Eléments d'analyse vectorielle

Sommaire

champ scalaire, champ vectoriel

opérateur « ***nabla*** »

opérateur **« *gradient* »**

opérateur **«** *divergence* **»**

opérateur « ***rotationnel* »**

opérateur « *Laplacien* »

Lignes de champ (d'un champ vectoriel)

Lignes ou surfaces équipotentielles (d'un champ scalaire)

Circulation d'un champ vectoriel sur un contour

Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

Théorême de Stokes

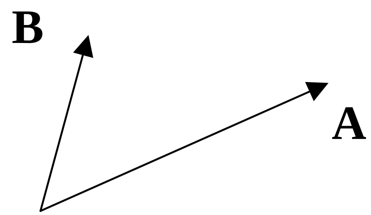
Théorême d'Ostrogradski

Dans tout le cours, les **vecteurs** sont en caractères **gras**

f (x,y,z) désigne un champ scalaire (*exemple: champ de pression atmosphérique)*

A (A_x, A_y, A_z) désigne un champ vectoriel (*exemple: vitesse du vent atmosphérique)*
→ chaque composante est un champ scalaire dépendant de (x, y, z)

Rappel: produit scalaire (est un nombre réel > 0, nul, ou < 0)



$\mathbf{A.B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \|\mathbf{A}\| \ \|\mathbf{B}\| \ \cos(\mathbf{A},\mathbf{B})$

Propriété: **A.B** = 0 si **A** orthogonal à **B**

Exemple: le travail d'une force dW = **F.dOM** (moteur si > 0 ou résistant si < 0)

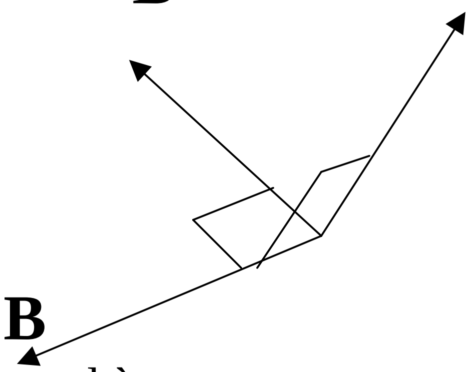
Rappel: produit vectoriel (est un vecteur)

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y \, , \, A_z B_x - A_x B_z \, , \, A_x B_y - A_y B_x)$ est orthogonal à **A** et à **B**

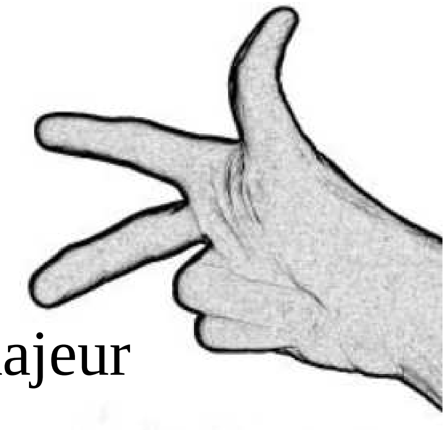
$\|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \ \|\mathbf{B}\| \ |\sin(A,B)|$ = surface du parallélogramme (**A**, **B**)

Propriété: $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$ si **A** colinéaire à **B**

Règles mnémoniques d'orientation du produit vectoriel et de calcul par duplication des deux premières lignes et produits en croix



$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \\ A_z & B_z \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} \\
\begin{matrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{matrix} &
\end{array}
$$



Règle des doigts de la main droite

Rappel: <u>dérivées partielles</u>

Si f(x,y,z) est un champ scalaire, ses dérivées partielles par rapport aux variables spatiales x, y, z (coordonnées d'un point M) sont notées avec des « ∂ ronds »: $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$

→ $\partial f/\partial x$ est la dérivée de f(x,y,z) par rapport à x en gardant y et z constants

→ <u>différentielle</u> $df = (\partial f/\partial x)\, dx + (\partial f/\partial y)\, dy + (\partial f/\partial z)\, dz = \mathbf{grad}\, f \,.\, \mathbf{dOM}$

En coordonnées cartésiennes, on définit:

- L'opérateur « *nabla* »: $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ou opérateur **«** dérivées partielles »

- L'opérateur ***gradient*:** $\mathbf{grad}\, f = \nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$

- L'opérateur ***divergence*:** $\mathrm{div}\, \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial A_x/\partial x + \partial A_y/\partial y + \partial A_z/\partial z$
(produit scalaire de ∇ et de **A** *en cartésiennes uniquement*)

- L'opérateur ***rotationnel*:** $\mathbf{rot}\, \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$
(produit vectoriel de ∇ et **A** *en cartésiennes uniquement*) tel que (règle mnémonique ∇ et **A**):

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{A} = (\partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z \,,\; \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x \,,\; \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y)$$

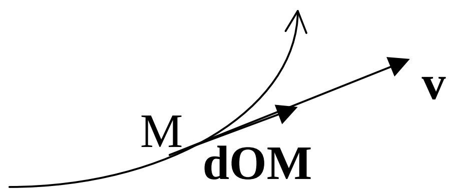
Lignes du champ des vitesses, lignes de courant, lignes fluides

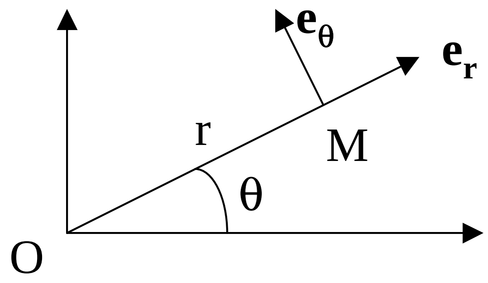
Si **v** est le champ des vitesses, l'équation des lignes de champ est donnée par **v** = k **dOM** (k réel). Equations différentielles obtenues par élimination de k, à intégrer:

coordonnées <u>cartésiennes</u>: $dx / v_x = dy / v_y = dz / v_z$ avec **dOM** (dx, dy, dz)

coordonnées <u>cylindriques</u>: $dr / v_r = r\,d\theta / v_\theta = dz / v_z$ avec **dOM** (dr, r dθ, dz)

<u>**v** est tangent en tout point M d'une ligne fluide</u>.





Potentiel du champ des vitesses

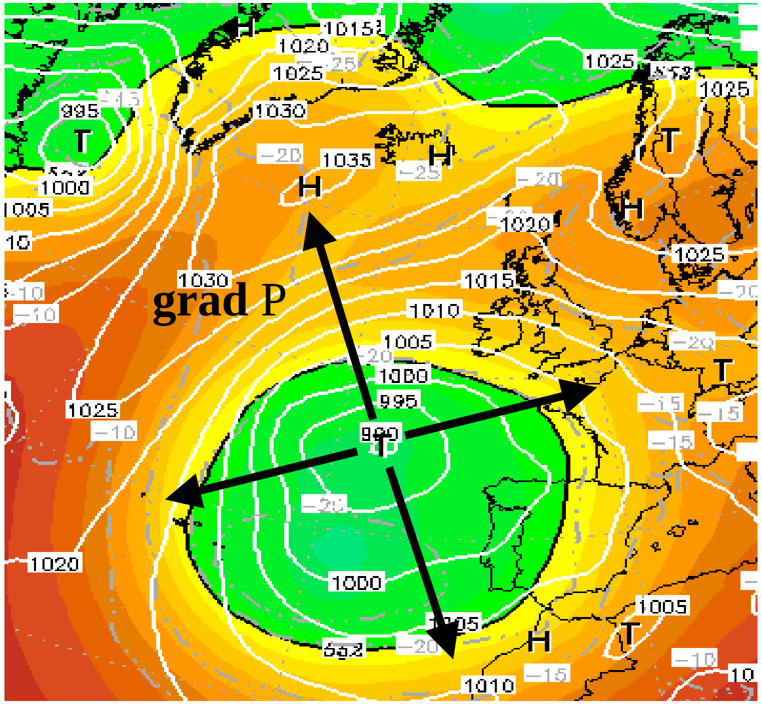
Si **v** dérive d'une fonction potentiel scalaire f telle que **v** = **grad** f , l'équation des lignes équipotentielles (f = constante) est donnée par

df = 0 = **grad** f **. dOM** = **v . dOM =** 0

impliquant que <u>les lignes/surfaces équipotentielles sont orthogonales aux lignes fluides</u>

Le gradient s'applique à un champ <u>scalaire</u> et le résultat est un champ <u>vectoriel</u>

→ caractérise la variation <u>spatiale</u> <u>3D</u> d'un champ <u>scalaire</u>



Exemple: champ de pression P

isobares: P(x,y) = constante

***grad** P est orthogonal aux lignes isobares*

si isobares serrées:

→ *gradient de pression élevé*

→ *vent fort parallèle aux isobares*

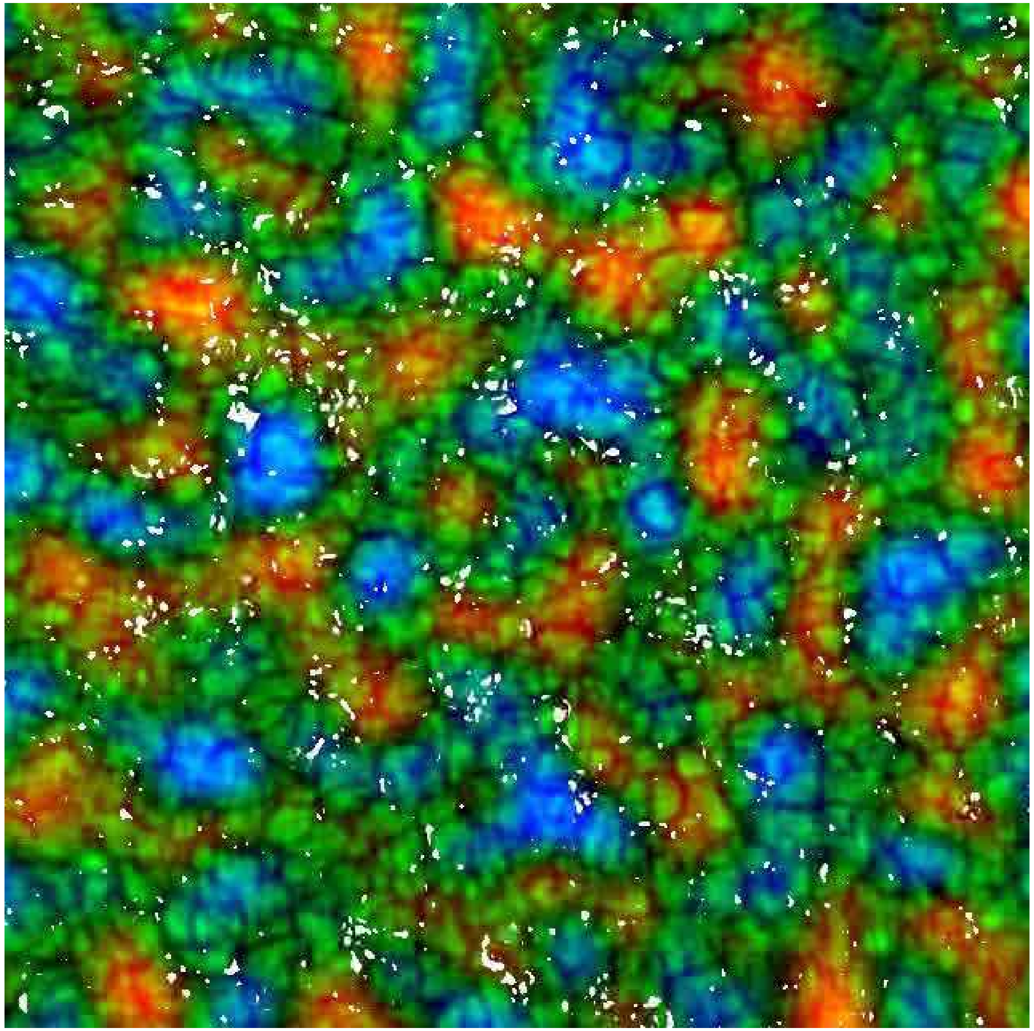
La divergence s'applique à un champ <u>vectoriel</u> et le résultat est un champ <u>scalaire</u>

→ caractérise la variation spatiale du champ <u>vectoriel dans sa direction</u>

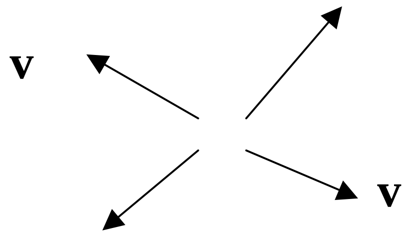
*Exemple du champ des vitesses **v***

*div **v** > 0 mouvements <u>divergents</u> (issus d'une source S)*

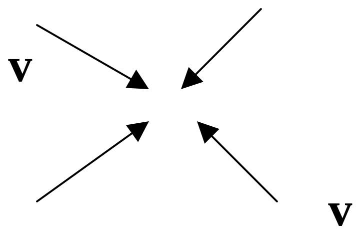
*div **v** < 0 mouvements <u>convergents</u> (vers un puits P)*



Mouvements divergents: div $\mathbf{v} > 0$



Mouvements convergents : div $\mathbf{v} < 0$



Exemple: mouvements horizontaux des granules (cellules convectives) sur la surface du soleil (champ de 50000 km, un granule = 1000 km), satellite Hinode JAXA NASA

div $\mathbf{v} > 0$ mouvements divergents

div $\mathbf{v} < 0$ mouvements convergents

Le rotationnel s'applique à un champ vectoriel et le résultat est un champ vectoriel

→ caractérise la variation spatiale du champ vectoriel dans les directions orthogonales

Exemple: tourbillon fluide de vitesse orthoradiale **v** *dans un plan horizontal*

$[\mathbf{rot\ v}]_z > 0$ rotation dans le sens trigonométrique

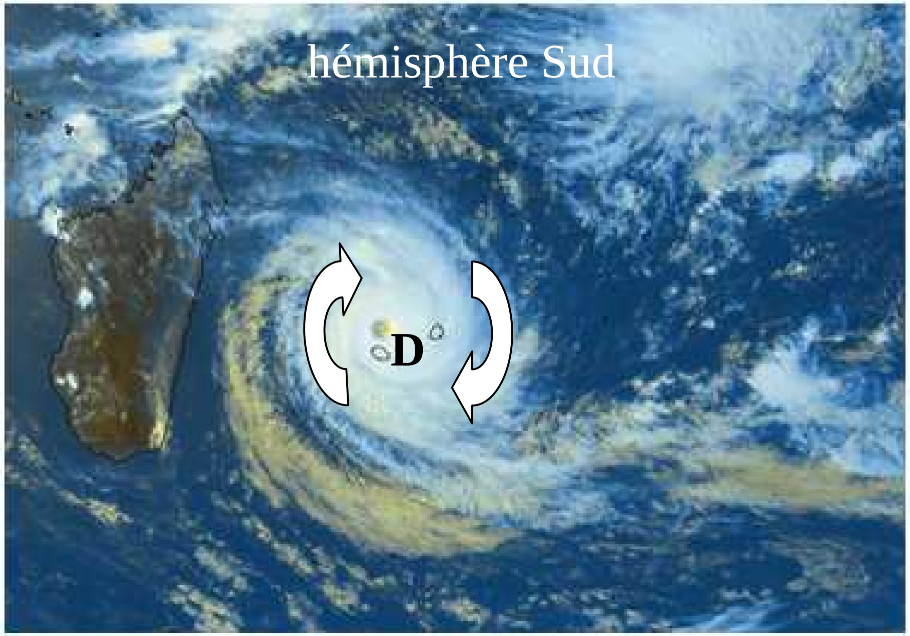
$[\mathbf{rot\ v}]_z < 0$ rotation dans le sens horaire

Météo hémisphère Nord: rotation sens trigonométrique autour d'une dépression

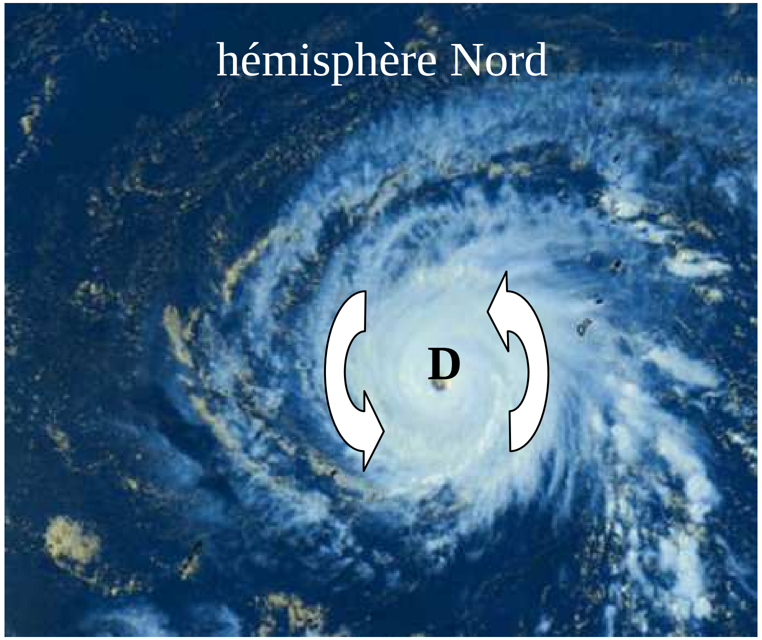
horaire autour d'un anticyclone

(situation opposée dans l'hémisphère Sud)

$\frac{1}{2}$ **rot(v)** est le vecteur tourbillon



tourbillon à $[\mathbf{rot\ v}]_z < 0$ rotation horaire

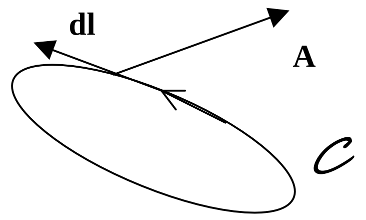


tourbillon à $[\mathbf{rot\ v}]_z > 0$ rotation sens trigo

- Le *Laplacien* scalaire Δf est défini par $\Delta f = \nabla^2 f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2 = \mathrm{div}(\mathbf{grad}\, f)$

- **Le *Laplacien* vectoriel $\Delta \mathbf{A}$** est défini par $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$

En cartésiennes, on peut écrire $\Delta\mathbf{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$ ou Δ est le Laplacien scalaire; ce n'est pas vrai dans les autres systèmes de coordonnées.



*Circulation d'un champ vectoriel **A** sur un contour $\mathcal{C}$*:

c'est l'intégrale curviligne $\boxed{\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl}}$

dl désigne un élément du contour orienté $\mathcal{C}$ (**dl** est tangent au contour en tout point).

Le contour orienté $\mathcal{C}$ peut être ouvert (arc entre deux points) ou bien fermé.

Exemple de circulation: le travail d'une force

Un champ vectoriel **A** dont la circulation est nulle sur tout contour fermé $\mathcal{C}$ est dit à circulation conservative. C'est toujours vrai si **A** = grad **f** où f est une fonction « potentiel »

*Exemple de champ à circulation conservative: le champ de pesanteur **g***

Flux d'un champ vectoriel ***A*** *sur une surface* $\mathcal{S}$:

c'est l'intégrale surfacique $\boxed{\iint \mathbf{A} \,.\, \mathbf{dS}}$

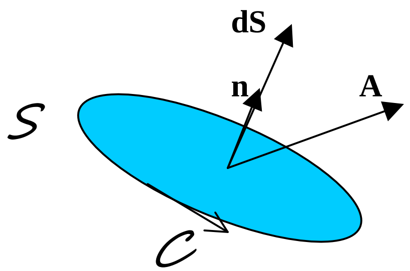
La surface $\mathcal{S}$ peut être <u>ouverte</u> (appuyée sur un contour – exemple: un bonnet) ou bien <u>fermée</u> (entourant un volume fini $\mathcal{V}$ – exemple: un ballon)

dS désigne un élément de surface: le vecteur surface est défini par **dS** = **n** dS où **n** est la normale locale.

Si $\mathcal{S}$ est une surface <u>fermée</u> entourant un volume $\mathcal{V}$, **n** est par convention vers l'<u>extérieur</u>.

Si $\mathcal{S}$ est une surface <u>ouverte</u>, le sens de **n** dépend de l'orientation du contour fermé $\mathcal{C}$ sur lequel s'appuie $\mathcal{S}$.

règle des doigts de la main <u>droite</u>:
pouce = $\mathcal{C}$, index vers le centre du contour, majeur = ***n***

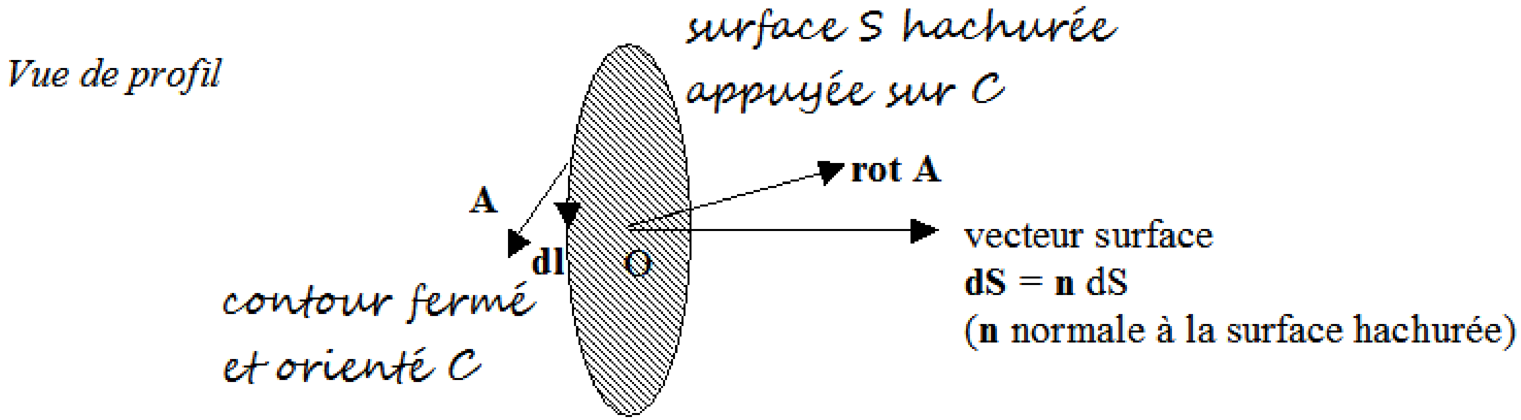


Un champ de flux nul sur toute surface <u>fermée</u> $\mathcal{S}$ est dit à <u>flux conservatif</u>

exemple de champ à flux conservatif: le champ des vitesses d'un fluide incompressible

Théorême de Stokes ou du rotationnel: $\boxed{\oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = \iint \mathbf{rotA} \cdot \mathbf{dS}}$

La circulation du champ vectoriel **A** sur un contour fermé $\mathcal{C}$ est égale au flux de son rotationnel à travers n'importe quelle surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur ce contour fermé.

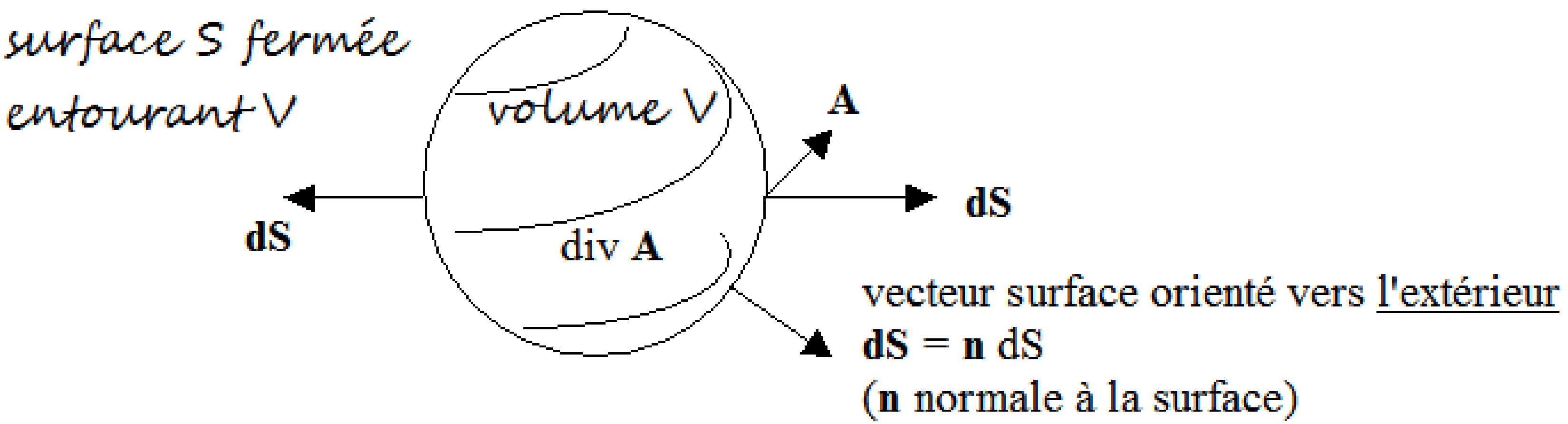


On choisit une orientation arbitraire du contour $\mathcal{C}$. Le vecteur surface **dS** est alors orienté par $\mathcal{C}$ selon la règle des doigts de la main *droite*:

*pouce sur le contour $\mathcal{C}$ dans le sens choisi, index vers le centre O, le majeur indique **dS**.*

Théorême d'Ostrogradski ou « flux divergence »: $\boxed{\oiint \mathbf{A}\,.\,\mathbf{dS} = \iiint \mathrm{div}\mathbf{A}\;\mathrm{dv}}$

Le flux du champ vectoriel **A** au travers d'une surface <u>fermée</u> S est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume intérieur V délimité par cette surface.



Exemple: **A = v** vitesse d'un fluide incompressible

div v = 0

$\rightarrow \oiint \mathbf{v}\,.\,\mathbf{dS} = 0$

$\rightarrow$ $v_1\,S_1 = v_2\,S_2$ conservation du débit volumique