

# Introduction à la l'hydrodynamique et à la MHD

## *Sommaire*

Méthode de détermination expérimentale des champs de vitesse

Equations de base de l'hydrodynamique:

conservation de la masse, cinématique, hydrostatique, équation du mouvement (Euler)

fluide incompressible, loi de Bernoulli *et ses applications diverses*

équation d'état, énergie interne et enthalpie, loi de conservation de l'énergie

Régime stationnaire dans un tube de courant:

généralisation de la loi de Bernoulli aux fluides compressibles

méthode de détermination expérimentale des champs magnétiques

mouvement longitudinal et équilibre transversal dans un tube magnétique

*application au soleil*

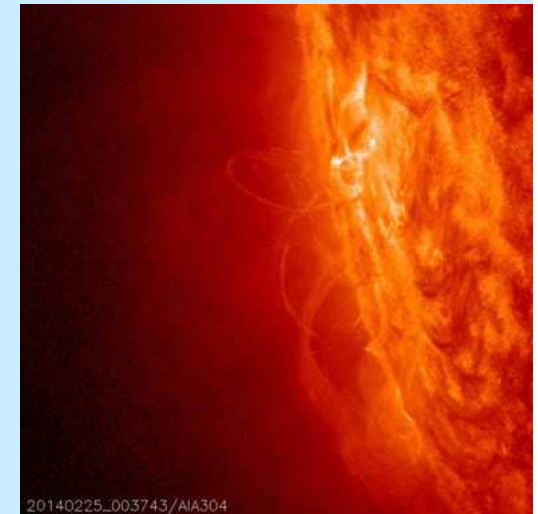
Diffusion et advection des champs magnétiques:

instabilité de déchirement, reconnexion magnétique

Ondes acoustiques et ondes magnétiques, *application au soleil*

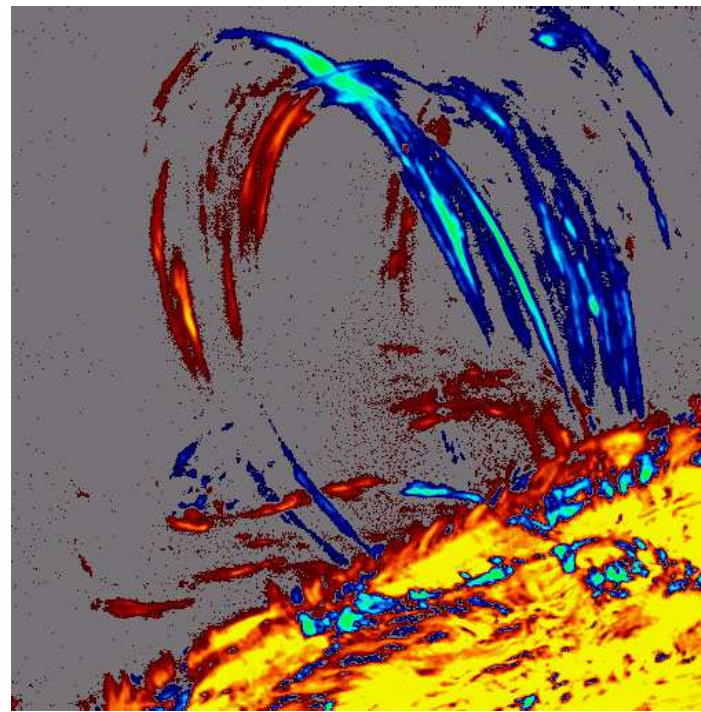
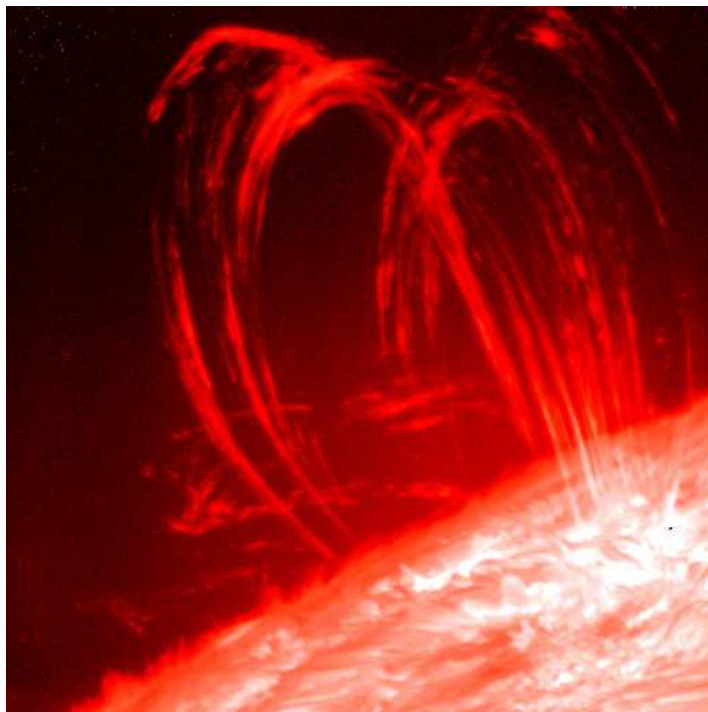
Chocs hydrodynamiques, *exemple de l'onde de Moreton solaire*

Ecoulement transsonique: *exemple du vent solaire*

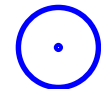


Dans tout le cours, les vecteurs sont en caractères gras

En astronomie, l'hydrodynamique traite des écoulements de fluides compressibles (de vitesse macroscopique  $\mathbf{v}$ , masse volumique  $\rho$ ), sous l'action de forces diverses: pression, viscosité, pesanteur, Coriolis... La magnéto-hydrodynamique ou MHD, résultat du couplage entre les équations de l'hydrodynamique et de l'électromagnétisme (Maxwell ARQS), décrit l'interaction entre la matière et le champ magnétique en présence de courants électriques.



$v_{//}$  code  
couleur



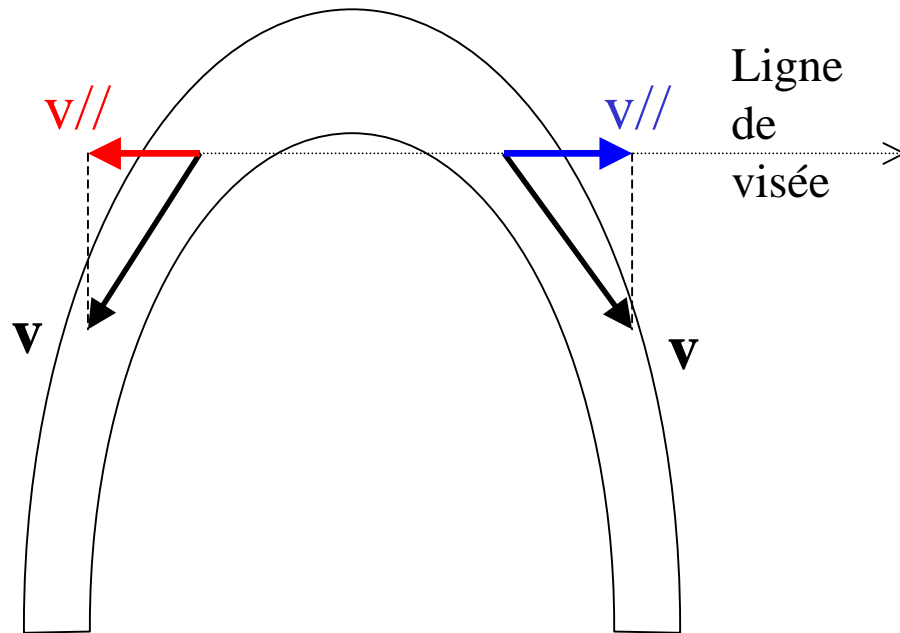
approche



éloignement

Écoulement dans des boucles de champ magnétique solaire (hauteur 50000 km); densité de matière et vitesse Doppler  $v_{//}$  (projection de  $\mathbf{v}$  sur la ligne de visée) – SVST La Palma

## Préambule: mesure des vitesses



Observation du champ des vitesses à distance par effet Doppler sur la ligne de visée (projection  $v_{//}$  du vecteur  $\mathbf{v}$ ):

$$v_{//} = C \Delta\nu/\nu$$

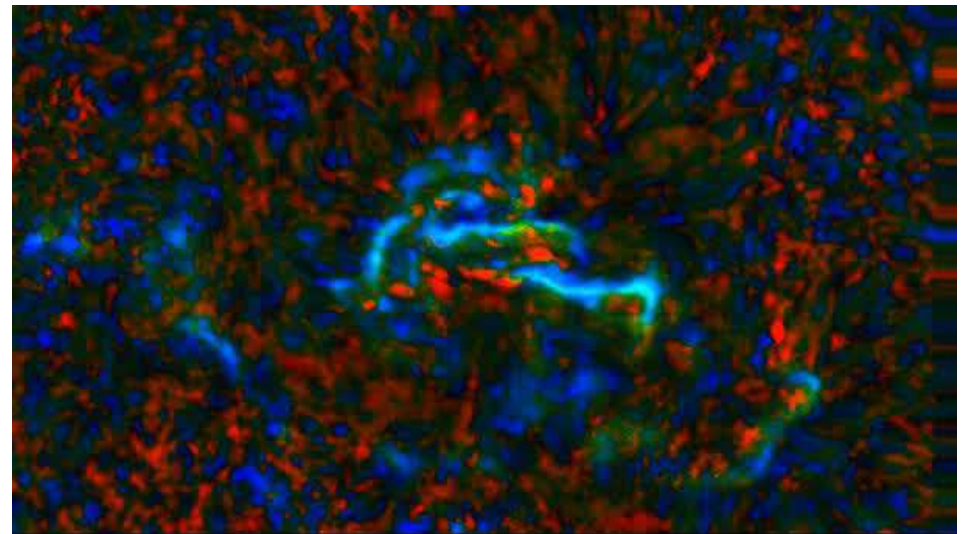
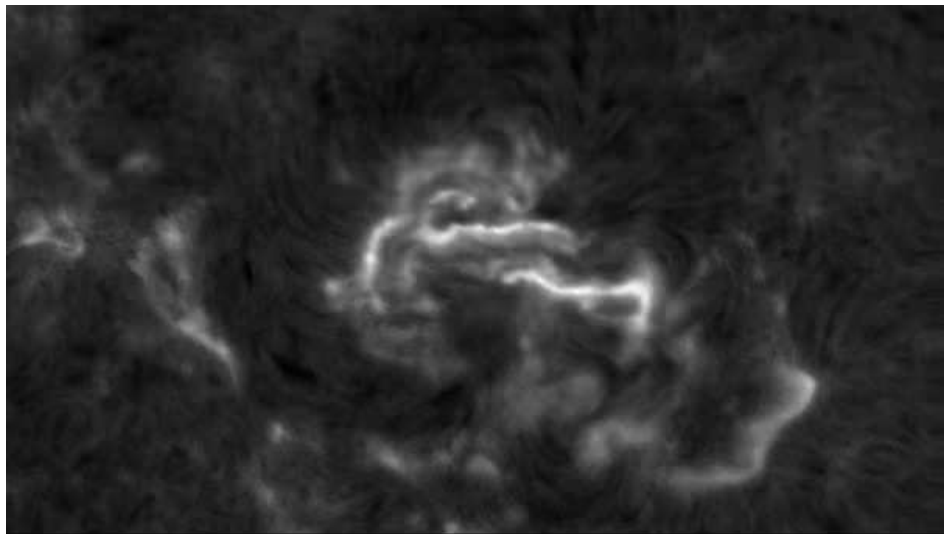
$\nu$  fréquence l'onde lumineuse

$\Delta\nu$  décalage Doppler en fréquence

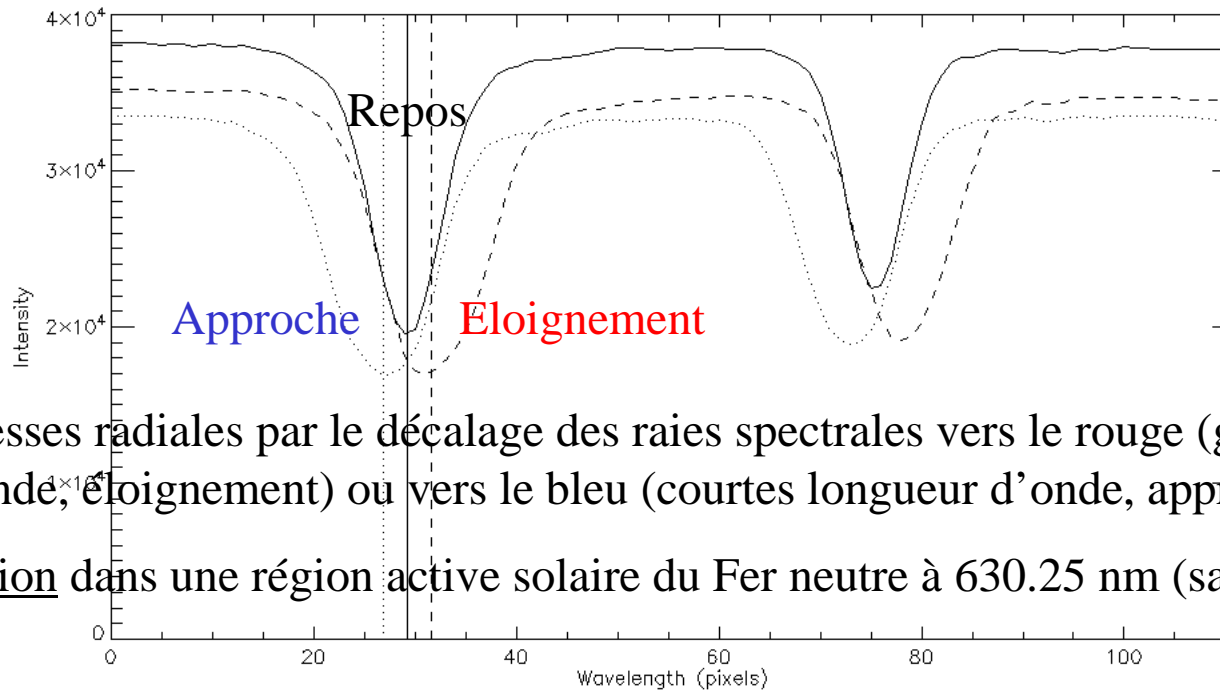
$\Delta\nu > 0$  mouvement d'approche

$\Delta\nu < 0$  mouvement d'éloignement

Exemple d'une éruption solaire: intensités et vitesses Doppler (projetées sur la ligne de visée)

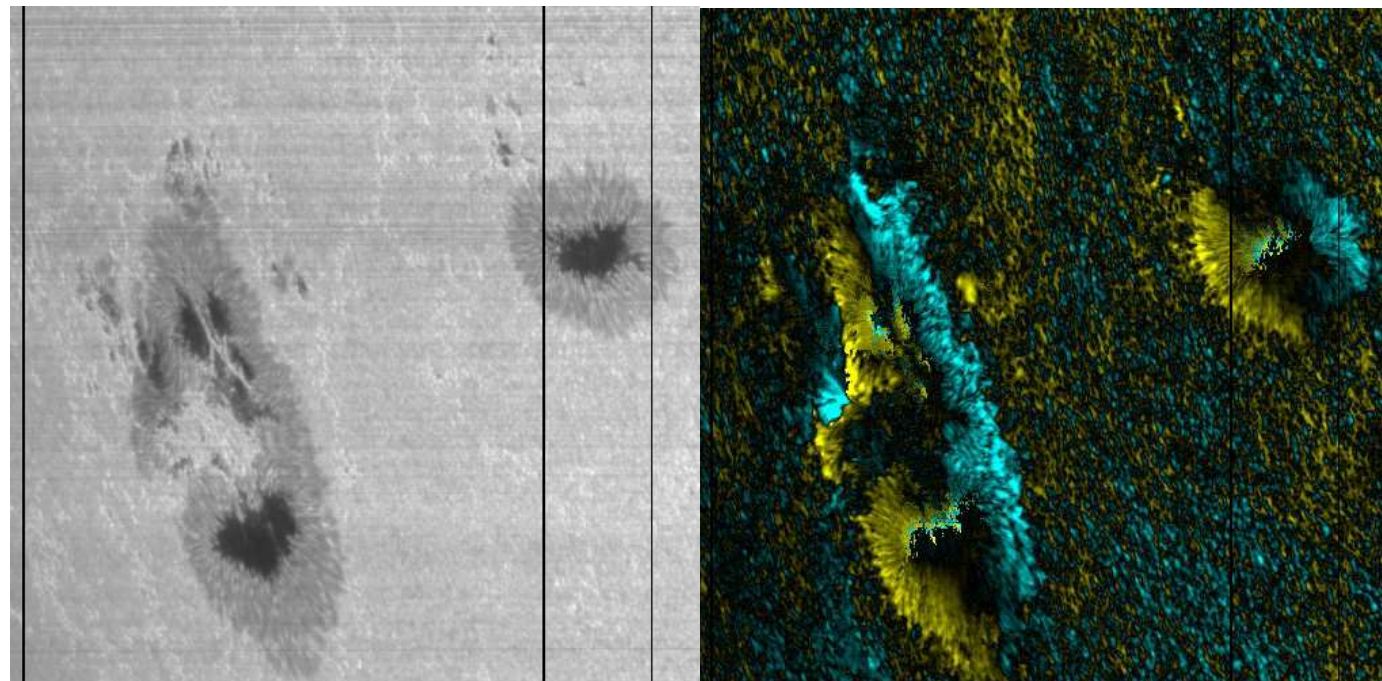






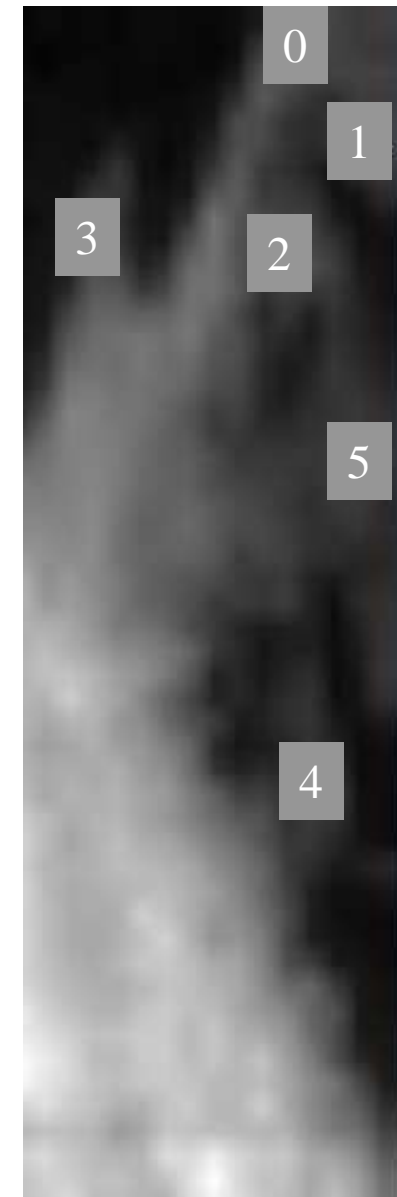
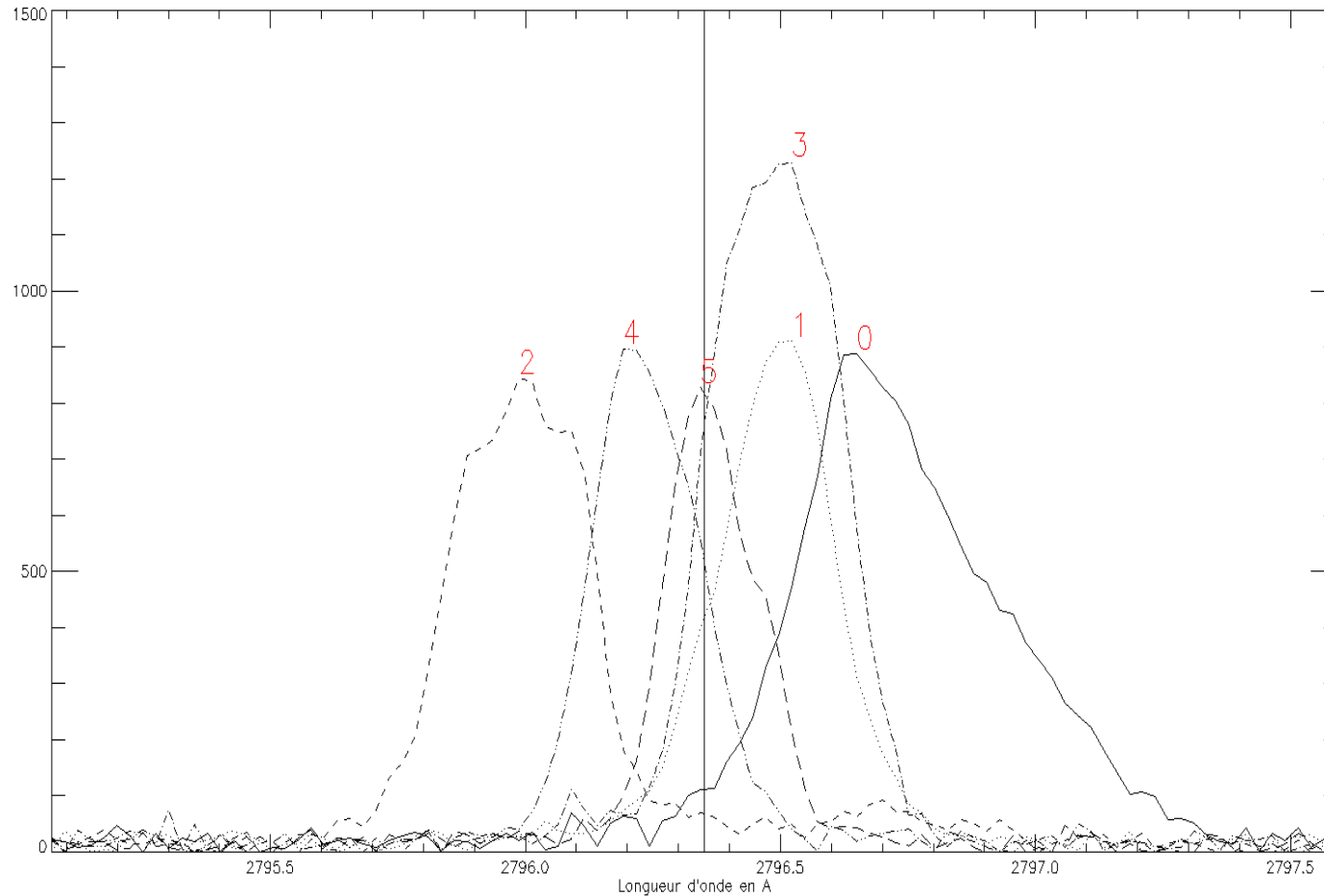
Mesure des vitesses radiales par le décalage des raies spectrales vers le rouge (grandes longueurs d'onde, éloignement) ou vers le bleu (courtes longueur d'onde, approche)  
 Raie d'absorption dans une région active solaire du Fer neutre à 630.25 nm (satellite HINODE)

Effet Evershed:  
 mouvements  
 radiaux ombre  
 vers pénombre  
 des taches



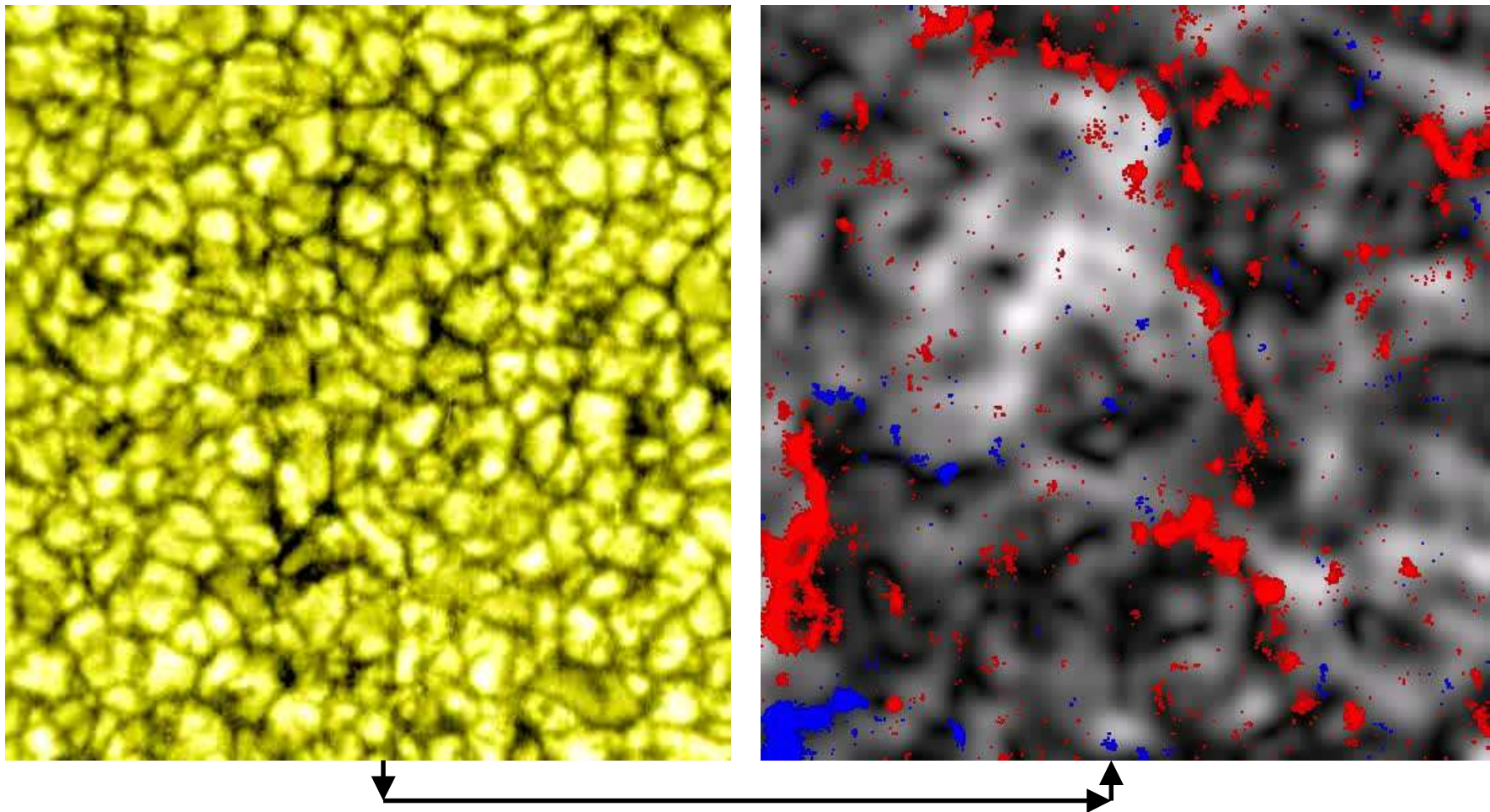
Mesure des vitesses radiales par le décalage des raies spectrales vers le rouge (grandes longueurs d'onde, éloignement) ou vers le bleu (courtes longueur d'onde, approche)

Raies d'émission dans les protubérances solaires (satellite IRIS, raie UV du Magnésium ionisé à 279.65 nm)



Mesure des vitesses transversales par la détection des mouvements propres des structures (la granulation à la surface du Soleil, ci dessous champ d'environ 30'' x 30''). La mesure de la vitesse transversale instantanée est difficile; on mesure plus facilement la vitesse moyenne sur un intervalle de temps de 30 min avec une résolution spatiale dégradée.

(satellite Hinode, continu bleu à 450 nm, on a superposé les champs magnétiques)



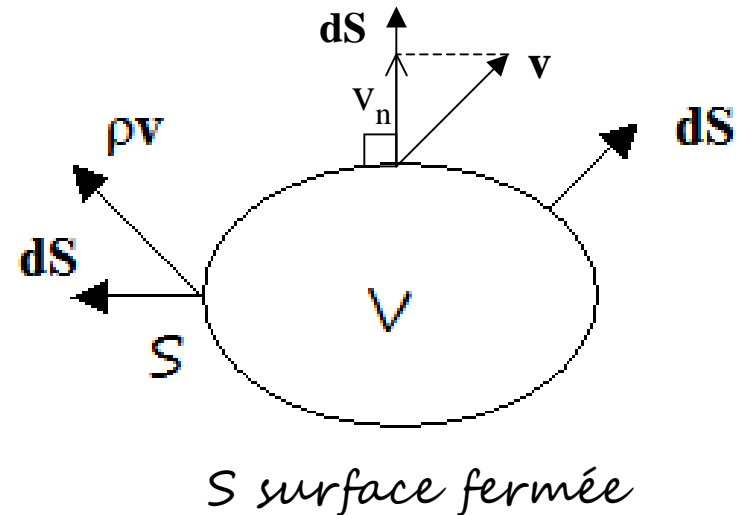
# I – Les équations de base de l'hydrodynamique

## 1 - Remarques générales sur les équations de conservation

La loi de conservation d'un champ scalaire  $\rho(x, y, z, t)$  (exemple: densité volumique de masse en  $\text{kg m}^{-3}$  ou d'énergie en  $\text{J m}^{-3}$ ) suit l'équation générale :

$$\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = s \quad (s \text{ en } \text{kg m}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ ou } \text{W m}^{-3})$$

- $\mathbf{v}$  champ des vitesses
- $\rho\mathbf{v}$  densité de courant (de masse, d'énergie...)
- $s$  terme source ou perte (selon son signe)



Par intégration sur un volume  $V$  fermé par une surface  $S$ , via le théorème d'Ostrogradski:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \iiint_V \rho \, dv \right] + \oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V s \, dv$$

$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = v_n \, dS$  avec  $v_n$  composante normale de  $\mathbf{v}$  sur  $S$  comptée positivement vers l'extérieur



La quantité  $\iiint_V \rho \, dv$  (masse ou énergie du volume  $V$ ) est conservée si, par exemple :

- terme source/perte nul ( $s = 0$ ) et courant nul sur la frontière  $S$  ( $v_n = 0$  partout)
  - ou  $\oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V s \, dv$
- donc, en régime stationnaire, les entrées/sorties aux frontières sont compensées par les sources/pertes.

## 2 - Equation de conservation de la masse (équation de continuité)

$$\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$$

$\rho\mathbf{v}$  est la densité volumique de quantité de mouvement

En régime stationnaire:

$\text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$  signifie  $\oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$  sur la surface fermée  $S$  entourant le volume  $V$

→ conservation du débit massique (en  $\text{kg s}^{-1}$ ): masse entrante = masse sortante

si incompressible,  $\oiint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$  sur  $S$  fermée entourant  $V$

→ conservation du débit volumique (en  $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ): volume entrant = volume sortant



### 3 - cinématique des fluides

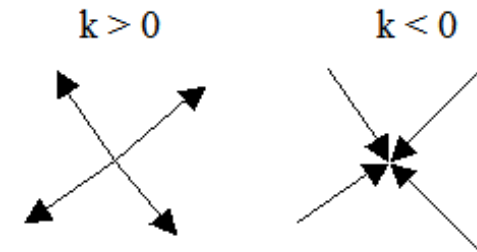
En cartésiennes,  $\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$  caractérise les variations de  $\mathbf{v}$  dans sa direction

En polaires,  $\text{div } \mathbf{v}$  caractérise les mouvements convergents/divergents

Un champ de vitesse, en coordonnées polaires, tel que  $\mathbf{v} = k \mathbf{r} \mathbf{e}_r$ ,  $k$  constante, est tel que:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ et } \text{div } \mathbf{v} = 2k$$

- $\left\{ \begin{array}{l} k > 0: \text{ les mouvements sont } \underline{\text{divergents}} \\ k < 0: \text{ les mouvements sont } \underline{\text{convergents}} \end{array} \right.$



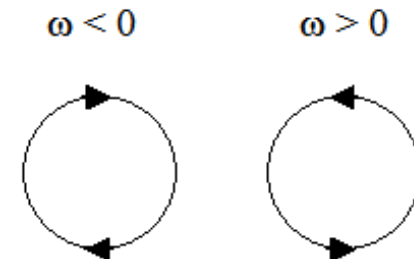
En cartésiennes,  $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v}$  caractérise les variations de  $\mathbf{v}$  dans une direction orthogonale

En polaires,  $\text{rot } \mathbf{v}$  caractérise les mouvements de rotation, les tourbillons

Un champ de vitesse, en coordonnées polaires, tel que  $\mathbf{v} = \omega \mathbf{r} \mathbf{e}_\theta$ ,  $\omega$  constante, est tel que:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ et } \text{rot } \mathbf{v} = 2\omega \mathbf{e}_z$$

- $\left\{ \begin{array}{l} \omega > 0: \text{ fluide en rotation dans le } \underline{\text{sens trigonométrique}}, \text{ vorticité } 2\omega \text{ positive} \\ \omega < 0: \text{ fluide en rotation dans le } \underline{\text{sens horaire}}, \text{ vorticité } 2\omega \text{ négative} \end{array} \right.$



**rot v** est la vorticité

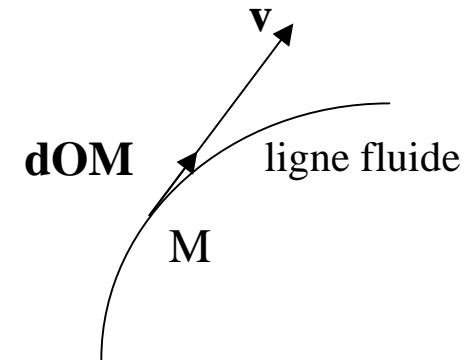
**Ω** = 1/2 **rot v** est le vecteur tourbillon

## *Lignes fluides ou lignes de courant*

Lignes du champ des vitesses définies par  $\mathbf{v} = k \mathbf{dOM}$  ( $k$  réel), ce qui donne les équations:

$$\boxed{dx / v_x = dy / v_y = dz / v_z}$$

Le vecteur vitesse est tangent en tout point d'une ligne fluide



*Écoulement incompressible* ( $\rho = \text{constante}$ )

Un tel écoulement est à divergence nulle:  $\boxed{\text{div } \mathbf{v} = 0}$

*Écoulement irrotationnel à potentiel scalaire des vitesses*

$$\boxed{\mathbf{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}}$$

Il existe une fonction potentiel des vitesses  $\phi$  (champ scalaire) tel que  $\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{grad } \phi}$

et si le fluide est incompressible, ce potentiel obéit à l'équation de Laplace  $\boxed{\Delta \phi = 0}$

*Écoulements irrotationnels incompressibles 2D dans un plan xOy*

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ et } \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

C'est l'analogie des champs potentiels (sans courant) en magnétostatique. On a donc:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{équation de Laplace.}$$

Dans un espace à deux dimensions avec  $\mathbf{v} (v_x, v_y, 0)$  dépendant des coordonnées x et y,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \text{grad } \phi(x,y) && \phi \text{ fonction potentiel} \\ \mathbf{v} &= \text{rot } (\psi(x,y) \mathbf{e}_z) = \text{grad } \psi(x,y) \wedge \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

*(le rotationnel d'un gradient est nul  $\rightarrow \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ )*

*(la divergence d'un rotationnel est nulle  $\rightarrow \text{div } \mathbf{v} = 0$ )*

$\phi(x,y) = \text{constante}$  est l'équation des lignes équipotentielles

$\psi(x,y) = \text{constante}$  est l'équation des lignes de champ

$\phi$  et  $\psi$  sont harmoniques:  $\Delta \phi = \Delta \psi = 0$       On démontre que:

- la fonction complexe  $f(z) = \phi + i \psi$  est une fonction analytique de la variable  $z = x + i y$

-  $df(z)/dz = v_x - i v_y$

Le champ des vitesses complexe  $v_x - i v_y$  dérive donc du potentiel complexe  $f(z) = \phi + i \psi$

*Écoulements irrotationnels incompressibles 2D dans un plan xOy: exemples*

a) *Puits/source*

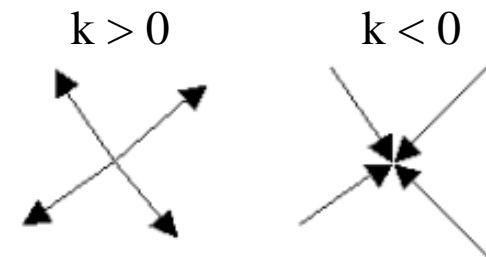
$$f(z) = \phi + i \psi = k \ln(z) \quad \text{où } z = x + i y = r e^{i\theta}, \quad r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z), \quad k = \text{constante}$$

$$df/dz = k/z = (k/r) (\cos\theta - i \sin\theta) = v_x - i v_y$$

$$\rightarrow v_x = (k/r) \cos\theta \text{ et } v_y = (k/r) \sin\theta \rightarrow \text{en polaires, } \boxed{v_r = k/r} \text{ (mouvement radial)}$$

$$f(z) = \phi + i \psi = k \ln(r) + i k \theta \rightarrow \phi = k \ln(r) \text{ et } \psi = k \theta$$

Lignes fluides:  $\theta = \text{constante}$  (droites issues du puits/source)



b) *Tourbillon*

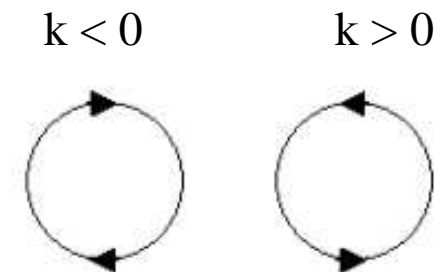
$$f(z) = \phi + i \psi = -i k \ln(z) \quad \text{où } z = x + i y = r e^{i\theta}, \quad r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z), \quad k = \text{constante}$$

$$df/dz = -i k/z = (k/r) (-\sin\theta - i \cos\theta) = v_x - i v_y$$

$$\rightarrow v_x = - (k/r) \sin\theta \text{ et } v_y = (k/r) \cos\theta \text{ et en polaires, } \boxed{v_\theta = k/r} \text{ (mouvement orthoradial)}$$

$$f(z) = \phi + i \psi = k \theta - i k \ln(r) \rightarrow \phi = k \theta \text{ et } \psi = -k \ln(r)$$

Lignes fluides:  $r = \text{constante}$  (cercles)





## Analogie cinématique/magnétostatique

### Théorème « d'Ampère » de la cinématique des fluides

soit un écoulement tourbillonnaire tel que  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 2 \mathbf{\Omega}$

$\mathbf{\Omega}$  porte le nom de « vecteur tourbillon » (vitesse angulaire en rd/s)

Alors  $\iint \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS} = \oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{dl} = 2 \iint \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{dS}$  est l'équivalent du théorème d'Ampère

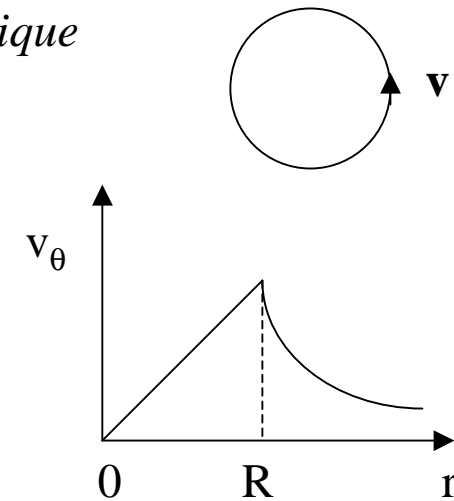
La circulation du champ des vitesses sur un contour fermé est égale au double du flux du vecteur tourbillon à travers toute surface enlacée par ce contour.

Application: le tourbillon de Rankine de rayon  $R$  à symétrie cylindrique

L'écoulement est orthoradial  $\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta$

$$r < R, \mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z \\ \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{dl} = v_\theta 2 \pi r = 2 \iint \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{dS} = 2 \Omega \pi r^2 \rightarrow v_\theta = \Omega r$$

$$r > R, \mathbf{\Omega} = \mathbf{0} \\ \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{dl} = v_\theta 2 \pi r = 2 \iint \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{dS} = 2 \Omega \pi R^2 \rightarrow v_\theta = \Omega R^2/r$$



## Analogie cinématique/électrostatique

### Théorème « de Gauss » de la cinématique des fluides incompressibles

$\text{div}(\mathbf{v}) = s/\rho$  avec  $s$  source ( $s > 0$ ) ou puits ( $s < 0$ ) de matière en  $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$

Alors  $\iiint \text{div}(\mathbf{v}) \, dv = \boxed{\oiint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint s/\rho \, dv}$  est l'équivalent du théorème de Gauss

Le flux du champ des vitesses sur une surface fermée est égal au taux de création/perte de masse intérieur au volume délimité par cette surface et divisé par  $\rho$ .

Application: source ou puits de rayon  $R$  en symétrie sphérique

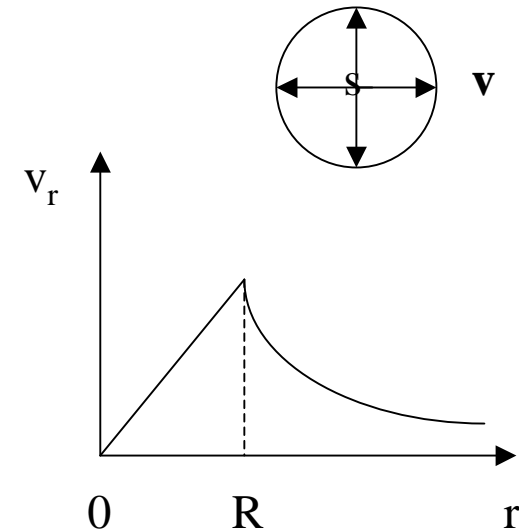
L'écoulement est radial  $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r$

$r < R$ , puits ou source  $s \neq 0$

$$\oiint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = v_r 4\pi r^2 = \iiint s/\rho \, dv = (s/\rho) 4/3 \pi r^3$$
$$\rightarrow v_r = (s/\rho) (r/3)$$

$r > R$ ,  $s = 0$

$$\oiint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = v_r 4\pi r^2 = \iiint s/\rho \, dv = (s/\rho) 4/3 \pi R^3$$
$$\rightarrow v_r = (s/\rho) (R^3/3r^2)$$



#### 4 – Equilibre hydrostatique

Equilibre entre les forces de pression et la force de gravité  $\boxed{\text{grad } P = \rho \mathbf{g}}$

où  $P$  désigne la pression (Pa),  $\rho \mathbf{g}$  la force de pesanteur par unité de volume ( $\text{N m}^{-3}$ ),  $\rho$  étant la masse volumique ( $\text{kg m}^{-3}$ ) et  $\mathbf{g}$  l'accélération de la pesanteur ( $\text{m s}^{-2}$ )

- cas d'un fluide incompressible avec  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$  ( $g$  constante)

$$dP/dz = -\rho g \rightarrow \boxed{P(z) = P_0 (1 - z/H)} \text{ avec } \boxed{H = P_0/(\rho g)} \text{ échelle de hauteur (m)}$$

- cas d'un fluide incompressible dans un corps sphérique homogène de rayon  $R$

Théorème de Gauss du champ de gravitation:

$$g 4 \pi r^2 = -4 \pi K (4/3 \pi r^3 \rho) \rightarrow \mathbf{g} = - (4/3 \pi K) \rho r \mathbf{e}_r$$

$$\boxed{\iint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4 \pi K M_{\text{intérieure}}}$$

$$dP/dr = - (4/3 \pi K) \rho^2 r \rightarrow \boxed{P(r) = (2/3 \pi K) \rho^2 (R^2 - r^2)} \text{ si } P(R) = 0 \rightarrow \boxed{P_{\text{centrale}} = (2/3 \pi K) \rho^2 R^2}$$

exemple: Terre,  $\rho = 5500 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $R = 6400 \text{ km}$ ,  $P_{\text{centrale}} = 1.7 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

- cas d'un fluide compressible suivant la loi de Mariotte  $P/\rho = P_0/\rho_0 = \text{constante}$  avec  $g = \text{cte}$

$$dP/dz = -P (g \rho_0/P_0) \rightarrow \boxed{P(z) = P_0 e^{-z/H}} \text{ où } \boxed{H = P_0/(\rho_0 g)} \text{ échelle de hauteur (m)}$$

exemple: atmosphère terrestre:  $H = 8 \text{ km}$ , photosphère solaire  $H = 300 \text{ km}$

Cas d'un fluide incompressible en rotation autour de l'axe  $Oz$

Equilibre entre les forces de pression, gravité et force d'inertie d'entraînement

$$\mathbf{grad} P = \rho \mathbf{g} + \rho \Omega^2 \mathbf{HM}$$

théorème de Gauss du champ de gravitation (page précédente):

$$\rightarrow \mathbf{g} = - (4/3 \pi K) \rho r \mathbf{e}_r = - (4/3 \pi K) \rho \mathbf{OM}$$

$$\mathbf{OM} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z = \mathbf{grad}(x^2 + y^2 + z^2)/2$$

$$\rightarrow \mathbf{g} = - (2/3 \pi K) \rho \mathbf{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$$

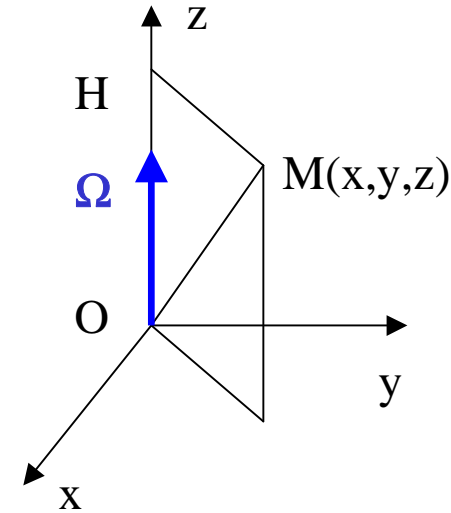
$$\mathbf{HM} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y = \mathbf{grad}(x^2 + y^2)/2$$

$$\rightarrow \mathbf{grad} P = - (2/3 \pi K) \rho^2 \mathbf{grad}(x^2 + y^2 + z^2) + \rho \Omega^2 \mathbf{grad}(x^2 + y^2)/2$$

$$\rightarrow P = - (2/3 \pi K) \rho^2 (x^2 + y^2 + z^2) + \rho \Omega^2 (x^2 + y^2)/2 + \text{constante}$$

$$P(x,y,z) = - (2/3 \pi K \rho^2 - \rho \Omega^2/2) (x^2 + y^2) - (2/3 \pi K) \rho^2 z^2 + \text{cte} \quad \text{où } \rho \Omega^2/2 \ll 2/3 \pi K \rho^2$$

$P = 0$  (en surface) donne l'équation d'un ellipsoïde de révolution autour de  $Oz$  ou « géoïde »





5 - Equation d'Euler ou PFD appliqué au mouvement fluide

$$\rho \, d\mathbf{v}/dt = - \mathbf{grad} P + \mathbf{f}$$

où  $\mathbf{f}$  désigne les forces par unité de volume autres que les forces dues à la pression P (en Pa).

$d\mathbf{v}/dt$  s'appelle dérivée particulaire de la vitesse.

La vitesse du fluide en un point M(x,y,z) dépend de x, y, z et t (description eulérienne).

$$d\mathbf{v} = \partial\mathbf{v}/\partial x \, dx + \partial\mathbf{v}/\partial y \, dy + \partial\mathbf{v}/\partial z \, dz + \partial\mathbf{v}/\partial t \, dt \rightarrow$$

$$d\mathbf{v}/dt = \mathbf{v}.\mathbf{grad}(\mathbf{v}) + \partial\mathbf{v}/\partial t$$

→ Accélération locale

$$\partial\mathbf{v}/\partial t$$

et accélération convective

$$\mathbf{v}.\mathbf{grad}(\mathbf{v})$$

(m s<sup>-2</sup>)

$$\rho [ \partial\mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v}.\mathbf{grad}(\mathbf{v}) ] = - \mathbf{grad} P + \mathbf{f}$$

(équation d'Euler,  $\mathbf{f}$  en N m<sup>-3</sup>)

$\mathbf{f}$  est la force volumique (N m<sup>-3</sup>):

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} + \nu \rho \Delta \mathbf{v}$$

poids  
force magnétique  
viscosité

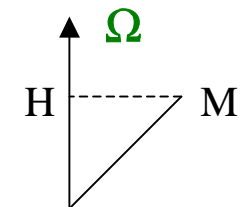
$$\dots + \dots \quad ( - 2 \rho \Omega \wedge \mathbf{v} \quad + \quad \rho \Omega^2 \mathbf{HM} )$$

forces d'inertie dans un référentiel en rotation

Coriolis

centrifuge d'entraînement

H projection sur axe rotation



$\rho \mathbf{g}$  poids volumique ( $\mathbf{g}$  accélération de la pesanteur)

$\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$  force de Laplace volumique

$\mathbf{j}$  densité de courant ( $\text{A m}^{-2}$ ) reliée à l'intensité  $I$  (A) par  $I = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  (flux de la densité  $\mathbf{j}$ ).

$\nu \rho \Delta \mathbf{v} = \mu \Delta \mathbf{v}$  force de frottement visqueuse par unité de volume; l'équation d'Euler porte alors le nom d'équation de Navier Stokes;

$\Delta \mathbf{v}$  est le Laplacien du vecteur vitesse;  $\mu$  est la viscosité dynamique en Poiseuille (Pa s)

$\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique en  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .

Pour l'atmosphère solaire:

$\mu = \nu \rho = 2.2 \cdot 10^{-17} T^{5/2} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  (Poiseuille), où  $T$  est la température Kelvin

- dans la photosphère solaire,  $T = 10^4 \text{ K}$  et  $\rho = 10^{-7} \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\mu = 10^{-7}$  Poiseuille et  $\nu = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

- dans la couronne solaire,  $T = 10^6 \text{ K}$  et  $\rho = 10^{-12} \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\mu = 10^{-2}$  Poiseuille et  $\nu = 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

*Echelle de temps dynamique et échelle de temps diffusive (visqueuse)*

En l'absence de forces autres que visqueuses, l'équation du mouvement s'écrit:

$$\rho [ \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) ] = \nu \rho \Delta \mathbf{v}$$

équation de Navier Stokes

la partie diffusive  $\partial \mathbf{v} / \partial t = \nu \Delta \mathbf{v}$  possède une constante de temps: temps diffusif

$$\tau_{\text{diff}} = L^2 / \nu$$

Avec L dimension caractéristique; la partie convective  $\partial \mathbf{v} / \partial t = - \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v})$  possède une constante de temps: temps dynamique

$$\tau = L / v$$

Leur rapport est appelé nombre de Reynolds

$$R_e = \tau_{\text{diff}} / \tau = L v / \nu$$

$R_e$  représente le rapport entre la force convective  $\| \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) \|$  et visqueuse  $\| \rho \nu \Delta \mathbf{v} \|$ .

$$R_e \gg 1 \text{ écoulement turbulent} / R_e \ll 1 \text{ écoulement laminaire}$$

→ turbulent: tourbillons à petites échelles / laminaire: écoulement plan parallèle

Dans la photosphère solaire,  $T = 10^4 \text{ K}$ ,  $L = 10^4 \text{ km}$ ,  $v = 1 \text{ km/s}$ ,  $\nu = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $R_e \sim 10^{10}$ .

Les mouvements sont hautement turbulents (équation d'Euler non linéaire).

→ on néglige la viscosité sauf en présence de petites échelles dissipatives ( $R_e$  décroît avec L).

## Force d'inertie de Coriolis

La force d'inertie de Coriolis a une action dans un référentiel en rotation (étoile, planète). Si  $\Omega$  est la vitesse angulaire de rotation, la force de Coriolis est, par unité de volume:

$\mathbf{f} = - 2 \rho \Omega \wedge \mathbf{v}$  (en N m<sup>-3</sup>). Le temps caractéristique associé est:

$$\tau_c = 1/\Omega$$

on appelle nombre de Rossby le rapport :

$$R_o = \tau_c / \tau = v / (\Omega L) \quad (\text{avec } \tau = L/v \text{ temps dynamique})$$

$R_o$  représente le rapport entre la force convective  $\|\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v})\|$  et de Coriolis  $\|\rho \Omega \wedge \mathbf{v}\|$ .

- Dans la photosphère solaire,  $L = 10^4$  km,  $v = 1$  km/s,  $\Omega = 2.5 \cdot 10^{-6}$  rd s<sup>-1</sup> (26 jours),  $R_o = 100$ , la force de Coriolis est souvent négligée. Ce ne serait pas le cas d'une étoile en rotation rapide.
- Dans l'atmosphère terrestre,  $L = 10^3$  km,  $v = 10$  m/s,  $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5}$  rd s<sup>-1</sup>,  $R_o = 0.1$ : la force de Coriolis domine !

### *Applications:*

- a) La force d'inertie de Coriolis contribue à la déformation des centres actifs solaires.
- b) Dans l'atmosphère terrestre, la force d'inertie de Coriolis oriente les vents autour d'une dépression ou d'un anticyclone (selon hémisphère): c'est l'écoulement géostrophique.



## 6 - Mouvement d'un fluide incompressible en régime stationnaire

L'équation du mouvement stationnaire en présence de gravité dans un fluide mis en mouvement par les gradients de pression s'écrit:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}) = - \mathbf{grad} P + \rho \mathbf{g} \quad \text{où} \quad \mathbf{g} = - \mathbf{grad}(g z)$$

$$\text{Or } \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}) = \mathbf{grad}(v^2/2) - \mathbf{v} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{v})$$

$$\text{Donc } \mathbf{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho g z) - \rho \mathbf{v} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

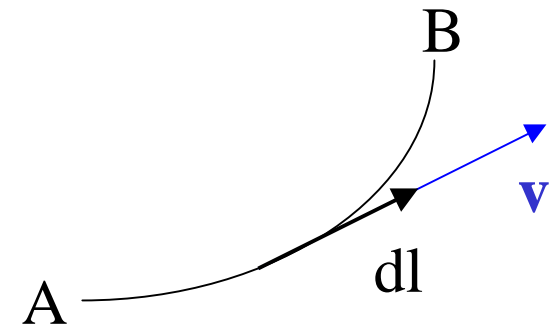
Prenons la circulation le long d'une ligne fluide de A à B:

$$\int_A^B \mathbf{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho g z) \cdot d\mathbf{l} - \int_A^B \rho [\mathbf{v} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{v})] \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Or le long d'une ligne fluide,  $\mathbf{v}$  et  $d\mathbf{l}$  sont colinéaires, donc  $\int_A^B \rho [\mathbf{v} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{v})] \cdot d\mathbf{l} = 0$

$$\text{il reste alors: } \int_A^B d(\rho v^2/2 + P + \rho g z) = 0$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z = \text{constante sur une ligne fluide} \quad \text{loi de Bernoulli}$$



Cas particulier de l'écoulement incompressible et irrotationnel tel que  $\text{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

$$\text{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho g z) - \rho \mathbf{v} \wedge \text{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{s'écrit} \quad \text{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho g z) = \mathbf{0}$$

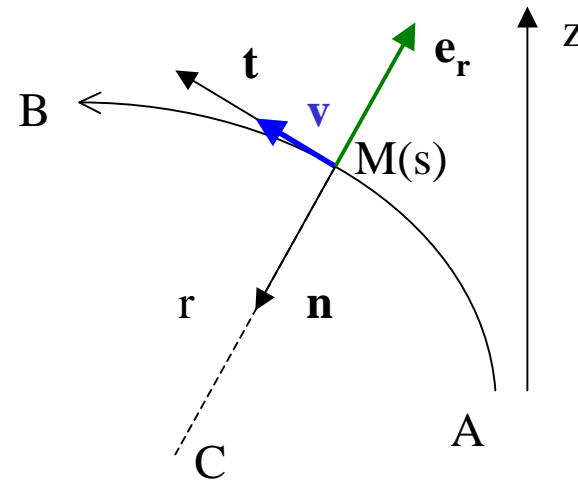
D'où  $\boxed{\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z = \text{constante uniforme pour toutes les lignes fluides}}$

7 - Equation compressible dans le repère de Frénet

Dans un système de coordonnées curvilignes (repère de Frénet local  $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ ) où  $\mathbf{v} = v \mathbf{t}$  :

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) = v \, d(v \mathbf{t})/ds = d(v^2/2)/ds \mathbf{t} + v^2 \mathbf{n}/r$$

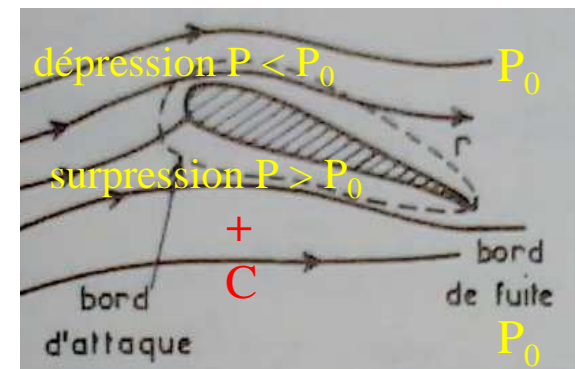
Selon  $\mathbf{t}$  :  $\rho \, d(v^2/2)/ds = - \, dP/ds - \rho \, g \, dz/ds$   
 Selon  $\mathbf{e}_r = - \mathbf{n}$  :  $-\rho \, v^2/r = - \, dP/dr - \rho \, g \, dz/dr$



s est l'abscisse curviligne de M le long de la ligne fluide AB et r = CM est le rayon de courbure en M, C étant le centre de courbure.

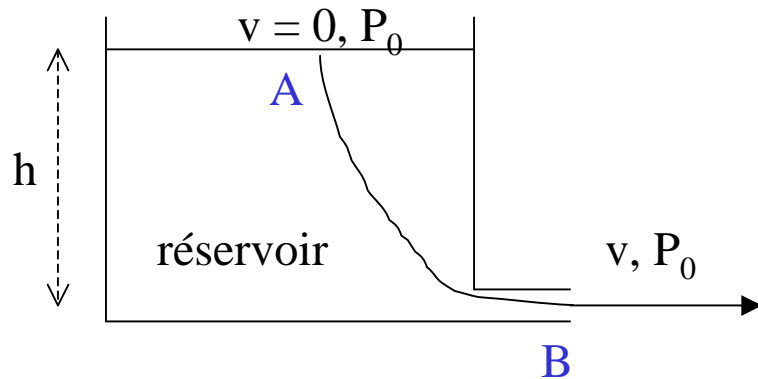
En l'absence de gravité,  $dP/dr = \rho \, v^2/r > 0$  effet Coanda

Autour d'un obstacle, la pression augmente en s'éloignant de C



## 8 - Loi de Bernoulli incompressible: quelques applications simples

### a) Vidange d'un réservoir



$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z = \text{constante entre A et B}$$

Section du tube de vidange négligeable

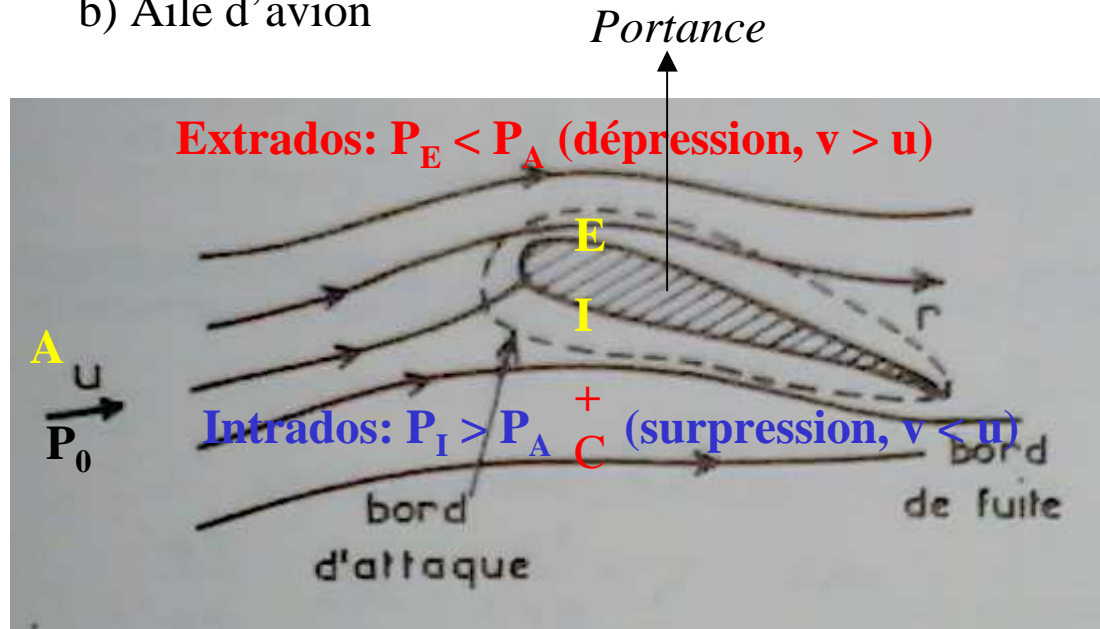
$$P_0 + \rho g h = \frac{1}{2} \rho v^2 + P_0$$

$$v = (2gh)^{1/2}$$

Loi de Torricelli

*Exemple: barrage  $h=100$  m,  $v = 45$  m/s = 160 km/h*

### b) Aile d'avion



$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P = \frac{1}{2} \rho u^2 + P_A$$

entre E et A ou entre I et A

Effet Coanda en E (extrados) ou en I (intrados)

$$\rightarrow P_E < P_A \text{ et } P_I > P_A$$

(avec  $P_A$  pression ambiante)

extrados,  $v > u$ ; intrados,  $v < u$

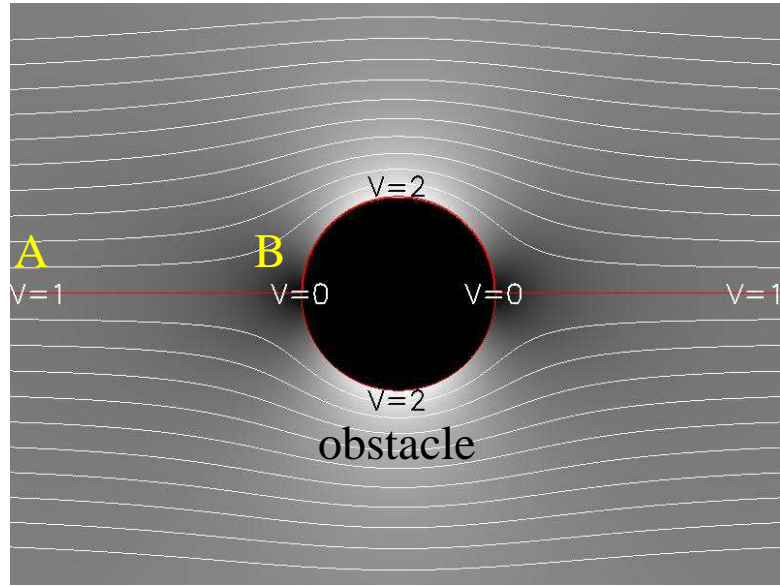
$\rightarrow$  FORCE DE PORTANCE

$$(P_I - P_E) S, S \text{ surface de l'aile}$$

*Exemple: aile avion,  $\Delta P=0.1$  bar,*

$$S=100 \text{ m}^2, F = \Delta P S = 10^6 \text{ N}$$

c) Pression d'arrêt sur un obstacle et sonde de Pitot



$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + P_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + P_B \text{ entre A et B}$$

Au point B,  $v_B = 0$

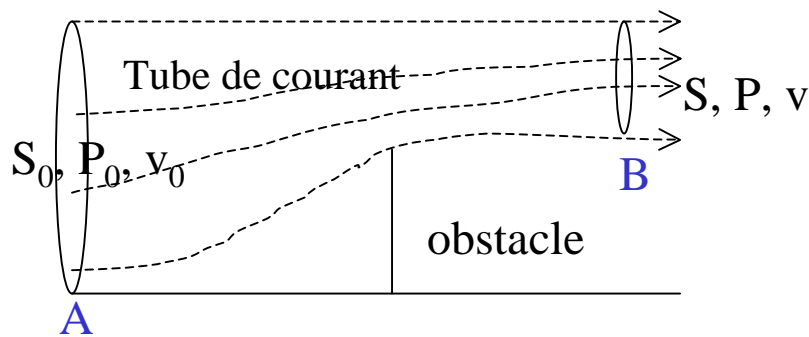
$$\rightarrow P_B = \frac{1}{2} \rho v_A^2 + P_A \text{ pression d'arrêt} > P_A$$

$$\rightarrow v_A = [2 (P_B - P_A) / \rho]^{1/2}$$

Application: la mesure de la surpression  $P_B - P_A$  fournit la vitesse  $v_A$  d'un avion en vol (sonde/tube de Pitot)

Exemple:  $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\Delta P = 0.1 \text{ bar}$ ,  $v_A = 500 \text{ km/h}$

d) Effet Venturi (col, obstacle)



Conservation du débit:

$$S_0 v_0 = S v, \quad S_0 > S \rightarrow v > v_0$$

$$\frac{1}{2} \rho v_0^2 + P_0 = \frac{1}{2} \rho v^2 + P \text{ entre A et B}$$

$P = P_0 - \frac{1}{2} \rho (v^2 - v_0^2) < P_0$   
dépression en B: effet Venturi

Exemples: passage d'un col, arrachement des toitures lors de tempêtes

e) Tourbillon de Rankine incompressible à vitesse angulaire  $\omega$  constante (facultatif)

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , gravité  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ , écoulement orthoradial du type:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}) = 2 \omega \mathbf{e}_z \quad \text{où } \mathbf{v} = v(r) \mathbf{e}_\theta$$

Deux cas: pour  $0 < r < R$ ,  $\omega = \omega_0 = \text{constante}$  et pour  $r > R$ ,  $\omega = 0$

- champ des vitesses (fonction de  $r$ ) par le théorème d'Ampère de la mécanique des fluides (basé sur le théorème de Stokes):

$\iint \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2 \iint \omega dS = 2 \omega S$  où  $S$  est la surface enlacée par un contour fermé de rayon  $r$  quelconque

$$\underline{r < R} : v 2\pi r = 2 \omega_0 \pi r^2 \Rightarrow v(r) = \omega_0 r$$

$$\underline{r > R} : v 2\pi r = 2 \omega_0 \pi R^2 \Rightarrow v(r) = \omega_0 R^2/r$$

dans ce dernier cas, la densité volumique de moment cinétique  $[\rho v r]$  est constante et il existe un potentiel des vitesses  $\Phi(\theta) = \omega_0 R^2 \theta$ ; l'écoulement est irrotationnel.

- champ de pression par l'équation d'Euler:

$$\mathbf{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho g z) - \rho \mathbf{v} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{où } \mathbf{v} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = v(r) \mathbf{e}_\theta \wedge 2 \omega \mathbf{e}_z = 2 \omega v(r) \mathbf{e}_r$$

Soit sur  $\mathbf{e}_r$ :

$$d(\rho v^2/2 + P + \rho g z)/dr = 2 \rho \omega v(r)$$

$$\underline{r < R} : \omega = \omega_0 ; v = \omega_0 r \Rightarrow d(\rho \omega_0^2 r^2 / 2 + P + \rho g z) / dr = 2 \rho \omega_0^2 r$$

$$\Rightarrow \rho \omega_0^2 r^2 / 2 + P + \rho g z = \rho \omega_0^2 r^2 + cte \Rightarrow \boxed{P + \rho g z - 1/2 \rho \omega_0^2 r^2 = P_0} \quad (P_0 \text{ constante})$$

$$\underline{r > R} : \omega = 0 ; v = \omega_0 R^2 / r \Rightarrow P + \rho g z + 1/2 \rho \omega_0^2 R^4 / r^2 = cte$$

$$\text{Les deux équations se raccordent en } r = R, \text{ d'où } \boxed{P + \rho g z + \rho \omega_0^2 R^2 (R^2 / 2r^2 - 1) = P_0}$$

- surface libre:  $P(r, z) = \text{constante}$

$$\underline{r < R} : \rho g z - 1/2 \rho \omega_0^2 r^2 = cte \Rightarrow \boxed{z = 1/2 (\omega_0^2 / g) r^2 + z_0} \quad (z_0 \text{ constante}): \text{parabole}$$

$$\underline{r > R} : \rho g z + 1/2 \rho \omega_0^2 R^4 / r^2 = cte \Rightarrow z = - 1/2 (\omega_0^2 / g) R^4 / r^2 + cte$$

$$\text{Les deux équations se raccordent en } r = R, \text{ d'où } \boxed{z = (\omega_0^2 R^2 / g) (1 - R^2 / 2r^2) + z_0}$$

Lorsque  $r \rightarrow \infty, z \rightarrow (\omega_0^2 R^2 / g) + z_0$ : il se forme une dépression de profondeur  $\boxed{h = \omega_0^2 R^2 / g}$

- gradient radial de pression

$$\underline{r < R} : dP/dr = \rho \omega_0^2 r = \rho v^2 / r > 0 \text{ dirigé vers l'extérieur (effet Coanda)}$$

$$\underline{r > R} : dP/dr = \rho \omega_0^2 R^4 / r^3 = \rho v^2 / r > 0 \text{ dirigé vers l'extérieur (effet Coanda)}$$

- cas limite  $R \rightarrow 0, \text{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow v(r) = C / r$  pour tout  $r$  ( $C$  moment cinétique constant)

$$\rho v^2 / 2 + P + \rho g z = cte$$

$$dP/dr = \rho C^2 / r^3 = \rho v^2 / r > 0 \text{ dirigé vers l'extérieur (effet Coanda)}$$

donne pour la surface libre  $z = z_\infty - C^2 / 2gr^2$  (la dépression est de profondeur infinie)

- Cas où  $z = 0$

$$\underline{r < R} : \omega = \omega_0 ; P = P_0 + 1/2 \rho \omega_0^2 r^2 > P_0 \text{ (avec } P_0 \text{ pression en } z = 0 \text{ et } r = 0)$$

$$\underline{r > R} : \omega = 0 ; P = P_0 + \rho \omega_0^2 R^2 (1 - R^2/2r^2) > P_0$$

lorsque  $r \rightarrow \infty$ ,  $P \rightarrow P_\infty = P_0 + \rho \omega_0^2 R^2$  (par exemple, c'est la pression atmosphérique)

$$\underline{r < R} : \omega = \omega_0 ; P = P_\infty + \rho \omega_0^2 R^2 (r^2/2R^2 - 1) < P_\infty$$

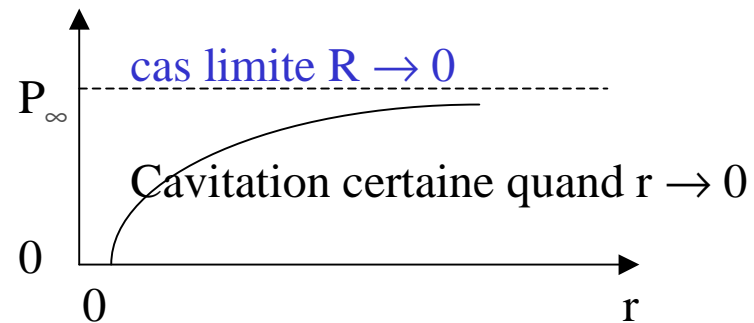
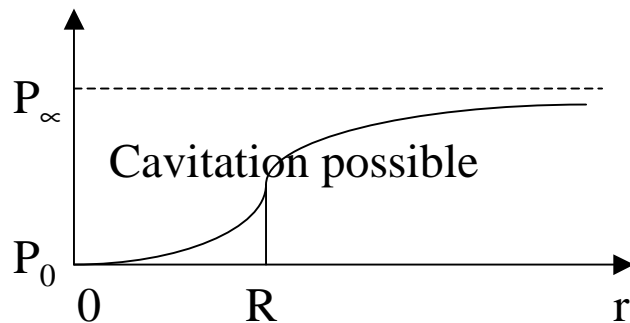
$$\underline{r > R} : \omega = 0 ; P = P_\infty - \rho \omega_0^2 R^4/2r^2 < P_\infty$$

La dépression maximale est ainsi égale à  $\Delta P = P_\infty - P_0 = \rho \omega_0^2 R^2$

Un phénomène de cavitation ( $P = 0$ ) survient si  $P_0 = P_\infty - \rho \omega_0^2 R^2 < 0$  soit si  $\omega_0 > (P_\infty/\rho R^2)^{1/2}$

La force verticale, vers le haut, exercée au centre du vortex de rayon  $R$  (surface  $\pi R^2$ ) vaut:

$$F = \int_0^R (P_\infty - P) 2\pi r dr = \int_0^R \rho \omega_0^2 R^2 (1 - r^2/2R^2) 2\pi r dr = \frac{3}{4} \Delta P \pi R^2$$





## 9 - Mécanisme de vidange/siphon des tuyaux magnétiques solaires

$$\rho v dv/ds = - dP/ds - \rho g dz/ds \quad (\text{éq. d'Euler selon } t)$$

→ Si on néglige la pression, alors  $v^2/2 + gz = \text{constante}$ ,

Vidange des « post flare loops » des éruptions solaires

gravité → mise en mouvement (vidange) →

→ Lorsque  $\rho v = \text{constante}$  (écoulement compressible à section  $S$  constante),

$$d(P + \rho v^2)/ds = - \rho g dz/ds$$

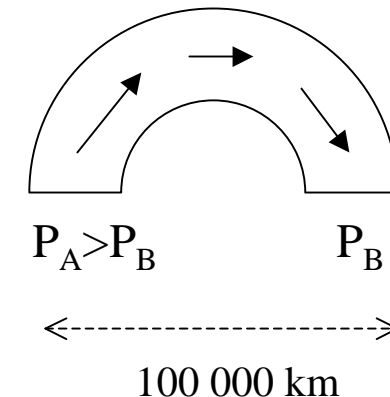
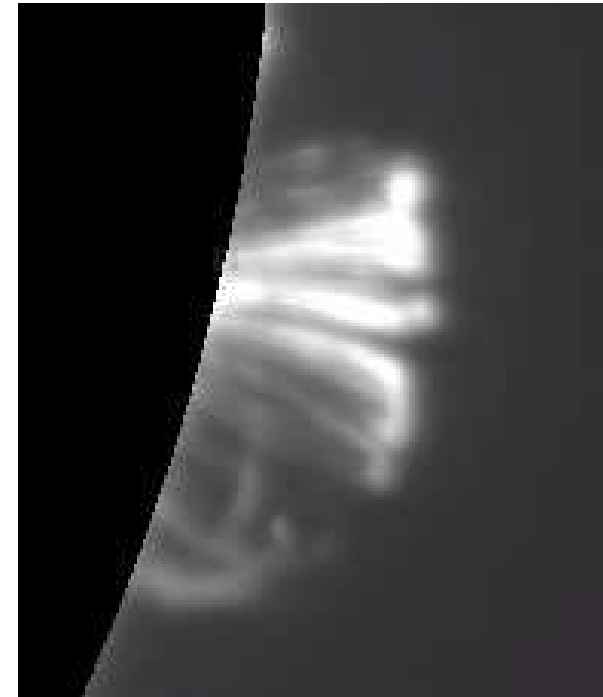
Si on néglige la gravité, alors  $P + \rho v^2 = \text{constante}$ ,

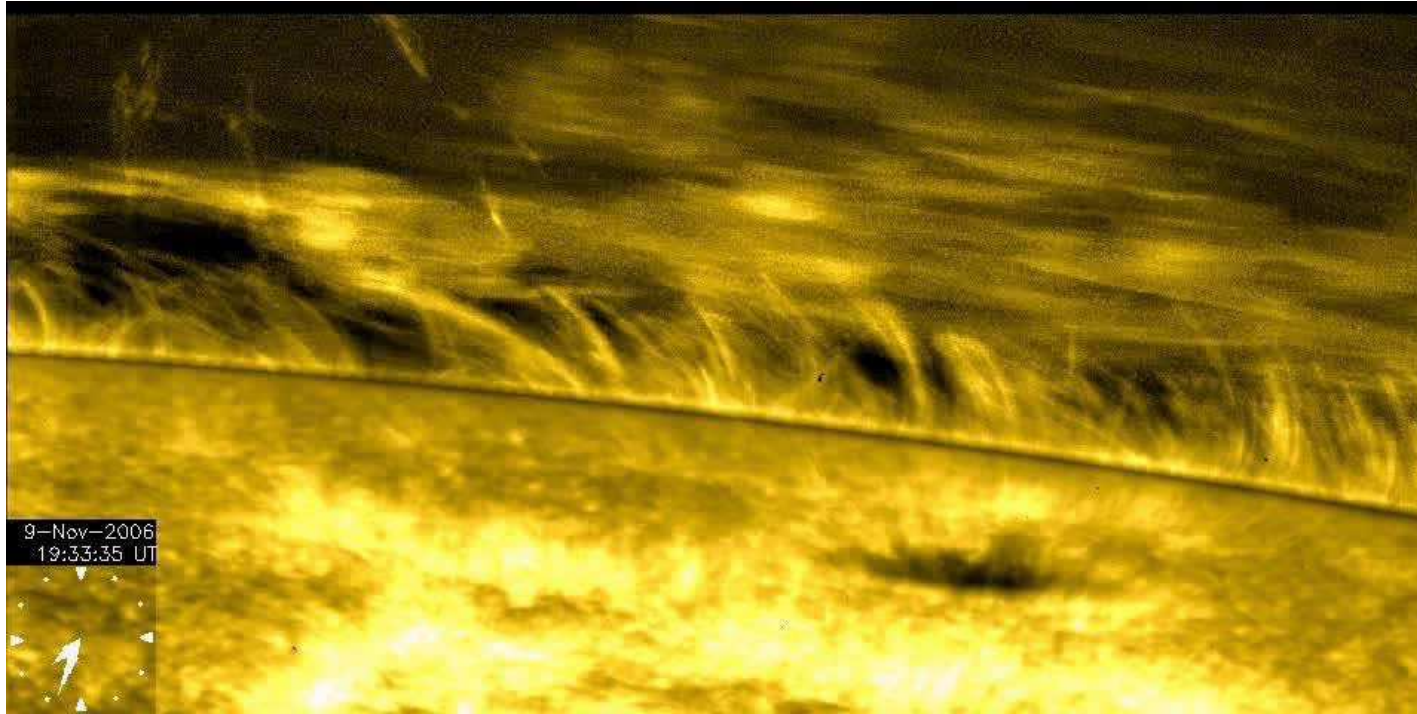
$$\text{Soit } P_A + \rho_A v_A^2 = P_B + \rho_B v_B^2 = P_B + \rho_A v_A v_B$$

$$v_B = v_A + (P_A - P_B)/(D/S) > v_A \text{ si } P_A > P_B$$

$$\text{où } D = S \rho_A v_A = S \rho_B v_B \text{ débit massique}$$

Surpression → mise en mouvement (siphon) →





*Observations  
satellite Hinode*

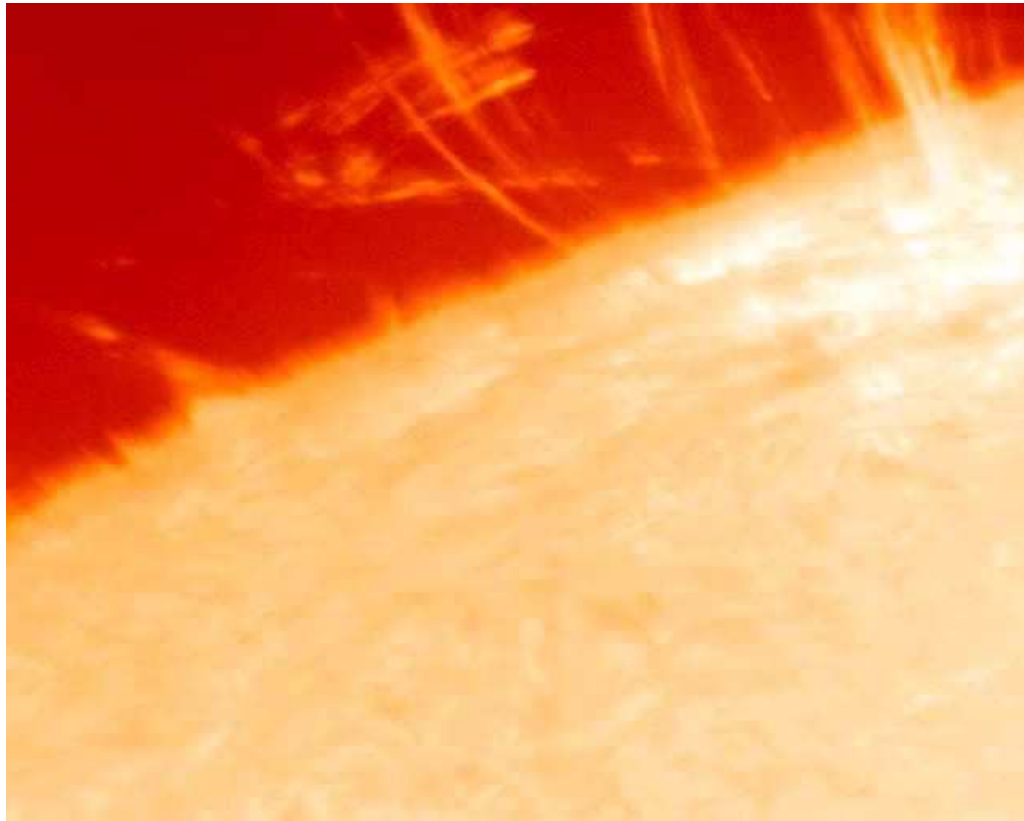
JAXA/NASA

Instrument  
SOT/BFI

Filtre CaII H  
396 nm, bande  
passante 0.3 nm

Exemples d'écoulements lents subsoniques (quelques km/s) de matière gazeuse à  $T=10000$  K de type Bernoulli (siphon) dans les « tuyaux magnétiques » des protubérances solaires (hauteur typique 50 000 à 100 000 km) et des spicules (jets par surpression juste au dessus du limbe de hauteur 20000 km)

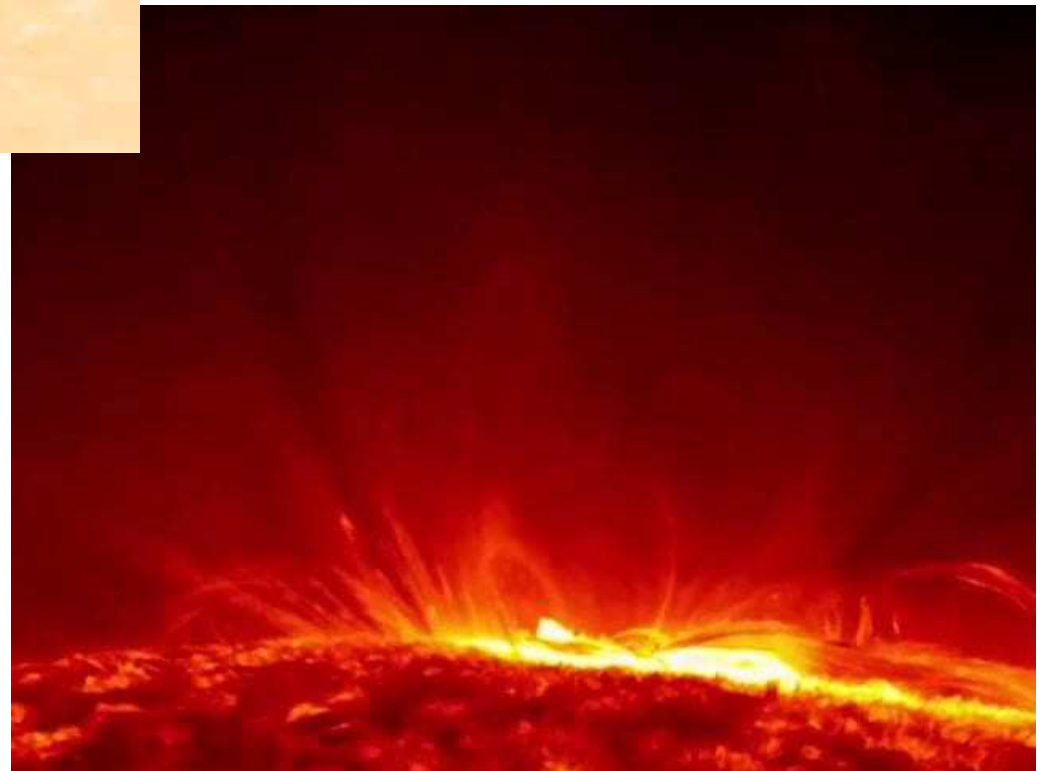




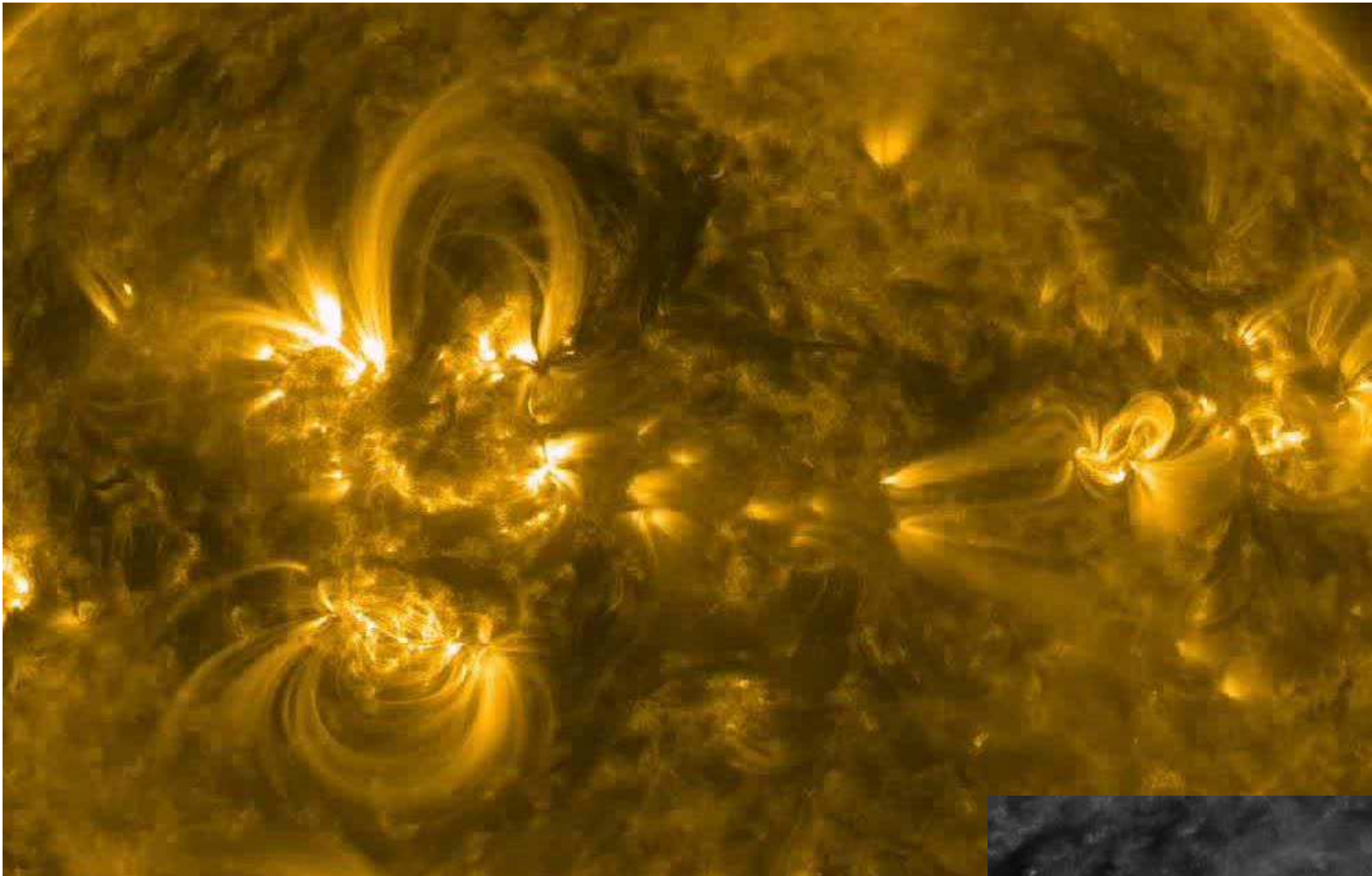
Exemples de mouvements de type « Bernoulli » le long de « tuyaux magnétiques » dans l'atmosphère solaire, survenant régulièrement à la suite d'une instabilité éruptive

← Mécanismes de siphon ou de vidange gravitationnel ( $H\alpha$ , SVST-La Palma) dans des boucles post éruptives (« post flare loops »)

Mécanisme de vidange gravitationnel (boucles post éruptives, satellite Solar Dynamics Observatory, NASA, raie UV Hélium ionisé à 30.4 nm); la matière froide condensée dans les « tuyaux magnétiques » se vide au fur et à mesure que ceux ci s'élèvent →







Evolution de boucles magnétiques solaires pendant  
3 journées consécutives ( $T = 10^6$  K)

Satellite SDO NASA, AIA, fer IX ionisé à 17.1 nm

Détail, mécanisme de siphon dans les boucles →



## 10 - Equation d'état du gaz

La pression cinétique  $P$  due aux collisions dans un gaz à la température  $T$  comprenant  $N$  particules par unité de volume est donnée par la loi des gaz parfaits:

$$P = N k T = n R T / V$$

$P$  pression (Pa)

$N$  densité volumique de particules ( $\text{m}^{-3}$ )

$T$  température (Kelvin)

$V$  volume du gaz ( $\text{m}^3$ )

$R$  constante des gaz parfaits ( $R = 8.32 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1}$ )

$k = R/N$  constante de Boltzman =  $1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  ( $N$  nombre d'Avogadro  $6.02 \cdot 10^{23}$ )

$n = NV/N$  nombre de moles de particules (1 mole =  $N$  particules)

Pour une masse  $m$  de gaz de masse molaire  $M$  (kg) et de masse volumique  $\rho = m/V$  ( $\text{kg m}^{-3}$ ),

$$\text{On a } n = m/M = \rho V/M \rightarrow P = \rho R T / M$$

Pour un plasma neutre d'hydrogène ionisé (protons + électrons),  $P = \underline{2} \rho R T / M$

$\rho$ ,  $M$  = masse volumique, masse molaire de l'hydrogène ( $N_{\text{total}} = \underline{2} N_{\text{hydrogène}}$ )

## 11 - Milieu isentropique (adiabatique réversible)

Lorsqu'il n'y a pas d'échange de chaleur,

$$P / \rho^\gamma = \text{constante}$$

loi de Laplace

$\gamma$  est l'exposant adiabatique ( $\gamma = C_p/C_v = 5/3$  pour un gaz monoatomique, rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants,  $7/5$  pour un gaz diatomique).

### Variations autour de la loi de Bernoulli pour un milieu compressible

$$\rho d(v^2/2)/ds = - dP/ds - \rho d(g z)/ds$$

s'intègre en milieu isentropique  $P / \rho^\gamma = P_0 / \rho_0^\gamma = \text{constante}$  et donne

$$\frac{1}{2} v^2 + [\gamma / (\gamma - 1)] (P_0/\rho_0) (\rho/\rho_0)^{\gamma-1} + g z = \text{constante} \quad \text{avec } \gamma > 1$$

Ou encore  $\frac{1}{2} v^2 + h + g z = \text{constante}$  où  $h$  est l'enthalpie massique du gaz parfait ( $\text{J kg}^{-1}$ ).

Remarque: en milieu isotherme  $P / \rho = P_0 / \rho_0 = \text{constante}$ ; on obtient:

$$\frac{1}{2} v^2 + (P_0/\rho_0) \ln(\rho/\rho_0) + g z = \text{constante} \quad \text{loi de Navier}$$

## 12 - La loi de conservation de l'énergie

Elle résulte du premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U = W + Q \quad (\text{en Joules})$$

où  $W$  désigne le travail des forces extérieures, dont la pression, et  $Q$  les échanges de chaleur comptés positivement si reçus par le système thermodynamique.  
(rappel:  $dU = \delta W + \delta Q$  où  $\delta W = -P dV$  pour le travail des forces de pression  $P$  lors d'une transformation quasi statique;  $dV =$  variation de volume élémentaire)

Appelons:

$U$  l'énergie interne par unité de volume ( $J m^{-3}$ )

et

$H = U + P$  l'enthalpie par unité de volume ( $J m^{-3}$ ),

on montre que l'équation de conservation s'écrit par unité de temps:

$$\partial(U + \frac{1}{2} \rho v^2)/\partial t + \text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v}] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho \delta q/dt \quad (W m^{-3})$$

$\mathbf{f}$  désigne les forces volumiques autres que de pression et  $\delta q/dt$  la chaleur échangée par unité de masse et de temps ( $J kg^{-1} s^{-1}$ ).  $\mathbf{v}$  est la vitesse du fluide,  $\rho$  sa masse volumique.



$$\rho \delta q/dt = -\rho^2 R(T) - \text{div } \mathbf{F} + \text{autres termes...} \quad (\text{W m}^{-3})$$

1)  $\rho^2 R(T)$  est le taux de pertes par rayonnement (la fonction  $R(T)$  est expérimentale, elle présente un maximum autour de  $10^5$  K et décroît en  $1/T$  à haute température).

2) - div F est le taux de conduction thermique de la chaleur:

le flux de chaleur  $\mathbf{F}$  est donné par la loi de Fourier:  $\mathbf{F} = -k_{//} \text{grad}T$  (W/m<sup>2</sup>)

$k_{//}$  conductivité thermique du milieu (pour le soleil,  $k_{//} = k_0 T^{5/2} = 10^{-11} T^{5/2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ )

Si  $k_{//} = \text{constante}$ , au repos ( $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ),  $U = \rho C T \rightarrow$  équation de la chaleur  $\rho C \partial T/\partial t = k_{//} \Delta T$   
(C chaleur massique en  $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ )

*Equation de conservation de l'énergie en présence de forces de pesanteur*

Si  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$  avec  $\mathbf{g} = -\text{grad } \phi$ ,  $\phi = g z$  potentiel de pesanteur local, on montre que:

$$\partial(U + \rho \phi + \frac{1}{2} \rho v^2)/\partial t + \text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi) \mathbf{v}] = \rho \delta q/dt \quad (\text{W m}^{-3})$$

En régime stationnaire, l'équation de conservation se résume à:

$$\text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi) \mathbf{v}] = \rho \delta q/dt \quad (\text{W m}^{-3})$$

13 - Formulation de l'énergie interne  $U$  et de l'enthalpie  $H$  par unité de volume et de masse:

- pour un liquide:  $U = H = \rho C T$  ( $C$  chaleur massique en  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )

-pour un gaz parfait:  $U = (\rho/M) C_v T$  et  $H = U + P = (\rho/M) C_p T$  ( $\text{J m}^{-3}$ ) **lois de Joule**

$M$  est la masse molaire du gaz ;  $C_p$  et  $C_v$  sont les capacités calorifiques molaires à pression et volume constant ( $\text{J mole}^{-1} \text{K}^{-1}$ ).

Avec  $\gamma = C_p/C_v$  (exposant adiabatique) et  $C_p - C_v = R$  (constante des gaz parfaits),

$$\boxed{C_v = R/(\gamma - 1) \text{ et } C_p = R \gamma /(\gamma - 1)} \quad (\text{J mole}^{-1} \text{K}^{-1}).$$

$U$  et  $H$  par unité de volume (unité  $\text{J m}^{-3}$ ) s'écrivent pour le gaz parfait:

$$\boxed{U = (\rho/M) RT / (\gamma - 1) = P / (\gamma - 1) \quad \text{et} \quad H = (\rho/M) RT \gamma / (\gamma - 1) = P \gamma / (\gamma - 1)} \quad (\text{J m}^{-3})$$

Pour un gaz monoatomique,  $\gamma = 5/3$  entraîne  $U = 3/2 (\rho/M) RT$  et  $H = 5/2 (\rho/M) RT$

et par unité de masse,  $u = U / \rho$  et  $h = H / \rho$  (unité  $\text{J kg}^{-1}$ ):

$$\boxed{u = [1 / (\gamma - 1)] RT/M = (P/\rho) / (\gamma - 1) \text{ et } h = [\gamma / (\gamma - 1)] RT/M = (P/\rho) \gamma / (\gamma - 1)} \quad (\text{J kg}^{-1})$$

## II – Ecoulement en régime stationnaire dans un tube de courant de section $S$ variable

### 1 – Ecoulement sans champ magnétique

Un tube de courant est tel que ses parois latérales sont des lignes du champ des vitesses  $\mathbf{v}$ .

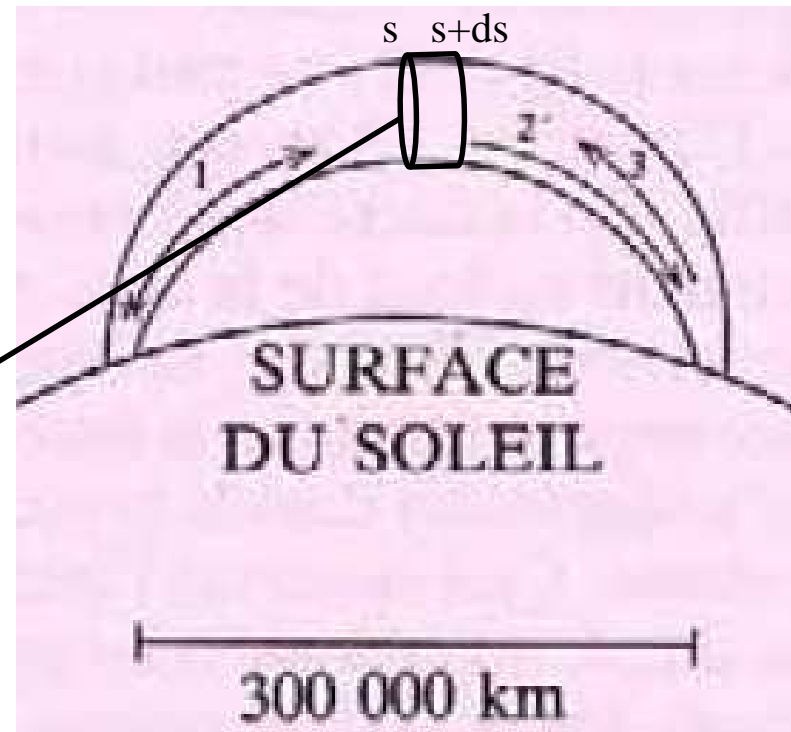
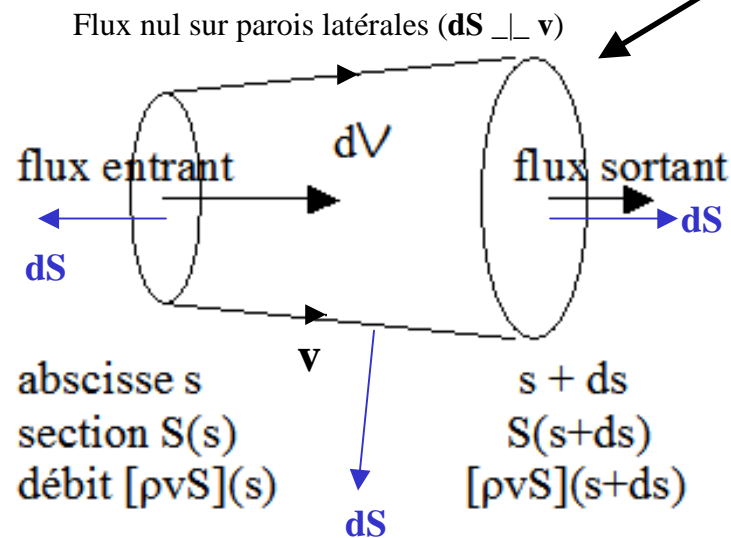
En régime stationnaire, avec  $\partial/\partial t = 0$ :

Conservation de la masse:

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Conservation de l'énergie:

$$\text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z) \mathbf{v}] = \rho \delta q/dt$$



On montre (théorème d'Ostrogradski dans  $dV$ ) que:

$$\text{div } \mathbf{F} = (1/S) \partial(F S)/\partial s$$

$s$  abscisse curviligne,  $\mathbf{F}(s)$  champ colinéaire à  $\mathbf{v}(s)$ ,  
pour un tube de courant de section  $S(s)$  variable

$\text{div } \mathbf{F} = (1/S) \partial(F S)/\partial s$  en supposant le diamètre du tube petit devant sa longueur:

$$\rightarrow \boxed{\Delta(\rho v S) = 0} \quad (\text{conservation du débit en kg s}^{-1})$$

$\Delta$  désigne la variation entre l'entrée et la sortie du tube le long d'une ligne de courant.

L'équation d'énergie se transforme sachant que  $\rho v S = \text{constante}$  avec  $h$  enthalpie et  $q$  chaleur échangée par unité de masse ( $\delta q/dt = v \delta q/ds$ ):

$$\rightarrow \boxed{\Delta(h + \frac{1}{2} v^2 + g z) = q} \quad (\text{J kg}^{-1})$$

Cette équation massique généralise l'équation de Bernoulli, pour les fluides compressibles.

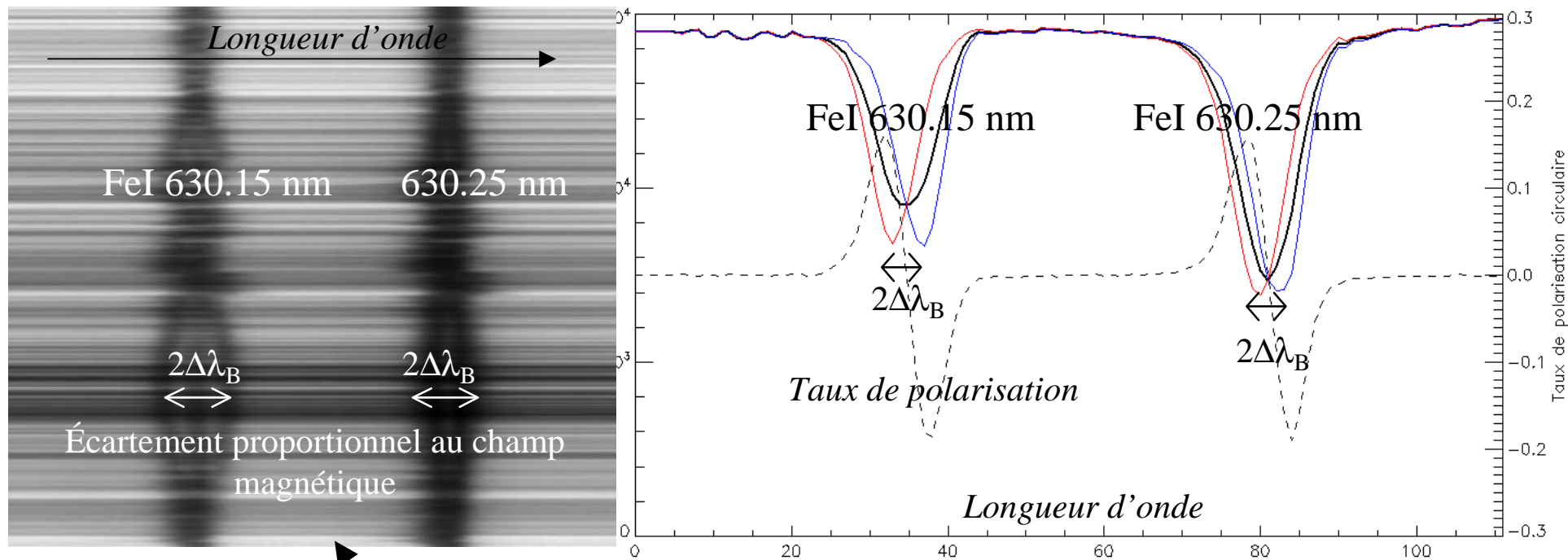
Pour une transformation adiabatique,  $q = 0$ .

Rappel: pour un gaz parfait :  $h = [\gamma / (\gamma - 1)] RT/M = [\gamma / (\gamma - 1)] P/\rho$

Si le fluide est incompressible,  $q = \Delta u$  (1<sup>er</sup> principe) et on retrouve l'équation de Bernoulli:

$$\Delta(P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z) = 0 \quad (\text{car } h - u = P / \rho)$$

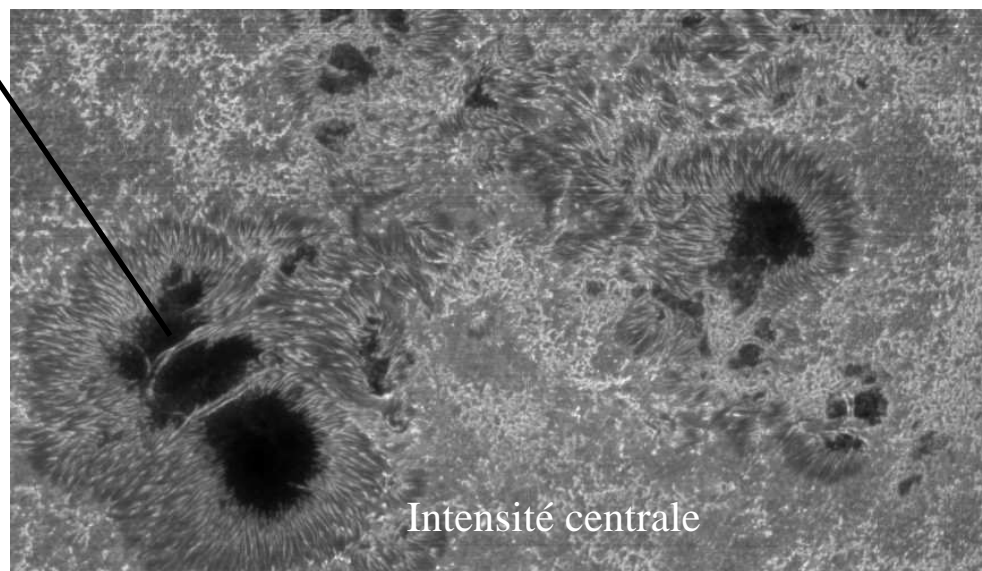
En présence de champ magnétique, l'équation de Maxwell  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  ajouterait:  $\boxed{\Delta(B S) = 0}$



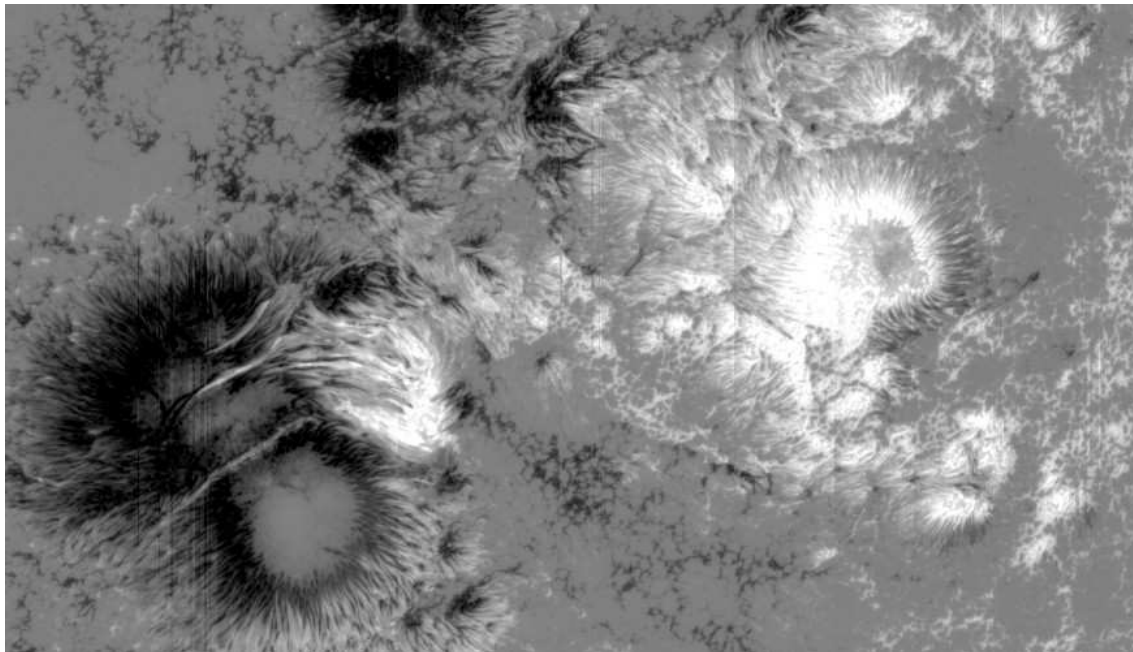
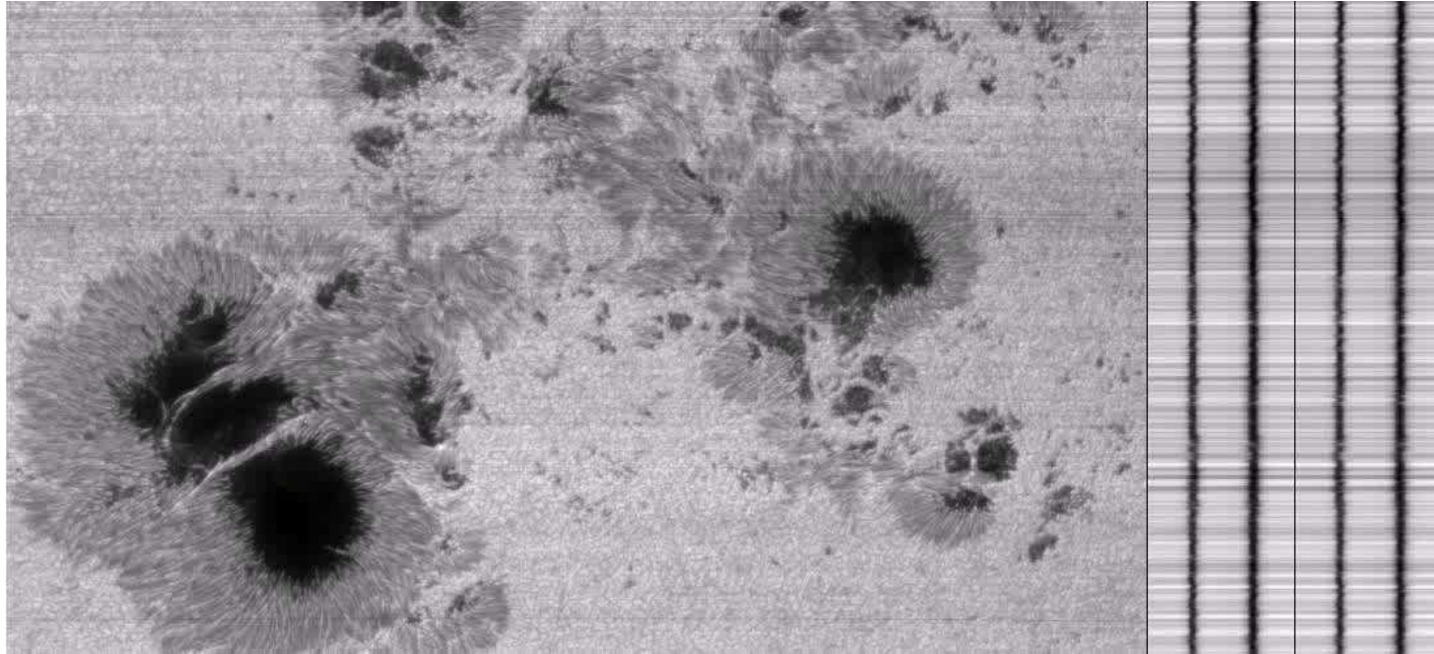
Mesure des champs magnétiques par écartement Zeeman sur les spectres en polarisation circulaire droite et circulaire gauche

$$\Delta\lambda_B = 4.67 \cdot 10^{-13} g^* \lambda^2 B$$

Avec  $\Delta\lambda_B$  et  $\lambda$  en Angström et B en Gauss (1 G =  $10^{-4}$  T);  $g^*$  facteur de Landé







Champ magnétique longitudinal déduit de l'écartement Zeeman sur les spectres en polarisation **circulaire droite** et **circulaire gauche** (raies du Fer à 630.15 et 630.25 nm)

Polarités Nord en blanc et Sud en noir

2 – Action de la force de Laplace en présence de champ magnétique; équilibre transversal

Force de Laplace volumique:  $\mathbf{f} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$  où  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} / \mu_0$  (Maxwell Ampère en ARQS)

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \text{grad } \mathbf{B} / \mu_0 - \text{grad}(B^2/2\mu_0)$$

Equation du mouvement stationnaire:

$$B^2/2\mu_0 \text{ pression magnétique (Pa)}$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = - \text{grad}(P + B^2/2\mu_0) + \rho \mathbf{g} + \mathbf{B} \cdot \text{grad}(\mathbf{B}/\mu_0)$$

*force de pression gazeuze + magnétique*      *force de tension magnétique*

- Pour un écoulement longitudinal (parallèle aux lignes de champ magnétique), en projection dans la direction  $\mathbf{t}$  du champ magnétique, le fluide glisse le long de "tuyaux magnétiques":

$$\rho \text{grad}_{//}(v^2/2) = - \text{grad}_{//}P - \rho \text{grad}_{//}(g z) \leftarrow$$

$\rightarrow$  le champ magnétique n'intervient pas !

Pour un fluide incompressible, c'est la loi de Bernoulli  $\rho v^2/2 + P + \rho g z = \text{constante}$

- En projection dans la direction  $\mathbf{n}$  orthogonale au champ magnétique:

$$(\rho v^2 - B^2/\mu_0)/R \mathbf{n} = - \text{grad}_{\perp}(P + B^2/2\mu_0) - \rho \text{grad}_{\perp}(g z) \leftarrow$$

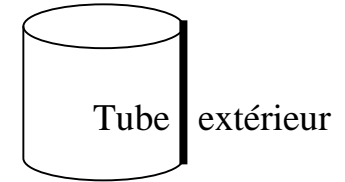
*force centrifuge – tension magnétique*

Si R (rayon de courbure)  $\rightarrow \infty$  :  $\text{grad}_{\perp}(P + B^2/2\mu_0) + \rho \text{grad}_{\perp}(g z) = 0$



Pour un fluide incompressible,  $P + B^2/2\mu_0 + \rho g z = \text{constante}$  loi de l'équilibre transversal

A l'interface tube/milieu extérieur:  $[P + B^2/2\mu_0]_{\text{tube}} = [P + B^2/2\mu_0]_{\text{ext}}$  (Pa)



*Plasma  $\beta$*

Ce paramètre est le rapport  $\beta = P / (B^2/2\mu_0)$  (nombre sans dimension)

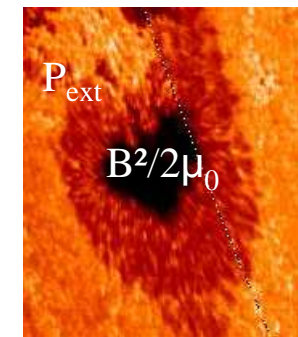
Si  $\beta > 1$ , les forces de pression dominant ; si  $\beta < 1$ , les forces magnétiques dominant.

*Exemple de l'atmosphère solaire:*

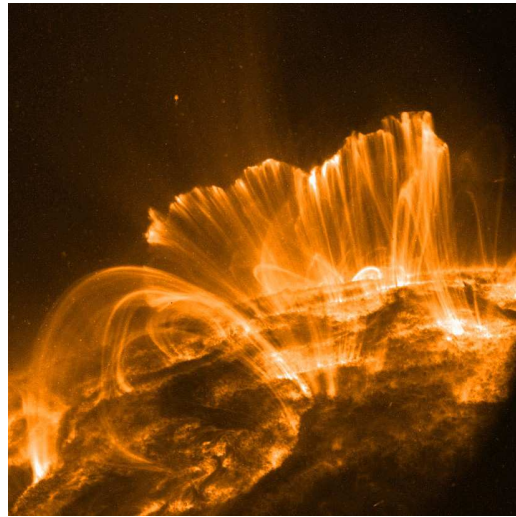
$\beta$  varie selon les structures et l'altitude (couches).

- dans la photosphère calme,  $\beta \gg 1$  car  $P = 10^3$  Pa et  $B = 10^{-3}$  T
- dans la chromosphère calme,  $\beta \approx 1$  car  $P = 1$  Pa et  $B = 10^{-3}$  T
- dans la couronne,  $\beta \ll 1$  car  $P = 10^{-4}$  Pa et  $B = 10^{-3}$  T
- dans les taches (champ fort de l'ordre de 0.1 à 0.2 T),  $\beta \ll 1$ .

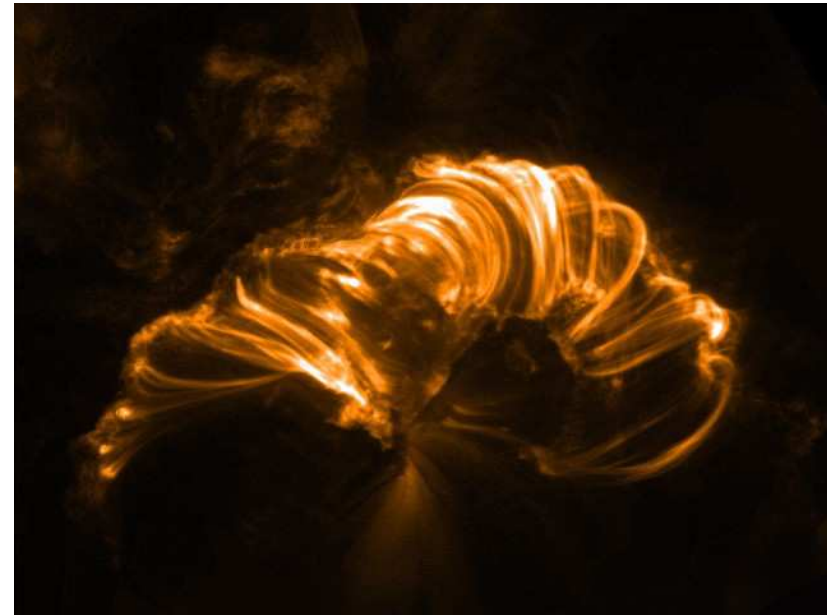
Pour les taches, la condition d'équilibre latéral est  $[P + B^2/2\mu_0]_{\text{tache}} = [P]_{\text{ext}}$



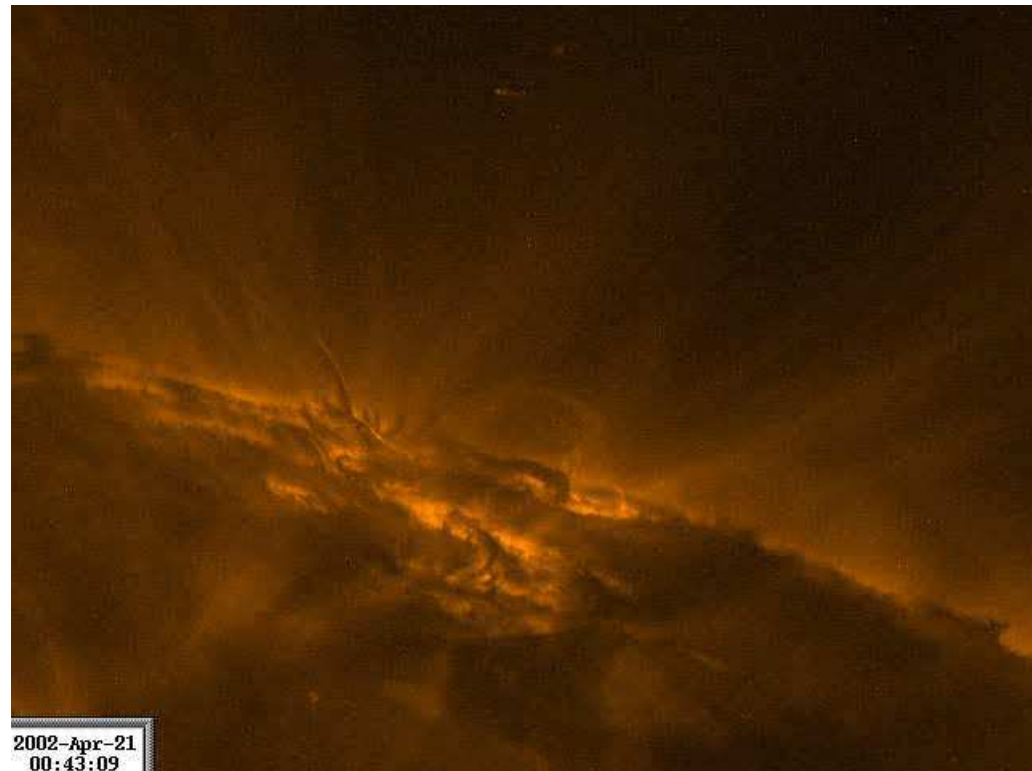
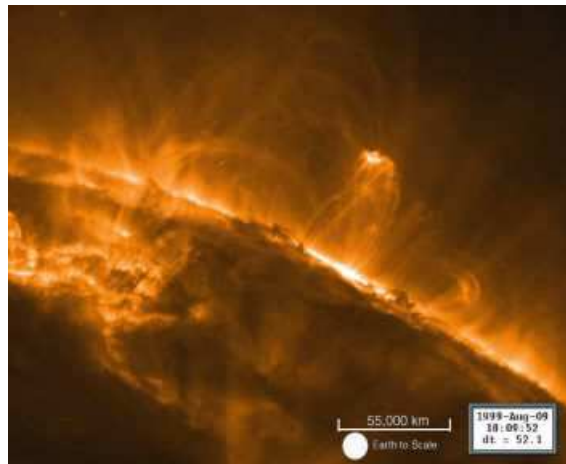
ce qui donne une limite supérieure au champ magnétique des taches:  $B < [2\mu_0 P_{\text{ext}}]^{1/2}$   
soit **0.25 T** environ.



↑  
100000 km  
↓



Extreme Ultra Violet (satellite TRACE/NASA): des phénomènes complexes et hautement dynamiques avec écoulements confinés dans des tubes de champ magnétique en évolution



### III - Equation de diffusion et d'advection du champ magnétique

La densité de courant en ARQS est donnée par:  $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

et par la loi d'Ohm  $\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$  où  $\gamma$  est la conductivité du plasma ( $\text{S m}^{-1}$ ).

A l'aide de l'équation de Maxwell Faraday, si la conductivité  $\gamma$  est uniforme, on obtient l'équation de diffusion et d'advection du champ magnétique :

$$\Delta \mathbf{B} / \mu_0 \gamma + \mathbf{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$$

Dans une atmosphère stellaire,  $\gamma$  n'est pas uniforme et varie avec  $T$  ( $\gamma = 8 \cdot 10^{-4} T^{3/2} \text{ S m}^{-1}$ ) !

- dans un milieu de conductivité infinie  $\mathbf{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$  est une équation d'advection du champ magnétique qui évolue sur l'échelle de temps dynamique:

$$\tau = L/v \quad (L \text{ dimension caractéristique})$$

- dans un milieu au repos  $\Delta \mathbf{B} / \mu_0 \gamma = \partial \mathbf{B} / \partial t$  est une équation de diffusion pure qui évolue sur l'échelle de temps diffusif (plus longue):

$$\tau_d = L^2 \mu_0 \gamma \quad (L \text{ dimension caractéristique})$$

## 1 - Echelles de temps caractéristiques pour l'atmosphère solaire

$\gamma \approx 10^3 \text{ S m}^{-1}$  dans la photosphère solaire ( $10^4 \text{ K}$ )

$\gamma \approx 10^6 \text{ S m}^{-1}$  à  $10^6 \text{ K}$  dans la couronne

temps caractéristiques  $\tau_d$  et  $\tau$  dans les structures solaires:

- *structures photosphériques*:  $L = 10^4 \text{ km}$ ,  $v = 1 \text{ km/s}$  :  $\tau_d = 10^{11} \text{ s}$ ,  $\tau = 10^4 \text{ s}$

- *structures coronales*:  $L = 10^5 \text{ km}$ ,  $v = 100 \text{ km/s}$  :  $\tau_d = 10^{16} \text{ s}$ ,  $\tau = 10^3 \text{ s}$

Aux échelles observables  $\tau_d \gg \tau$ ; la diffusion du champ magnétique est donc inefficace. Il existe une échelle de temps intermédiaire, celle de l'instabilité de déchirement dans une région de champ magnétique anti parallèle ou nappe de courant, que l'on rencontre dans les éruptions solaires. La constante de temps est :

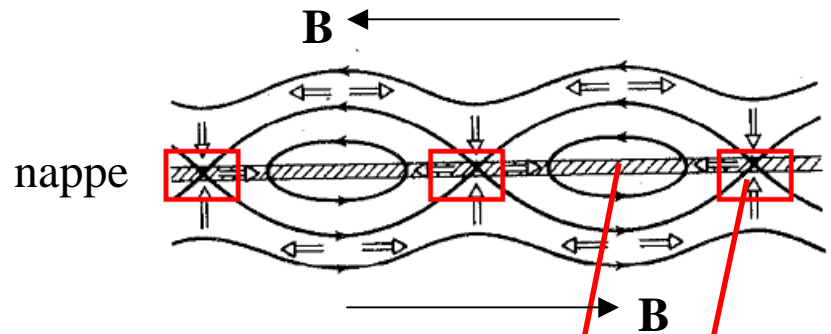
$$\tau_t = (\tau_d \tau)^{1/2} = \tau (R_m)^{1/2} \quad \text{avec:}$$

$$R_m = \tau_d / \tau = L \mu_0 \gamma v = \frac{\text{terme advectif } \|\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})\|}{\text{terme diffusif } \|\Delta \mathbf{B} / \mu_0 \gamma\|} = \text{nombre de Reynolds magnétique}$$

Dans la couronne solaire,  $R_m \approx 10^{13}$ ; dans la photosphère,  $R_m \approx 10^7$

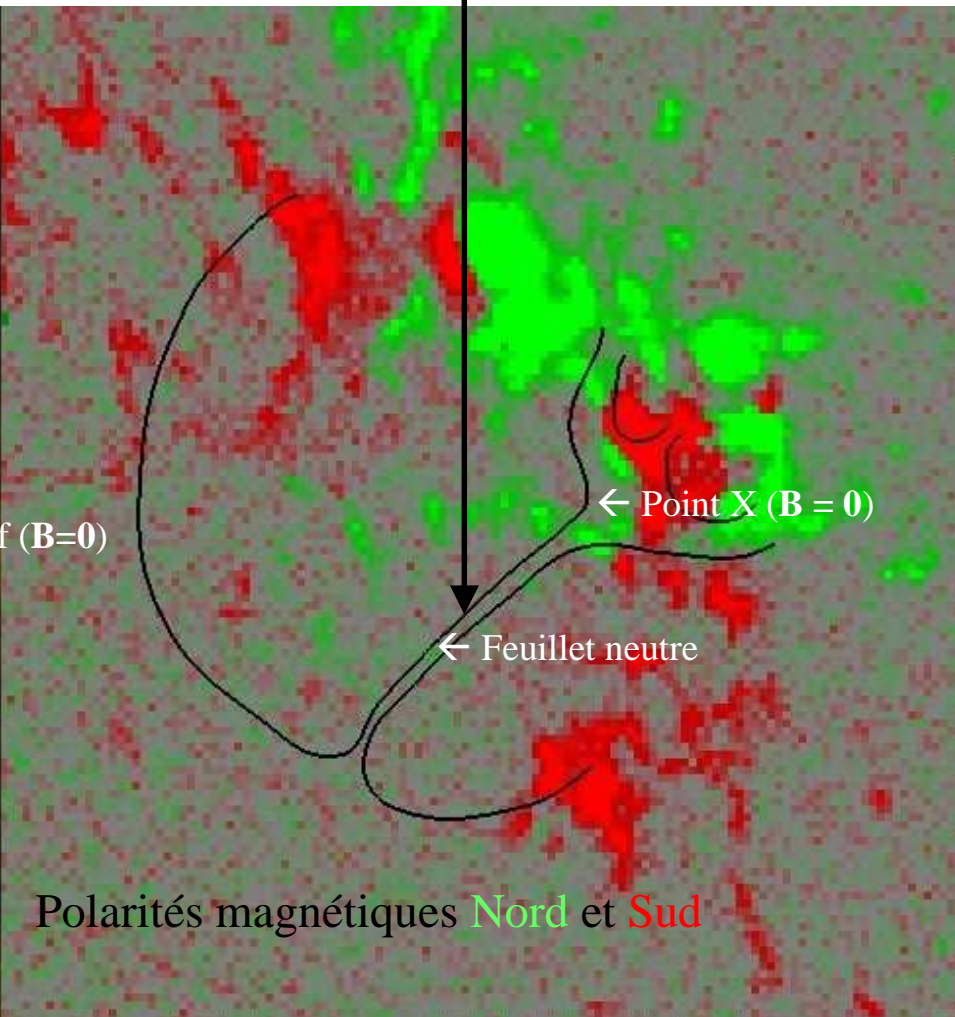
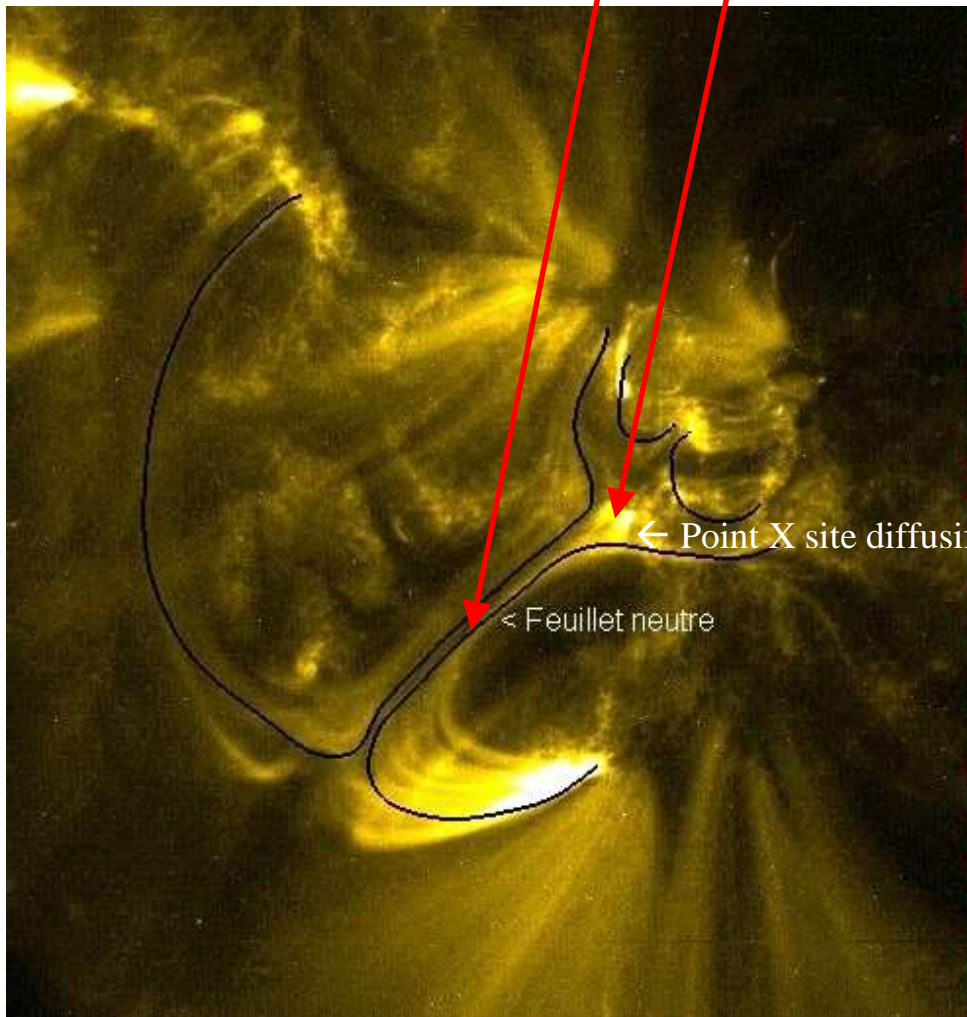
$R_m \approx 1$  seulement aux très petites échelles spatiales ( $L$  de l'ordre du m).

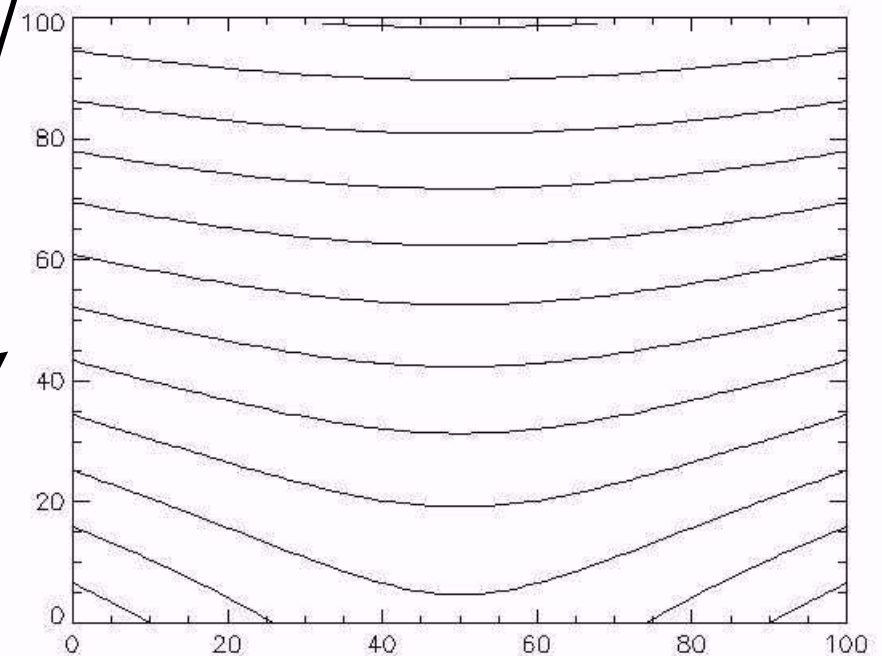
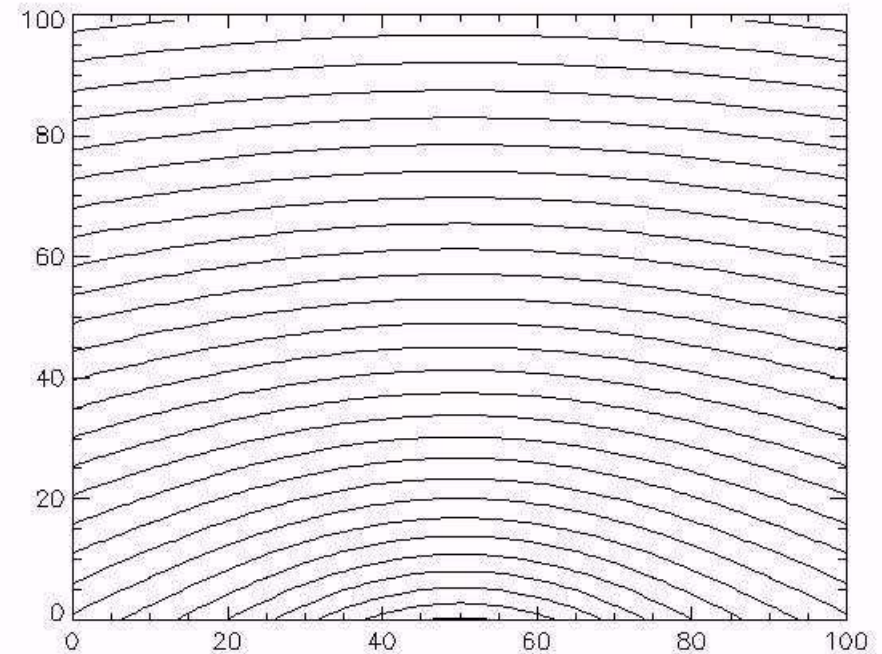
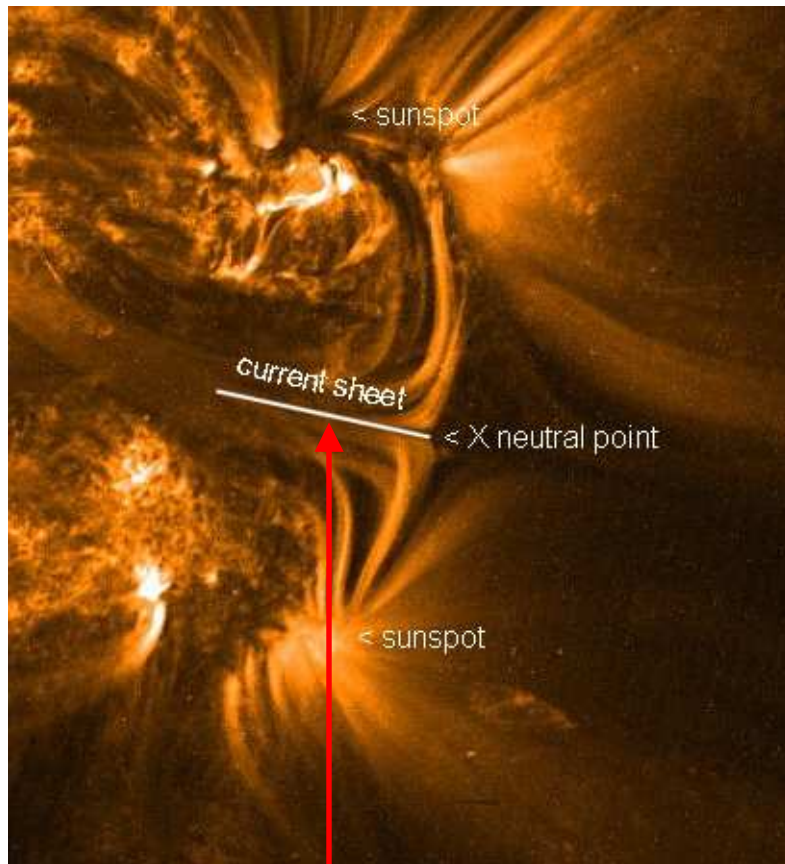




*Nappe de courant*

Région de lignes de champ magnétique anti parallèles propices à l'instabilité de déchirement (satellites TRACE et SOHO/MDI)





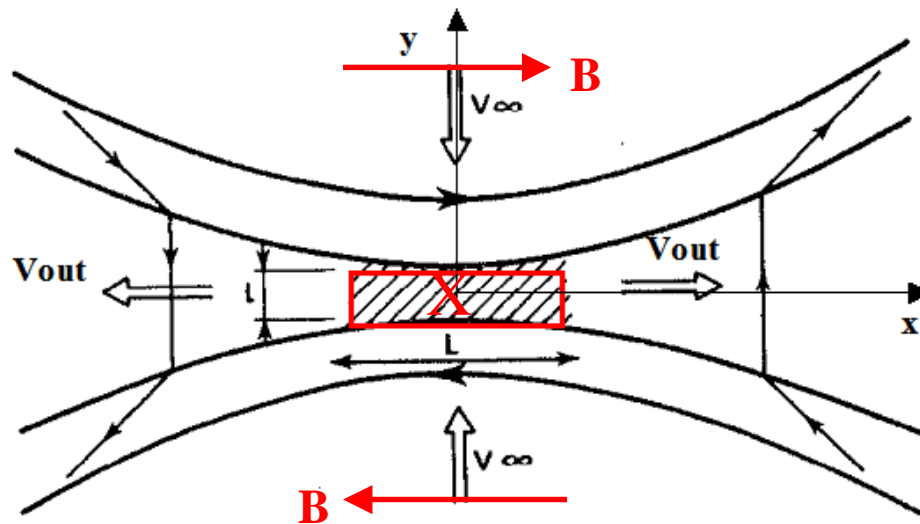
Nappe de courant = région de lignes de champ magnétique anti parallèles (satellite EUV TRACE, NASA)

Formation très simplifiée d'une nappe de courant par émergence quasi statique d'un courant électrique dans un champ magnétique horizontal orienté initialement vers la gauche ou vers la droite.



## 2 - Reconnexion magnétique

Une diffusion efficace ne se développe qu'aux petites échelles, au voisinage d'un point **X** d'annihilation des champs magnétiques dans une nappe de courant fine. Son épaisseur  $l$  dépend des mouvements de convergence de vitesse  $v_\infty$  (1 km/s) vers le point diffusif **X** (rouge).



$$\tau_d = l^2 \mu_0 \gamma = \tau = l / v_\infty$$

La partie hachurée est purement diffusive, d'épaisseur

$$l = (\mu_0 \gamma v_\infty)^{-1} \quad (\approx \text{mètre})$$

dans laquelle le nombre de Reynolds magnétique est voisin de 1

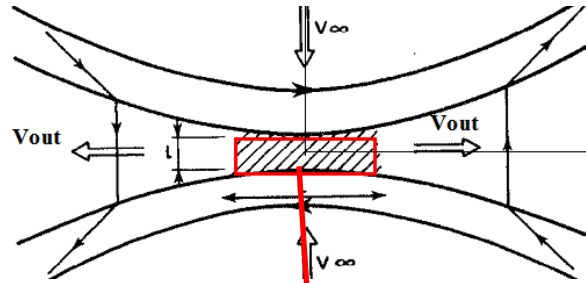
La matière est éjectée du site diffusif à la vitesse d'Alfvén (fourchette: 10 à 1000 km/s)

$$v_{\text{out}} = B / (\mu_0 \rho)^{1/2}$$

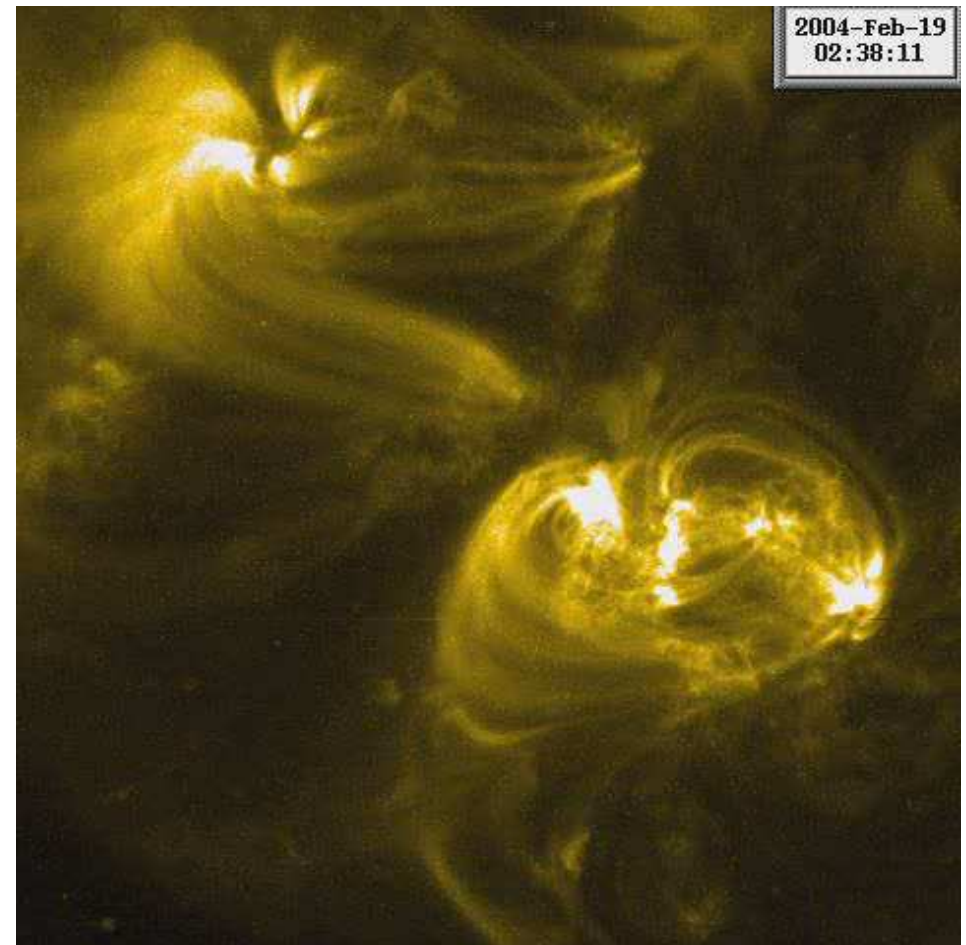
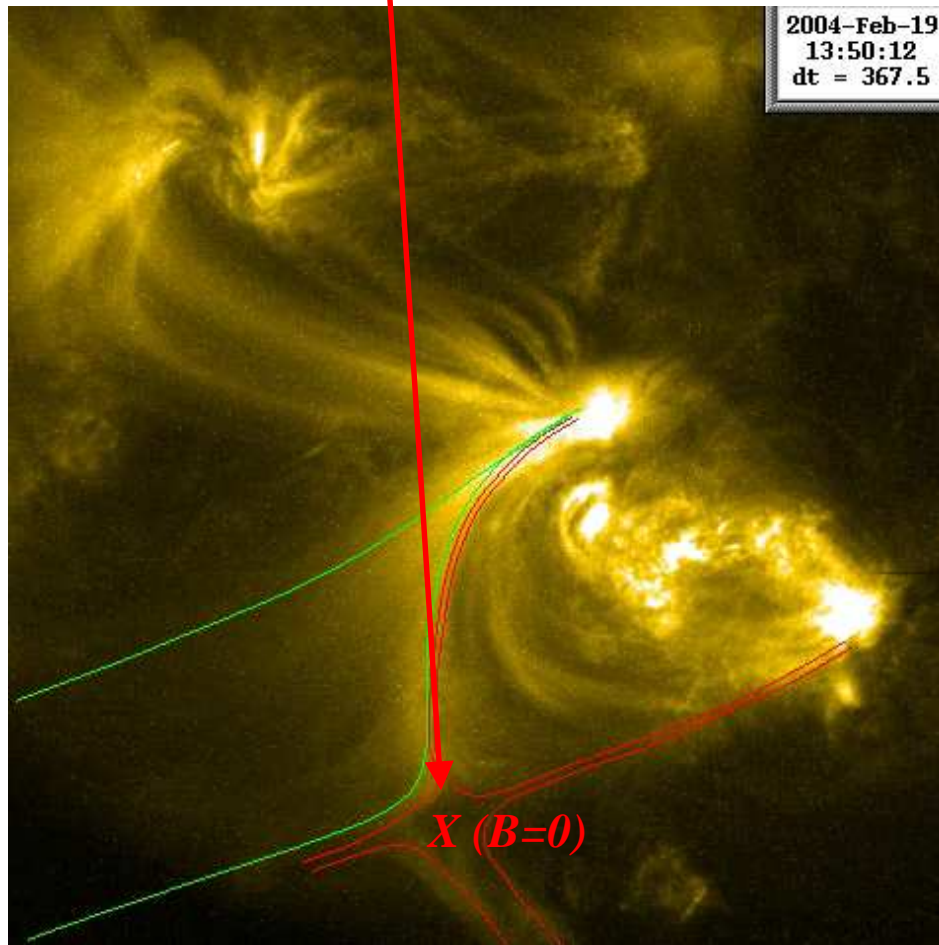
La longueur  $L$  de la région diffusive est donnée par la conservation de la masse :  $L v_\infty = l v_{\text{out}}$

Soit  $L \approx l (v_{\text{out}} / v_\infty) \gg l$  (fourchette: 10 m à 1 km, inobservable par les télescopes)





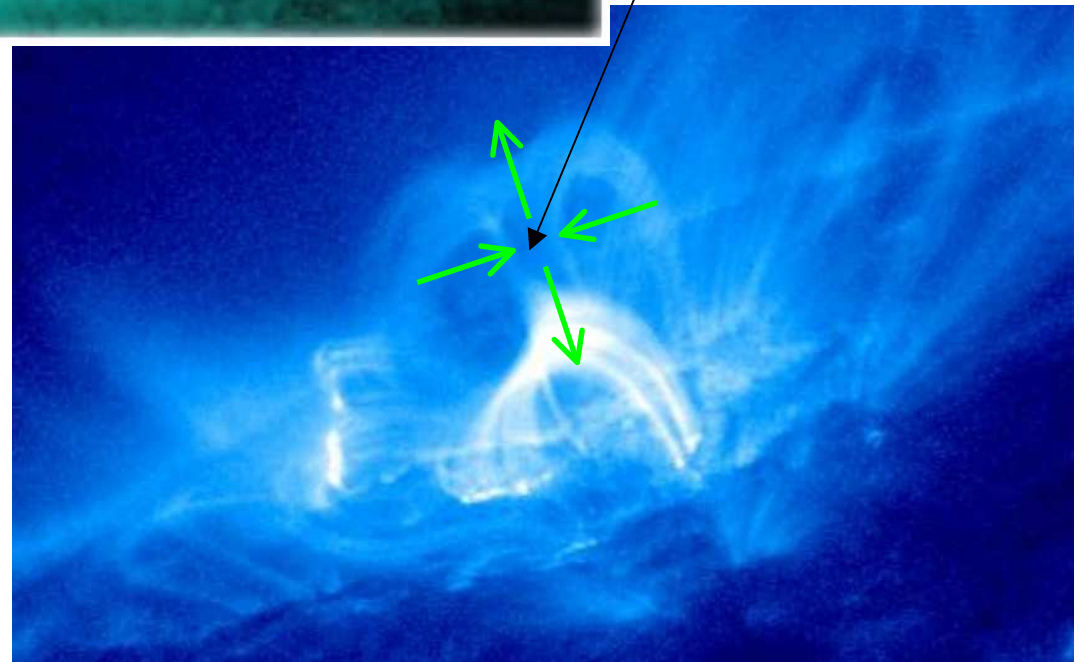
Reconnexion magnétique dans les structures solaires: le point **X** (inobservable) est un site efficace de diffusion magnétique où **B** s'annule (satellite EUV TRACE, NASA)





Site de reconnexion  
magnétique, point X  
d'annihilation du  
champ

Reconnexion magnétique observée  
en ultra violet au dessus d'une  
région active solaire éruptive  
(température  $10^7$  K) par le satellite  
Solar Dynamics Observatory de la  
NASA; instrument EUV – AIA 13.1  
nm – FeVIII et FeXXI hautement  
ionisé



## IV – Ondes acoustiques et ondes magnétiques

### 1 - Ondes de pression longitudinales ( $\mathbf{v} // \mathbf{k}$ )

On dispose des équations de base en négligeant la gravité et la force magnétique:

$$\begin{cases} \rho [ \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}) ] = - \mathbf{grad} P & \text{Euler} \\ \partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 & \text{conservation de la masse} \end{cases}$$

Le milieu est initialement au repos de pression  $P_0$  et masse volumique  $\rho_0$  uniformes, on se place dans l'hypothèse de petits mouvements de vitesse  $v$  le long de l'axe des  $x$  :

$$\begin{cases} \rho_0 \partial v / \partial t = - \partial P_1 / \partial x \\ \partial \rho_1 / \partial t + \rho_0 \partial v / \partial x = 0 \end{cases} \quad \text{où } P = P_0 + P_1 \text{ (} P_1 \text{ surpression), } \rho = \rho_0 + \rho_1 \text{ (} \rho_1 \text{ surdensité)}$$

Dans un milieu adiabatique,  $P / \rho^\gamma = \text{constante}$  d'où:  $P_1 / P_0 = \gamma \rho_1 / \rho_0$ , et on obtient:

$$\boxed{\partial^2 v / \partial x^2 = (\rho_0 / \gamma P_0) \partial^2 v / \partial t^2} \quad \text{équation de d'Alembert de propagation d'une onde de célérité:}$$

$$\boxed{C_s = (\gamma P_0 / \rho_0)^{1/2} = (\gamma RT / M)^{1/2}} \quad \text{proportionnel à } T^{1/2} \text{ (M masse molaire)}$$

*Fourchette*: 10 km/s (photosphère) à 150 km/s (couronne) dans l'atmosphère solaire

## 2 - Ondes magnétiques d'Alfvén transversales ( $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$ )

On dispose des équations de base, dans lesquelles on néglige la gravité et la pression:

{	$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$	conservation de la masse
	$\rho [ \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) ] = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$	Euler (force de Laplace)
	$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} / \mu_0$	Maxwell Ampère en ARQS
	$\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$	Advection ou Maxwell Faraday en conductivité infinie $\mathbf{j} / \gamma = \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{0}$ d'où $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$

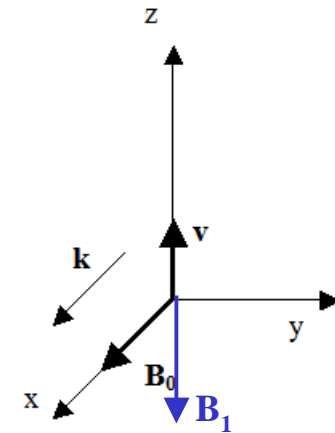
On se place dans l'hypothèse d'une propagation d'onde dans la direction du champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$  ( $\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$ ); le milieu est supposé incompressible ( $\rho = \rho_0 = \text{constante} \rightarrow \text{div } \mathbf{v} = 0 \rightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{k}$ ). La perturbation  $\mathbf{B}_1 = B_1 \mathbf{e}_z$  du champ magnétique est transverse et opposée à  $\mathbf{v}$ .

$$\partial^2 \mathbf{v} / \partial x^2 = (\mu_0 \rho_0 / B_0^2) \partial^2 \mathbf{v} / \partial t^2$$

équation de propagation de d'Alembert à la célérité

$$v_a = B_0 / (\mu_0 \rho_0)^{1/2} \quad \text{proportionnel au champ magnétique}$$

appelée vitesse d'Alfvén, de l'ordre de 100 à 1000 km/s dans la couronne solaire.



### 3 - Ondes sonores et ondes magnétiques d'Alfvén: transport de l'énergie

- Vecteur de Poynting des ondes sonores:  $\mathbf{\Pi} = P_1 \mathbf{v}$  où  $P_1$  est la surpression ( $P = P_0 + P_1$ ,  $P_1 \ll P_0$ )

$$\boxed{\text{div } \mathbf{\Pi} + \frac{\partial(1/2 \rho_0 \mathbf{v}^2 + 1/2 \chi P_1^2)}{\partial t} = 0} \quad \text{où} \quad \boxed{P_1 = \gamma P_0 v / C_s}$$

densité d'énergie cinétique + potentielle

Il y a équipartition entre énergie cinétique et potentielle instantanée.

$\chi = 1/(\gamma P_0) = 1/(\rho_0 C_s^2)$  est la compressibilité isentropique [ $\chi = - (1/V) \partial V / \partial P = (1/\rho) \partial \rho / \partial P$ ]

$$\boxed{\Pi = \rho_0 v^2 C_s = (E_c + E_p) C_s \text{ est la puissance transportée par l'onde sonore en } W \text{ m}^{-2}}$$

- Vecteur de Poynting des ondes d'Alfvén:  $\mathbf{\Pi} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}_1) / \mu_0 = (B_1^2 / \mu_0) v_a \mathbf{e}_z$

où  $B_1^2 / \mu_0$  est la surpression magnétique ( $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ ,  $B_1 \ll B_0$ ) et  $\mathbf{E} = - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0$

$$\boxed{\text{div } \mathbf{\Pi} + \frac{\partial(1/2 \rho_0 \mathbf{v}^2 + 1/2 B_1^2 / \mu_0)}{\partial t} = 0} \quad \text{où} \quad \boxed{B_1 = - B_0 v / v_a}$$

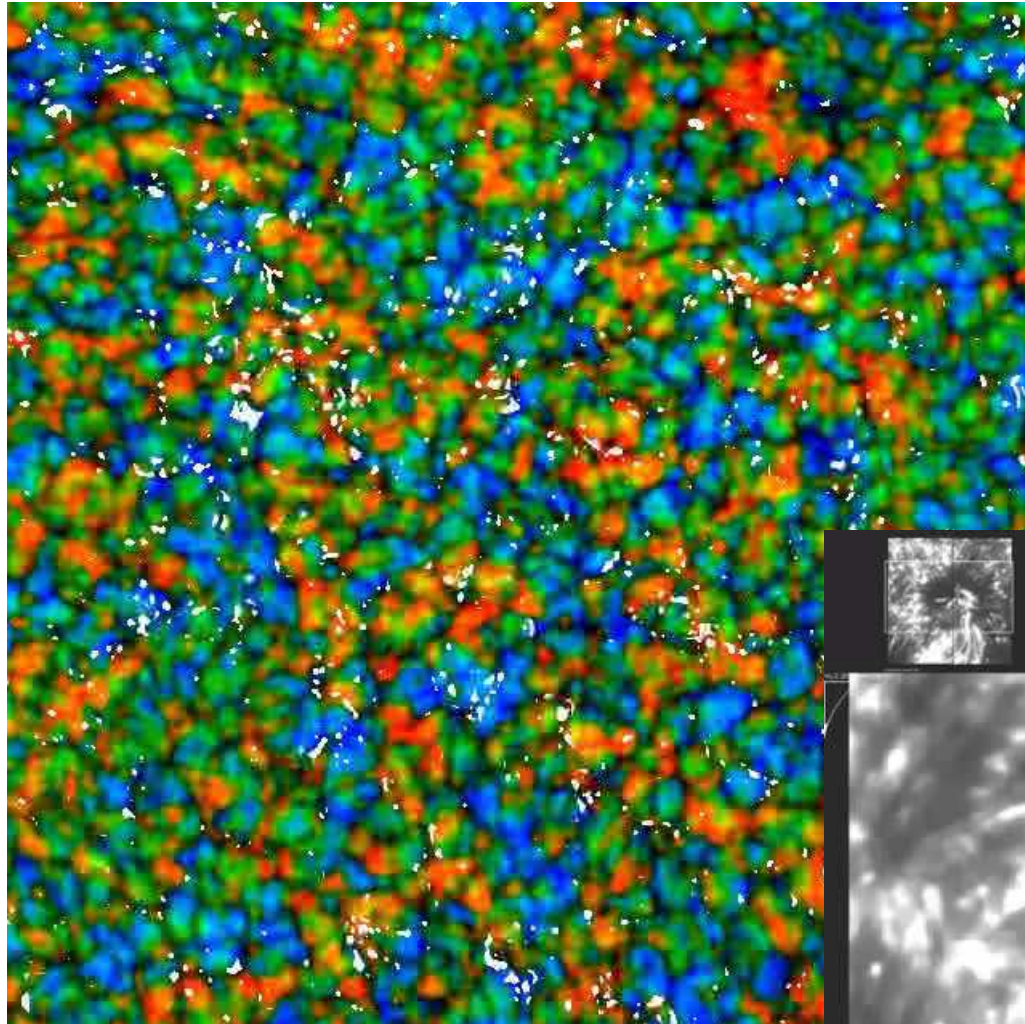
densité d'énergie cinétique + magnétique

Il y a équipartition entre énergie cinétique et magnétique instantanée.

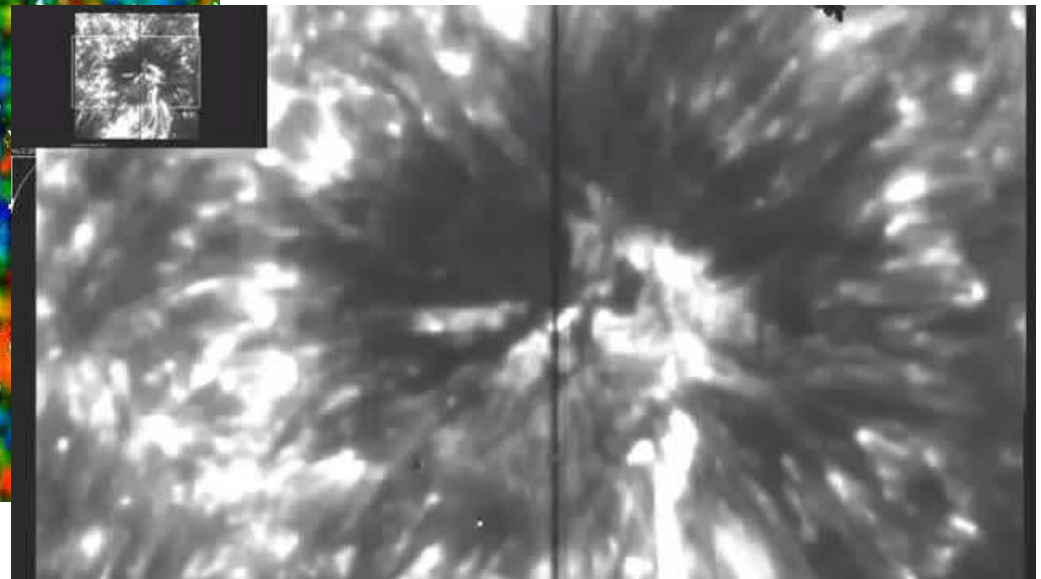
$$\boxed{\Pi = \rho_0 v^2 v_a = (E_c + E_m) v_a \text{ est la puissance transportée par l'onde d'Alfvén en } W \text{ m}^{-2}}$$



Exemple 1: ondes acoustiques de 300 s de période dans l'atmosphère solaire dans un champ de 1' x 1' (au centre du disque dont le diamètre est de 32'). Observations satellite Hinode JAXA/NASA, instrument NFI, raie FeI 557.6 nm, pas temporel 30s. bleu: mouvements montants / rouge: descendants / points blancs: ondes progressives



Exemple 2: ondes d'Alfvén magnétiques dans une tache (champ magnétique fort), satellite IRIS/NASA, Slit Jaw MgII 283.2 nm en Ultra Violet



#### 4 - Ondes sonores longitudinales dans les solides ( $\mathbf{v} // \mathbf{k}$ )

$$C_s^2 = 1 / (\chi \rho) \quad \text{où } \chi \text{ est la compressibilité isentropique } [\chi = - (1/V) \partial V / \partial P]$$

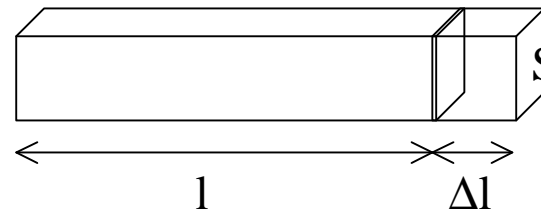
Pour un solide, on a la loi de Hooke  $\sigma = \text{contrainte} = E (\Delta l / l) = - \Delta P \text{ (Pa)}$

E module d'Young ou module d'élasticité (Pa)

A section S constante,  $V = S l \rightarrow \Delta V = S \Delta l$  d'où  $\chi = - \Delta l / (l \Delta P) = \boxed{1/E}$

$$\rightarrow \boxed{C_s = (E/\rho)^{1/2}}$$

Exemples: acier  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \rightarrow C_s = 5000 \text{ m/s}$   
 eau  $E = 1 \cdot 10^9 \text{ Pa} \rightarrow C_s = 1400 \text{ m/s}$   
 air  $E = 1.4 \cdot 10^5 \text{ Pa} \rightarrow C_s = 330 \text{ m/s}$



#### 5 - Ondes magnéto sonores longitudinales ( $\mathbf{v} // \mathbf{k}$ )

$$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho [ \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) ] = - \text{grad } P + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$$

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} / \mu_0$$

$$\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$$

milieu adiabatique,  $P / \rho^\gamma = \text{constante}$

conservation de la masse

Euler (force de Laplace + pression)

Maxwell Ampère en ARQS

Maxwell Faraday en conductivité infinie

$$\mathbf{j} / \gamma = \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{d'où } \mathbf{E} = - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$



Ondes en  $e^{i(\omega t - kx)}$  dans un champ de pression et densité  $P_0, \rho_0$  uniformes et dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}_0$  de perturbation  $\mathbf{B}_1$ . On pose:

$$P = P_0 + P_1, \quad P_1 \text{ surpression}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \rho_1 \text{ surdensité}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{B}_1 \text{ perturbation magnétique}$$

Pour les petits mouvements au 1er ordre:

$$\partial \rho_1 / \partial t + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$$

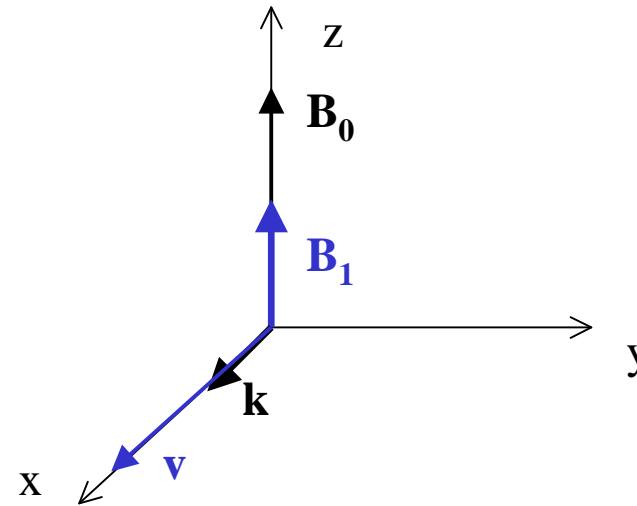
$$\rho_0 \partial \mathbf{v} / \partial t = - \mathbf{grad} P_1 + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}_0$$

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B}_1 / \mu_0$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) = \partial \mathbf{B}_1 / \partial t$$

$$\mathbf{E} = - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0$$

$$\text{et milieu } \underline{\text{adiabatique}}, \quad P / \rho^\gamma = \text{constante soit } P_1 / P_0 = \gamma (\rho_1 / \rho_0)$$



conservation de la masse

Euler (force de Laplace + pression)

Maxwell Ampère en ARQS

Equation d'advection (conductivité infinie)

Tous calculs faits, on obtient la relation de dispersion  $\omega = (C_s^2 + v_a^2)^{1/2} k$

Onde magnéto sonore rapide de célérité  $(C_s^2 + v_a^2)^{1/2}$  où

$v_a = B_0 / (\mu_0 \rho)^{1/2}$  vitesse d'Alfvén et  $C_s = (\gamma P_0 / \rho_0)^{1/2}$  vitesse du son

## 6 - Ondes de gravité transversales dans un liquide ( $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$ ) – la houle

en eau profonde:  $\omega = (g k)^{1/2}$

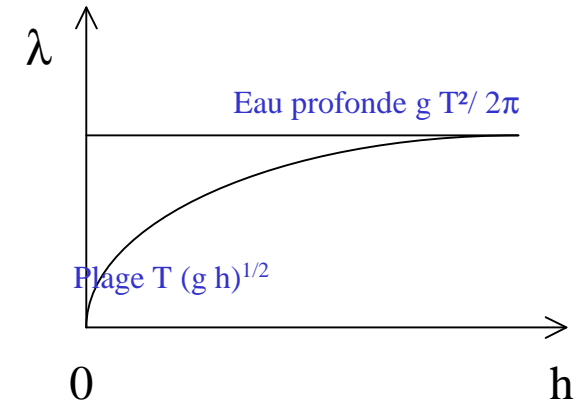
en eau peu profonde:  $\omega = k (g h)^{1/2}$  où  $h$  est la profondeur

Pour une période  $T$  donnée, avec  $T = 2\pi/\omega$  et  $k = 2\pi/\lambda$

- en eau profonde:  $\lambda = g T^2 / 2\pi$

- en eau peu profonde:  $\lambda = T (g h)^{1/2}$  où  $h$  est la profondeur

→ déferlement des vagues sur la plage



## 7 - cavité résonante 1D et modes d'ondes stationnaires

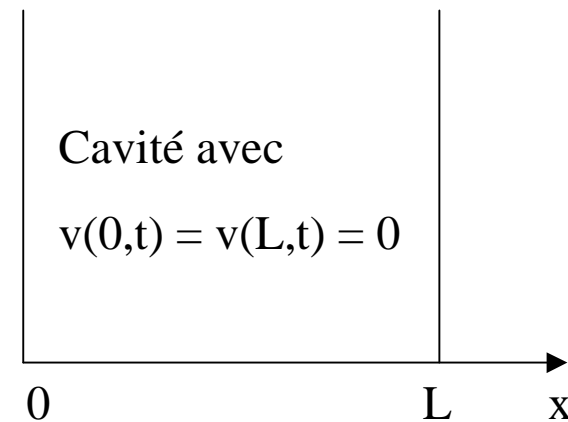
Posons  $v(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}$

Dans une cavité,  $v(0,t) = v(L,t) = 0$

Alors  $A + B = 0$  et  $A e^{-ikL} + B e^{ikL} = 0$

D'où  $\sin(kL) = 0$  et  $k = n \pi / L$ ,  $n$  entier

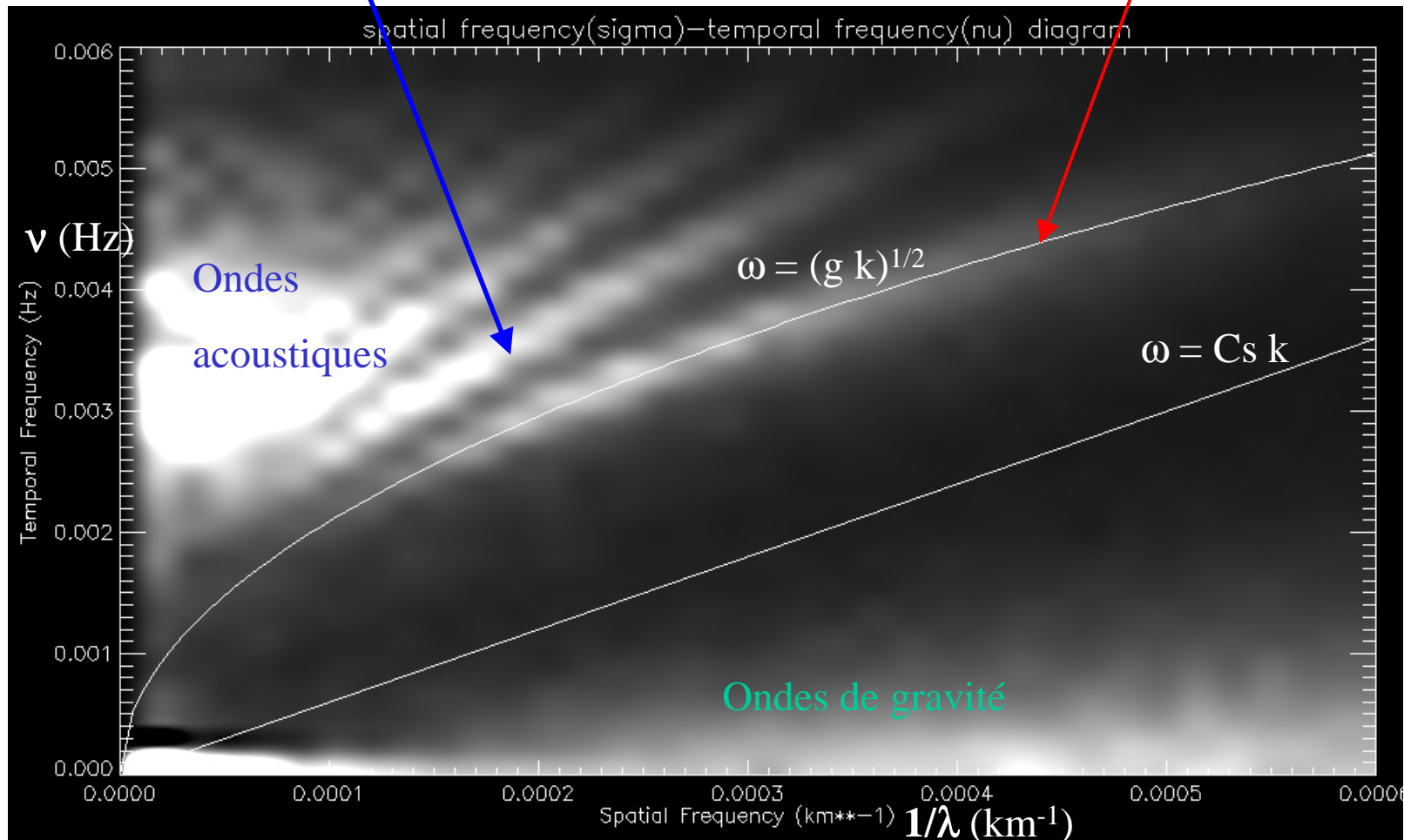
$\omega = C_s k = n \pi C_s / L$ , mode d'onde stationnaire



*Exemple: cavité résonante constituée par le soleil (observations doppler Hinode/NFI)  
et modes d'ondes stationnaires*

On observe des **modes discrets** de vibration

$\omega = (g k)^{1/2}$  donne le **mode fondamental**



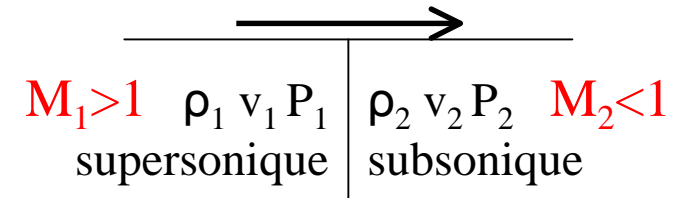
## V - Chocs hydrodynamiques : relations de Rankine Hugoniot

Un choc est une discontinuité de vitesse, température, densité et pression. En amont, le nombre de Mach  $M_1$  (rapport de la vitesse du fluide à la vitesse du son) est supérieur à l'unité. Un choc engendre une compression du plasma en aval. Appelons  $v_1, P_1, \rho_1$  les vitesse, pression, masse volumique en amont du choc, et  $v_2, P_2, \rho_2$  les vitesse, pression, masse volumique en aval du choc. En régime stationnaire pour un gaz parfait d'exposant adiabatique  $\gamma$ :

conservation du débit massique:  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$

équation du mouvement (Euler):  $\rho_1 v_1^2 + P_1 = \rho_2 v_2^2 + P_2$

conservation de l'énergie massique:  $h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} v_2^2$  où  $h = [\gamma / (\gamma - 1)] P / \rho$  (enthalpie)

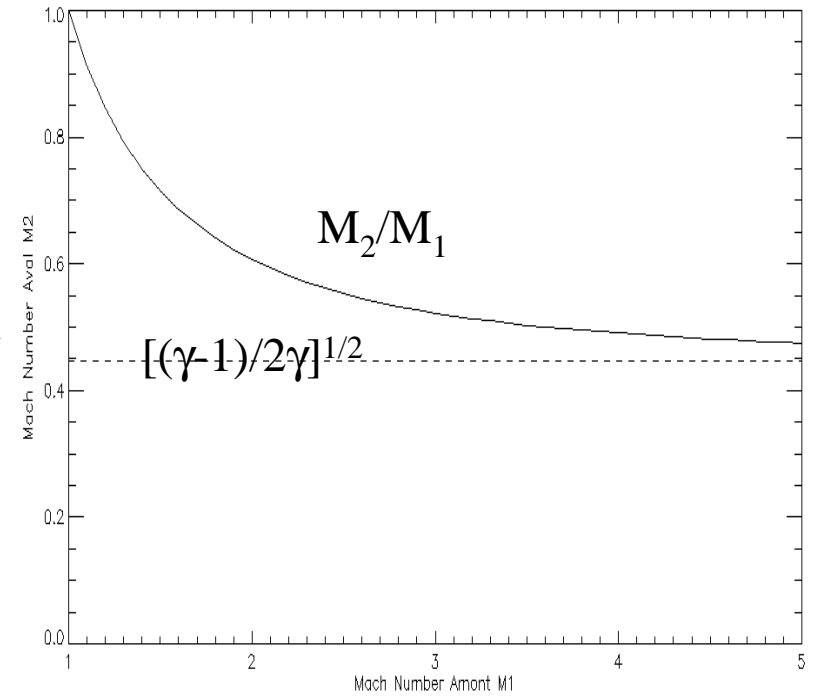
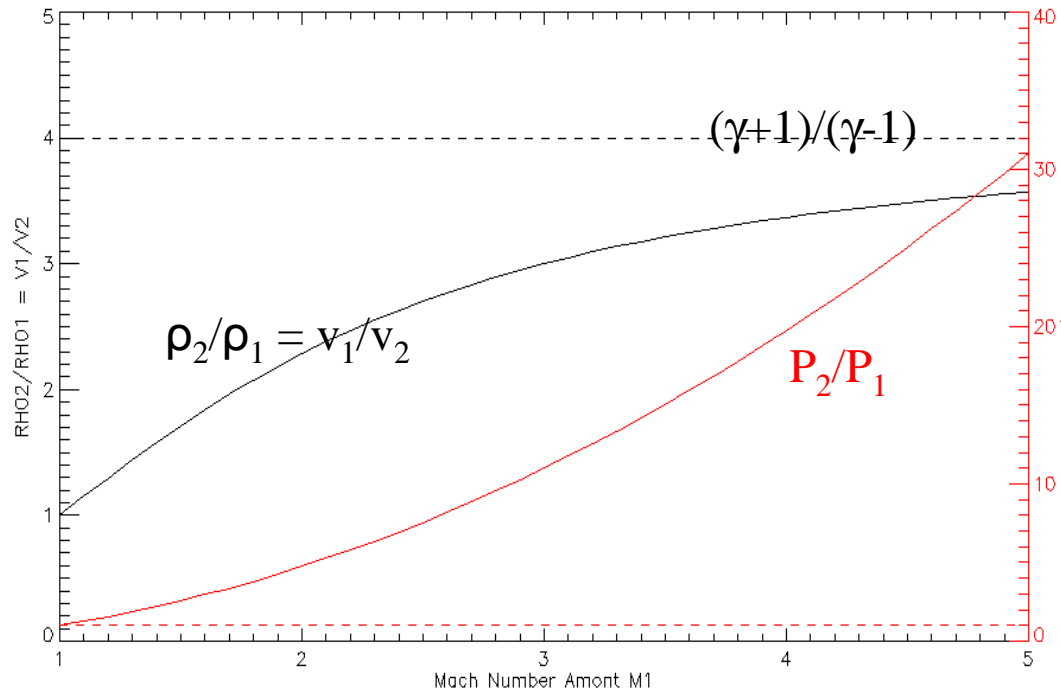


$$v_1/v_2 = \rho_2/\rho_1 = (\gamma+1) M_1^2 / [2 + M_1^2(\gamma-1)] > 1 \rightarrow \text{compression } 1 < \rho_2/\rho_1 < (\gamma+1)/(\gamma-1)$$

$$P_2/P_1 = [2 \gamma M_1^2 - (\gamma-1)] / (\gamma+1) > 1 \rightarrow \text{compression } 1 < P_2/P_1 < \infty$$

$$M_2^2 = [M_1^2(\gamma-1) + 2] / [2 \gamma M_1^2 - (\gamma-1)] < 1 \quad \text{avec } M_2 = v_2/C_{s2} < 1$$

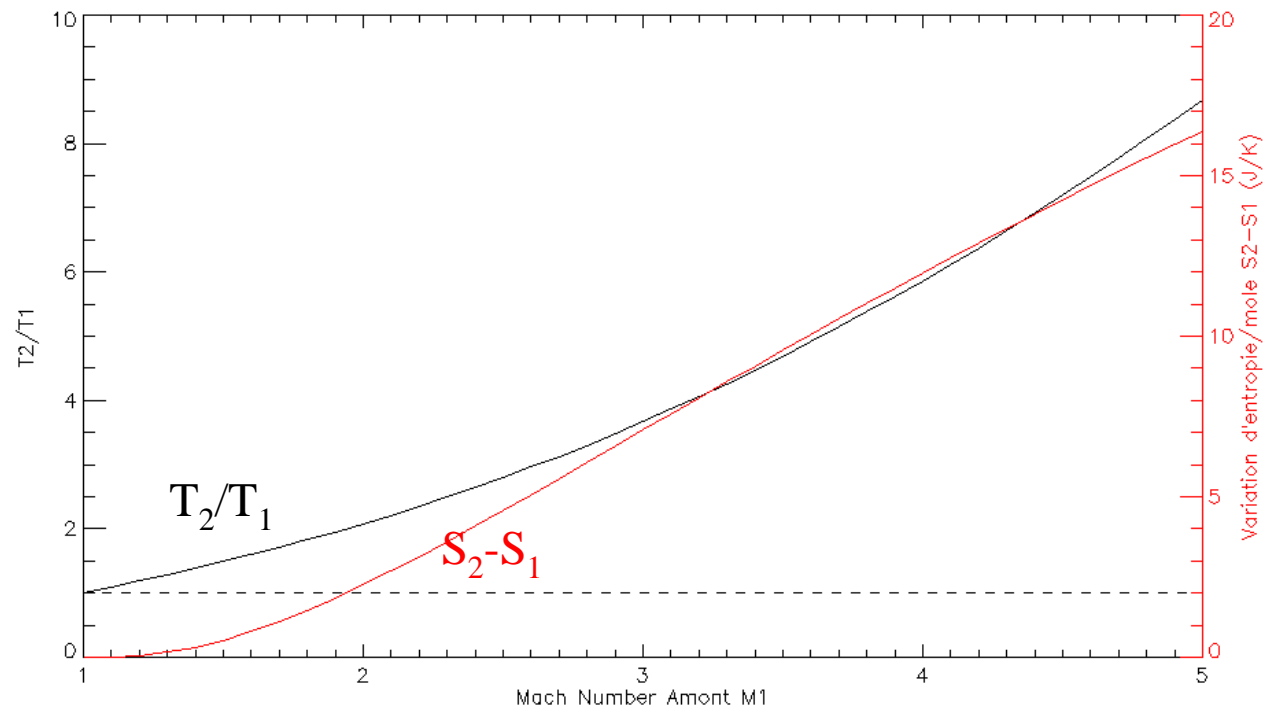
$$T_2/T_1 = (P_2/P_1) / (\rho_2/\rho_1) > 1 \quad (\text{chauffage}) \quad \text{avec } M_1 = v_1/C_{s1} > 1$$



Entropie molaire du gaz parfait

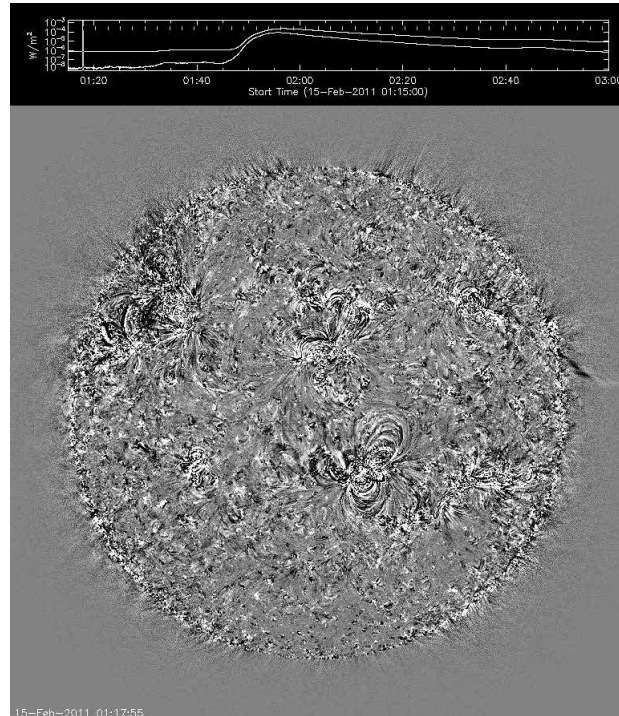
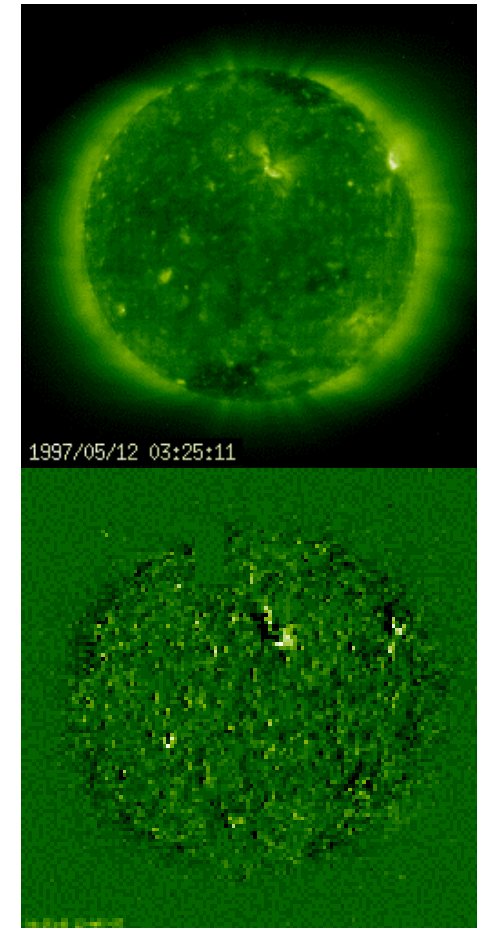
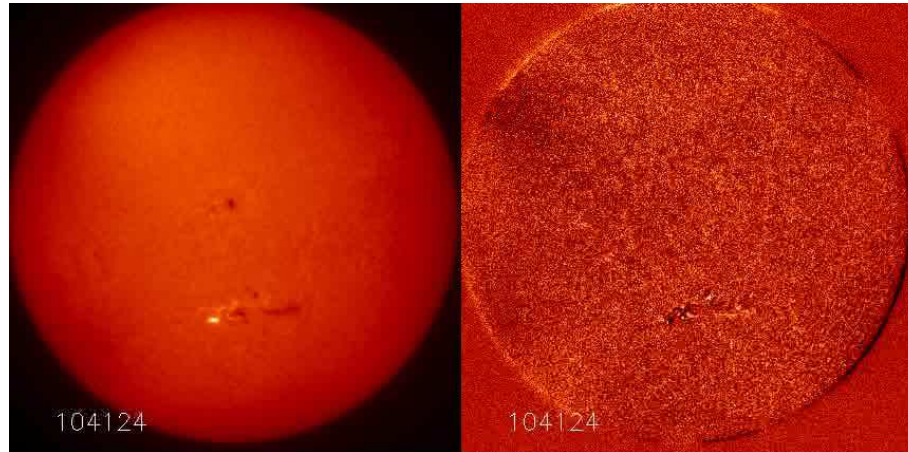
$$S = [R/(\gamma-1)] \ln (P/\rho^\gamma)$$

$$\rightarrow S_2 - S_1 = [R/(\gamma-1)] \ln [(P_2/P_1) (\rho_1/\rho_2)^\gamma] > 0$$



Exemple d'onde de choc hydrodynamique: l'onde de choc de Moreton déclenchée par une éruption solaire très énergétique balaie la surface du soleil en seulement 5 minutes (déplacement à près de 1000 km/s)

Dans la chromosphère à 8000 K, raie H $\alpha$  de l'hydrogène, 656.3 nm, Meudon



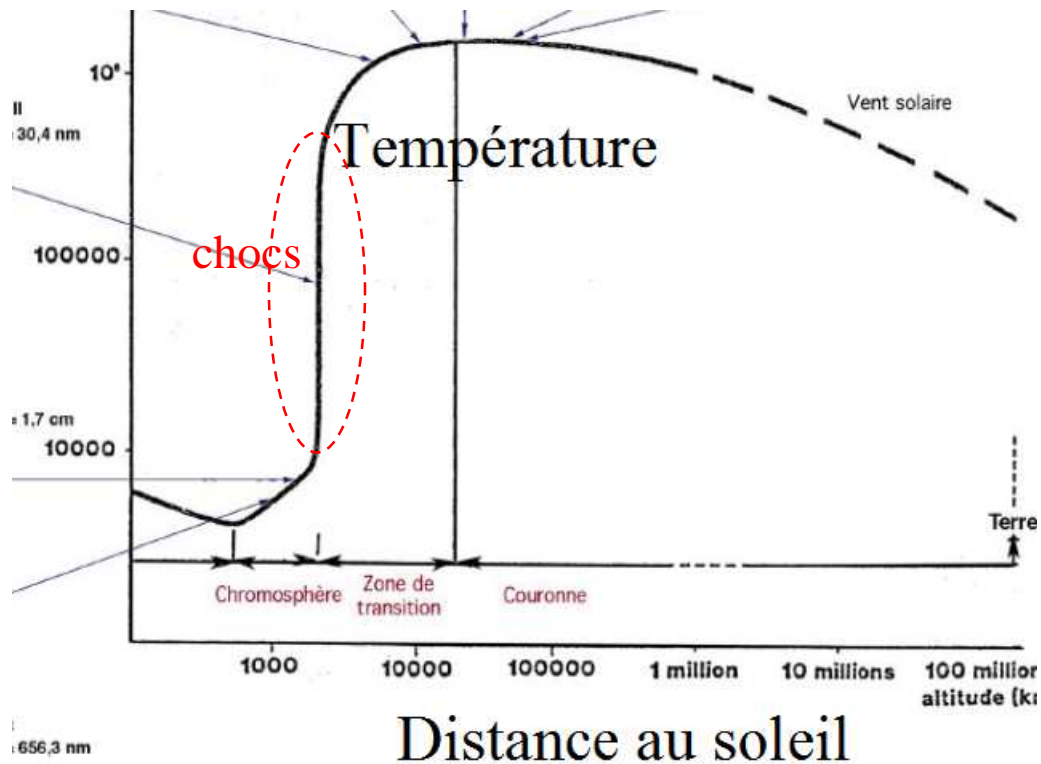
Dans la couronne à  $1.2 \cdot 10^6$  K, Fer XII ionisé, 19.5 nm  
SOHO/EIT ESA/NASA →  
← SDO/AIA NASA



*Application: chauffage de l'atmosphère solaire*

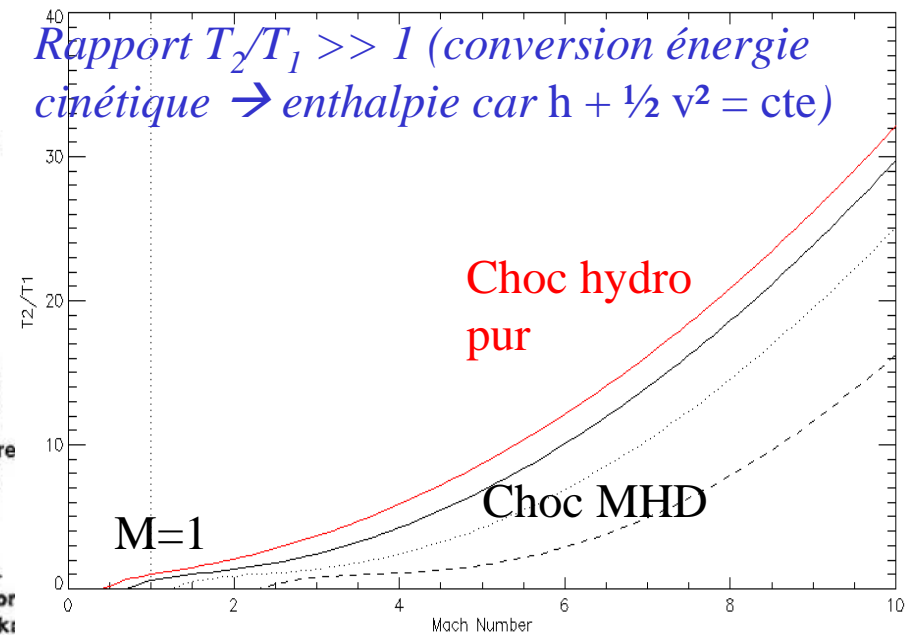
- $\Pi_s = \rho v^2 C_s$  puissance transportée par les ondes sonores ( $\approx 2000 \text{ W/m}^2$ )
- $\Pi_a = \rho v^2 v_a$  puissance transportée par les ondes magnétiques
- $\rightarrow \Pi_s / \Pi_a = \beta^{1/2}$  avec  $\beta \gg 1$  dans la photosphère calme,  $\beta \ll 1$  dans les taches (B fort)
- $\rightarrow$  dominance du transport acoustique (période 300 s) dans le soleil calme

$\rho$  varie en  $e^{-z/h}$ ,  $\rho v = \text{constante} \rightarrow v$  varie en  $e^{z/h}$ , augmente en altitude !  
 $\rightarrow$  formation de chocs dissipant l'énergie lorsque  $v > C_s$  dans la chromosphère



*Augmentation de température dans un choc*

*Rapport  $T_2/T_1 \gg 1$  (conversion énergie cinétique  $\rightarrow$  enthalpie car  $h + 1/2 v^2 = \text{cte}$ )*



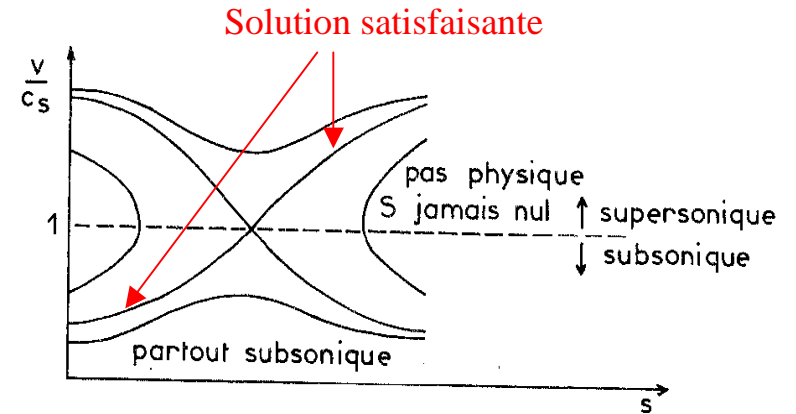
## VI - Exemple d'écoulement transsonique: le vent solaire (solution de Parker)

Le vent solaire est constitué de particules (protons, électrons) qui s'échappent du soleil vers le milieu interplanétaire. Les équations en régime stationnaire, en négligeant la force magnétique, sont:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{v}) = -\operatorname{grad} P + \rho \mathbf{g} \end{cases}$$

En coordonnées sphériques avec écoulement radial :

$$\begin{cases} r^2 \rho v = \text{constante} = r_0^2 \rho_0 v_0 \\ \rho v \frac{dv}{dr} = -dP/dr - \rho GM_S/r^2 \end{cases}$$



On obtient pour un milieu isotherme ( $P = 2 \rho RT/M$ ):  $\frac{dv}{dr} (v - c_s^2/v) = 2 c_s^2/r - (v_1^2/2) (r_0/r^2)$

où  $c_s = (2 RT/M)^{1/2} = 150 \text{ km/s}$  est la vitesse isotherme du son ( $M$  masse molaire du proton)  
 et  $v_1 = (2 GM_S/r_0)^{1/2} = 600 \text{ km/s}$  est la vitesse de libération ( $M_S, r_0$  masse et rayon du soleil)

L'écoulement devient transsonique quand  $v = c_s$  à  $r = r_s = \frac{1}{4} r_0 (v_1/c_s)^2$  soit  $4 r_0$  environ

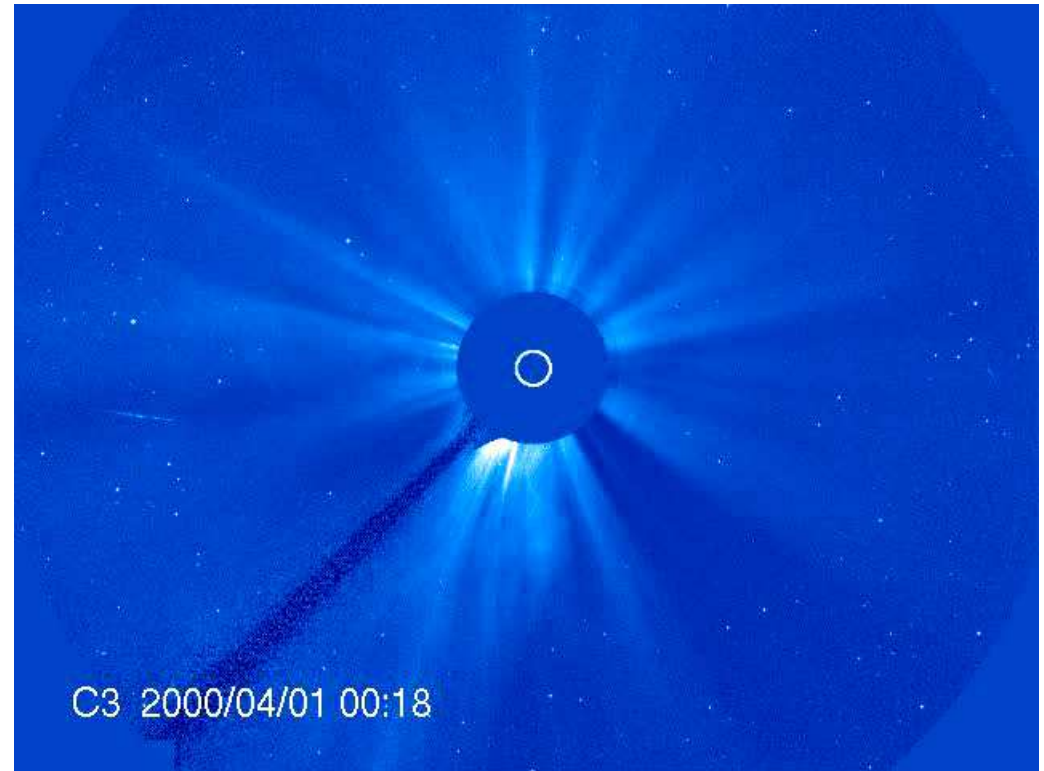
A grande distance du soleil, on a la solution asymptotique car  $v \frac{dv}{dr} = 2 c_s^2/r$ , d'où:

$$v = 2 c_s [\ln(r/r_0)]^{1/2} \quad \text{qui donne } 400 \text{ km/s à l'orbite terrestre.}$$

## Ecoulements à grande distance

Certains phénomènes solaires sont très dynamiques et alimentent le milieu interplanétaire

- 1) le vent solaire permanent constitué de protons, noyaux et électrons (400 km/s à la Terre, écoulement de Parker transsonique) →
- 2) les éjections de masse coronale lors des instabilités magnétiques (ci dessous) s'y ajoutent



SOHO LASCO et Observatoire de Meudon

