajectoire d'une planète est une ellipse dont le centre du Soleil est un foyer

* 2ème loi: les aires balayées par le rayon vecteur sont proportionnelles au temps mis à les parcourir (loi des aires $r^2 d\theta/dt = C$ = constante des aires)

* 3ème loi: $T^2/a^3 = 4\pi^2 / KM_s$
où T est la période de révolution, a le demi grand axe de l'ellipse, K la constante de gravitation ($6.67\ 10^{-11}$ SI) et $M_s$ la masse du Soleil ($2\ 10^{30}$ kg)

- <u>Données sur le Soleil et les planètes du système solaire</u>

Soleil: masse $2\ 10_{30}$ kg, rayon 700 000 km, densité moyenne 1.4.

*Excentricités actuelles (elles ne sont pas constantes dans le temps !), masse en kg et demi grand axe des planètes en UA (1 UA = 149.6 $10^9$ m)*

| | e | Masse (kg) | demi grand axe a (UA) |
|---|---|---|---|
| Mercure | 0.2056 la plus forte | $3.3\ 10^{23}$ | 0.39 |
| Vénus | 0.0067 la plus faible | $4.9\ 10^{24}$ | 0.72 |
| Terre | 0.0167 | $6.0\ 10^{24}$ | 1.00 |
| Mars | 0.0934 | $6.3\ 10^{23}$ | 1.52 |
| Jupiter | 0.0484 | $1.9\ 10^{27}$ la plus massive | 5.20 |
| Saturne | 0.0542 | $5.7\ 10^{26}$ | 9.55 |
| Uranus | 0.0472 | $8.7\ 10^{25}$ | 19.22 |
| Neptune | 0.0086 | $1.1\ 10^{26}$ | 30.11 |

*Période de révolution T autour du Soleil (jours), rayon équatorial R des planètes (km) et densité d*

| | T (jours) | R (km) | d (sans unité) |
|---|---|---|---|
| Mercure | 88.0 | 2439 | 5.5 |
| Vénus | 224.7 | 6052 | 5.1 |
| Terre | 365.25 | 6378 | 5.5 |
| Mars | 687.0 | 3397 | 3.9 |
| Jupiter | 4332.6 | 71400 | 1.3 |
| Saturne | 10759 | 60000 | 0.7 |
| Uranus | 30688 | 25400 | 1.3 |
| Neptune | 60181 | 24300 | 1.6 |

*Exercice: le Soleil à un rayon de 700 000 km. En supposant que toute la masse du système solaire est concentrée dans Jupiter (soit 1/1050 de la masse du Soleil), à quelle distance du centre du Soleil (en km) se trouve le centre de gravité G ?*
*Donnée: distance Soleil Jupiter = 5.202 UA et 1 UA = 149.6 millions de km.*

Réponse:
on a la relation vectorielle de définition du centre de gravité S:
$M_S$ **SG** + $M_J$ **JG** = **0**
et la relation de Chasles
**JG** = **JS** + **SG**
où J est le centre de Jupiter de masse $M_J$, et S le centre du Soleil de masse $M_S$
d'où **SG** = **SJ** $M_J / (M_S + M_J) \approx$ **SJ** $M_J / M_S$
et en norme, $SG \approx SJ /1050$ soit $4.95\ 10^{-3}$ UA = 741000 km soit environ le rayon solaire. Le centre de gravité est proche de la surface solaire. La période de révolution autour du centre de gravité est celle de Jupiter soit 12 ans environ.

*Exercice: l'excentricité de l'orbite terrestre "e" autour du Soleil varie de 0 à 0.06 en cent mille ans environ. On fait l'hypothèse que le demi grand axe "a" est invariable et égal à sa valeur actuelle de $149.6\ 10^6$ km.*
*1) dans quel intervalle varie l'apogée $r_a = a\ (1 + e)$ quand e varie de 0 à 0.06 ?*
*2) dans quel intervalle varie le périgée $r_p = a\ (1 - e)$ quand e varie de 0 à 0.06 ?*
*3) la puissance P(t) reçue par mètre carré au niveau de l'orbite terrestre est $P(t) = L/4\pi r(t)^2$ (où r(t) est la distance Soleil Terre). Que vaut P(t) quand e = 0 donc r = a au cours d'une révolution circulaire (on donne $L = 3.86\ 10^{26}$ W luminosité du Soleil) ?*
*4) La puissance instantanée P(t) reçue par la Terre par mètre carré est $(L/4\pi C)\ d\theta/dt$ où C est la constante des aires. Elle varie en fonction du temps (car $d\theta/dt$ varie sur l'orbite). Exprimer l'énergie totale E reçue par mètre carré sur une révolution en fonction de L et de C.*
*5) Sachant que $C = [K M_s\ a\ (1-e^2)]^{1/2}$, où K est la constante de gravitation et $M_s$ la masse du Soleil, exprimer E en fonction de L, $(K M_s\ a)$ et e.*
*6) sachant que $(1-e^2)^{-1/2} \approx 1 - e^2/2$, que vaut la variation relative de E quand e varie de 0 à 0.06 ? Cette variation à elle seule est-elle susceptible d'influencer fortement le climat ?*
*7) dans quel intervalle varie la puissance reçue par mètre carré $P(t) = L/4\pi r(t)^2$ entre apogée et périgée quand e = 0.0167 (valeur actuelle) ?*
*8) dans quel intervalle varie la puissance reçue par mètre carré $P(t) = L/4\pi r(t)^2$ entre apogée et périgée quand e = 0.06 (valeue maximale) ?*

Réponses:
1) $r_a = a\ (1 + e)$ varie de 149.6 à 158.6 $10^6$ km
2) $r_p = a\ (1 - e)$ varie de 149.6 à 140.6 $10^6$ km
3) la puissance reçue par la Terre $L/4\pi r^2$ est de 1372 W/m² et ne varie pas dans le temps ($e = 0$, $r_a = r_p = a = 149.6\ 10^6$ km)
4) E = L / 2C
5) $E = L / (2\ [K M_s\ a\ (1-e^2)]^{1/2})$
6) variation relative $0.06^2/2 = 0.0018$ soit seulement 0.18 % (faible influence climatique)
7) $r_a = 152.1\ 10^6$ km et $r_p = 147.1\ 10^6$ km; la puissance reçue par la Terre $L/4\pi r^2$ varie entre 1328 W/m² (apogée à e = 0.0167) à 1420 W/m² (périgée à e = 0.0167), cette variation de 7 % au cours de la révolution est modérée.
8) la puissance reçue par la Terre $L/4\pi r^2$ varie entre 1221 W/m² (apogée à e = 0.06) à 1554 W/m² (périgée à e = 0.06), cette variation de 25% au cours de la révolution est importante.
*Nota: la luminosité L du Soleil varie avec le cycle solaire mais à raison de moins de 0.1 %, soit nettement moins que les fluctuations d'origine orbitale.*

*Exercice: l'excentricité de l'orbite terrestre e autour du Soleil est de 0.0167. La distance moyenne Soleil Terre est a = 149.6 $10^6$ km. Calculer le diamètre angulaire (donc sur le ciel pour un observateur) en minutes de degré entre l'apogée (Juillet) et le périgée (Janvier) sachant que le diamètre réel du Soleil est de 1.4 $10^6$ km.*

Réponses:
apogée = a (1+e) = 152.1 $10^6$ km
périgée = a (1-e) = 147.1 $10^6$ km
diamètre apparent en radians = diamètre solaire / distance Soleil-Terre
1 radian = 360 degrés
1 degré = 60 minutes
donne une variation de 31.5' à 32.5' de l'apogée au périgée.

*Exercice: la comète de Halley a une période T = 76 ans. Son excentricité e vaut 0.97. On demande de calculer le demi grand axe a (en km puis en UA), l'apogée, le périgée (en km puis en UA), la vitesse à l'apogée et la vitesse au périgée (en km/s). On donne la masse du Soleil: 2 $10^{30}$ kg, et 1 UA = 149.6 $10^6$ km.*

Réponses:
3ème loi de Kepler, a = 2.7 $10^9$ km = 18.0 UA
apogée = a (1+e) = 5.3 $10^9$ km = 35.4 UA
périgée = a (1-e) = 8.1 $10^7$ km = 0.55 UA
vitesse à l'apogée = 0.9 km/s
vitesse au périgée = 57 km/s

*Exercice: vitesse de libération.*
1) Calculer la vitesse de libération à la surface du Soleil, de la Terre et de la Lune en km/s. Calculer ensuite la vitesse de libération du Soleil depuis l'orbite terrestre en km/s.
2) un satellite tourne autour de la Terre en orbite basse circulaire; donner en appliquant le principe fondamental de la dynamique l'expression de sa vitesse de rotation v en fonction de K (constante de gravitation), de M (masse de la Terre) et du rayon R de la Terre. Que vaut numériquement cette vitesse en km/s ?
3) calculer de la même façon la vitesse de la Terre sur son orbite en la supposant circulaire (en km/s).
Données:
Masses: Soleil, 2 $10^{30}$ kg, Terre 6 $10^{24}$ kg, Lune, 7.4 $10^{22}$ kg
Rayons: Soleil, 700 000 km, Terre, 6400 km, Lune, 1700 km
Distance Soleil-Terre: 149 $10^6$ km

Réponses:
1) vitesse de libération aux surfaces:
du Soleil, 617 km/s
de la Terre, 11.2 km/s
de la Lune, 2.4 km/s
vitesse de libération du Soleil depuis l'orbite terrestre: 42.1 km/s
2) v = $(K\ M / R)^{1/2}$
v = 7.9 km/s
3) v = 29.8 km/s