

Introduction à la l'hydrodynamique et à la MHD

Equations générales

- équation de conservation de la masse (masse volumique, densité de qté de mouvement)
- cinématique des fluides: divergence, vorticité, écoulements à potentiel des vitesses
- dérivée particulaire, équation d'Euler et forces: pression, gravité, viscosité
- nombre de Reynolds, temps diffusif et temps dynamique, régime laminaire et turbulent (exemple de l'atmosphère solaire)
- régime stationnaire: loi de Bernouilli et ses applications
- gaz parfait, équation d'état, énergie interne et enthalpie
- équation de conservation de l'énergie
- équation du mouvement dans un tube magnétique: effets des forces de pression, de gravité et du champ magnétique (Laplace); écoulement longitudinal et équilibre transversal
- nombre "beta" du fluide en présence d'un champ magnétique; exemple de l'atmosphère solaire

Diffusion/advection du champ magnétique

- équation de diffusion/advection
- nombre de Reynolds magnétique, temps dynamique et temps diffusif
- temps caractéristique de déchirement d'une nappe de courant; reconnexion magnétique

Ondes et chocs

- ondes de pression longitudinales
- ondes magnétiques transversales dites d'Alfvén
- ondes de gravité: la houle
- discontinuités: ondes de choc hydrodynamiques
- un exemple d'écoulement transsonique: le vent solaire

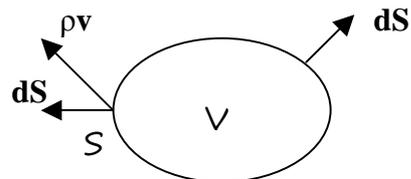
L'hydrodynamique traite des mouvements fluides et est basée sur la description du milieu comme constitué d'un gaz de vitesse macroscopique \mathbf{v} et de masse volumique ρ , sous l'action de forces comme les forces de pression, de viscosité, de pesanteur ou encore de Laplace (s'il y a des courants électriques). En présence de champ magnétique, l'hydrodynamique devient la magnétohydrodynamique ou MHD, résultat du couplage entre les équations de l'hydrodynamique et de l'électromagnétisme (Maxwell). Dans ce qui suit, les **vecteurs** sont écrits en **gras**.

I – Les équations de base de l'hydrodynamique

1 - Remarques générales sur les équations de conservation

Les lois de conservation d'un champ scalaire $\rho(x, y, z, t)$ (exemple: densité volumique de masse ou d'énergie) suivent une équation de conservation du type :

$$\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = s$$



où \mathbf{v} est le vecteur vitesse et s un terme source ou perte (selon son signe). Par intégration sur un volume V fermé par une surface S , on obtient en appliquant le théorème d'Ostrogradski, où dv est un élément de volume et $d\mathbf{S}$ un élément de surface orientée ($d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, \mathbf{n} normale à la surface) :

$$\partial/\partial t [\iiint \rho dv] + \iint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint s dv$$

$\iint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ est le flux de la quantité ρ à la frontière entourant le volume V . Introduisons v_n , composante normale de \mathbf{v} à la surface fermée S qui enveloppe le volume :

$$\partial/\partial t [\iiint \rho dv] + \iint \rho v_n dS = \iiint s dv$$

On constate, à partir de cette équation, que la quantité $\iiint \rho dv$ (par exemple: masse, énergie du volume V) est conservative à condition que :

- il n'y ait pas de terme source ou perte ($s = 0$)
- le flux de ρ sur la frontière soit nul, $\iint \rho v_n dS = 0$ (les entrées compensent les sorties aux frontières)

En régime stationnaire et en l'absence de terme source s , $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ se traduit par $\iint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$ sur la surface fermée S , ce qui signifie que les entrées sont compensées par les sorties aux frontières.

Remarque: l'équation de Maxwell flux $\text{div} \mathbf{B} = 0$ a la même signification: $\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ sur la surface fermée S entourant le volume V implique que le flux magnétique entrant est égal au flux sortant.

2 - Equation de conservation de la masse (équation de continuité)

$\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$	$\rho\mathbf{v}$ est la <u>densité volumique de quantité de mouvement</u>
--	---

En régime stationnaire, $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ signifie $\iint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$ sur la surface fermée S entourant le volume V ; c'est la conservation du débit massique (en kg s^{-1}): masse entrante = masse sortante. Si le fluide est incompressible, $\iint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$ est la conservation du débit volumique (en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$): volume entrant = volume sortant.

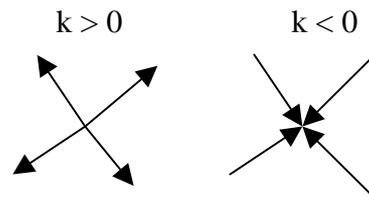
3 - cinématique des fluides

div v caractérise les mouvements convergents/divergents

Un champ de vitesse, en coordonnées polaires, tel que $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r = k \mathbf{r} \mathbf{e}_r$, k constante, est tel que:

rot v = 0 et $\text{div} \mathbf{v} = 1/r \partial(r v_r)/\partial r = 2k$

- $k > 0$: les mouvements sont divergents
- $k < 0$: les mouvements sont convergents

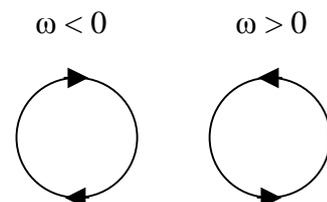


rot v caractérise les mouvements de rotation, les tourbillons

Un champ de vitesse, en coordonnées polaires, tel que $\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta = \omega \mathbf{r} \mathbf{e}_\theta$, ω constante, est tel que:

$\text{div} \mathbf{v} = 0$ et **rot v = $1/r \partial(r v_\theta)/\partial r \mathbf{e}_z = 2\omega \mathbf{e}_z$**

- $\omega > 0$: le fluide est en rotation dans le sens trigonométrique, sa vorticité 2ω est positive
- $\omega < 0$: le fluide est en rotation dans le sens horaire, sa vorticité 2ω est négative



<p>rot v est la vorticité</p> <p>$\Omega = 1/2 \text{rot v}$ est le vecteur tourbillon</p>

Lignes fluides ou lignes de courant

Lignes du champ des vitesses définies en un point M par la colinéarité entre \mathbf{v} (v_x, v_y, v_z) et la tangente locale à la ligne de champ $d\mathbf{OM}$, soit $\mathbf{v} = k d\mathbf{OM}$ (k réel), ce qui donne les équations:

$$dx / v_x = dy / v_y = dz / v_z$$

Écoulement incompressible

Un tel écoulement est à divergence nulle: $\boxed{\text{div } \mathbf{v} = 0}$

Écoulement irrotationnel à potentiel des vitesses

Un écoulement est dit irrotationnel lorsque sa vorticité est nulle: $\boxed{\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}}$

Dans ce cas, il existe une fonction potentiel des vitesses φ telle que $\boxed{\mathbf{v} = \text{grad } \varphi}$

et si en plus le fluide est incompressible, ce potentiel obéit à l'équation de Laplace $\boxed{\Delta\varphi = 0}$

Analogie cinématique des fluides incompressibles et magnétostatique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{v} = 2 \boldsymbol{\Omega} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \end{array} \right.$$

sont des équations analogues; \mathbf{v} est à flux conservatif et obéit au "théorème d'Ampère":

$$\boxed{\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2 \iint \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S}}$$

La circulation du champ de vitesse \mathbf{v} sur un contour fermé \mathcal{C} est égal au flux de la vorticité au travers de la surface S enlacée par ce contour

→ exemple: cas d'un vecteur tourbillon constant, écoulement orthoradial

On choisit un contour circulaire de rayon r sur lequel s'appuie le disque de surface πr^2

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2 \pi r v \\ \iint \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S} = \Omega \pi r^2 \quad \text{d'où l'écoulement orthoradial (tourbillon) } v = \Omega r$$

Analogie écoulements irrotationnels incompressibles et électrostatique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{v} = s \\ \mathbf{v} = \text{grad } \varphi \\ \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \mathbf{E} = - \text{grad } V \\ \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

où s est un terme source ou perte en s^{-1} (selon son signe); ces équations sont analogues; \mathbf{v} est à circulation conservative et obéit au "théorème de Gauss":

$$\boxed{\iint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint s dV = S \quad (\text{m}^3 \text{ s}^{-1})}$$

Le flux du champ de vitesse \mathbf{v} à travers une surface fermée S est égal au débit S de la source intérieure au volume V entouré par cette surface

→ exemple: cas d'une source à symétrie sphérique de débit d pour $r < R$ et nul pour $r > R$

L'écoulement est radial; on choisit une surface de Gauss sphérique de rayon r

si $r < R$: $v 4\pi r^2 = s \frac{4}{3} \pi r^3$ d'où l'on déduit $v = s r/3$

si $r > R$: $v 4\pi r^2 = s \frac{4}{3} \pi R^3$ d'où l'on déduit $v = s R^3 / 3r^2$

Écoulements 2D irrotationnels incompressibles dans un plan xOy

Un tel écoulement est tel que $\text{div } \mathbf{v} = 0$ et $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

C'est l'analogie des champs potentiels en magnétostatique. On a $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$ équation de Laplace.

Dans un espace à deux dimensions (plan xOy) avec $\mathbf{v} (v_x, v_y, 0)$ dépendant seulement des coordonnées x et y de l'espace, on peut écrire $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi(x,y)$ fonction potentiel d'une part, et d'autre part $\mathbf{v} = \text{rot } (\psi(x,y) \mathbf{e}_z)$, ce qui implique $\mathbf{v} = \text{grad } \psi \wedge \mathbf{e}_z$, avec $\text{grad } (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)$.

$\varphi(x,y) = \text{constante}$ est l'équation des lignes équipotentielles
 $\psi(x,y) = \text{constante}$ est l'équation des lignes de champ ou lignes fluides

De l'égalité $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \wedge \mathbf{e}_z$,

on voit que les fonctions $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ obéissent aux conditions de Cauchy:

$$\begin{cases} v_x = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y \\ v_y = \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \end{cases}$$

impliquant $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$. Les deux fonctions sont donc harmoniques car leur Laplacien est nul.

Posons $z = x + i y$ et $z^* = x - i y$ son conjugué et considérons la fonction complexe $f(z,z^*) = \varphi + i \psi$

On peut évaluer assez aisément $\partial f/\partial z$ ainsi que $\partial f/\partial z^*$.

Par exemple, $\partial f/\partial z = (\partial f/\partial x) (\partial x/\partial z) + (\partial f/\partial y) (\partial y/\partial z)$ et $\partial f/\partial z^* = (\partial f/\partial x) (\partial x/\partial z^*) + (\partial f/\partial y) (\partial y/\partial z^*)$

A l'aide du changement de variable:

$x = 1/2 (z + z^*)$ et $y = -i/2 (z - z^*)$,

on trouve: $\partial x/\partial z = 1/2$, $\partial y/\partial z = -i/2$, $\partial x/\partial z^* = 1/2$ et $\partial y/\partial z^* = i/2$.

Sachant que $f(z,z^*) = \varphi + i \psi$, on obtient finalement: $\partial f/\partial z = \partial\varphi/\partial x - i \partial\varphi/\partial y$ et $\partial f/\partial z^* = 0$

On a donc démontré les deux conclusions essentielles suivantes:

- la fonction complexe $f(z) = \varphi + i \psi$ est une fonction analytique de la variable $z = x + i y$

- $df(z)/dz = v_x - i v_y$

Le champ des vitesses complexe $v_x - i v_y$ dérive donc du potentiel complexe $f(z) = \varphi + i \psi$

→ exemple: si l'écoulement se fait à vitesse constante,

$$f(z) = (v_x - i v_y) z = (v_x - i v_y) (x + i y) = (x v_x + y v_y) + i (-x v_y + y v_x) = \varphi + i \psi$$

$\varphi(x,y) = x v_x + y v_y$ donne les lignes équipotentielles $y = - (v_x/v_y) x + \text{cte}$ (droites)

$\psi(x,y) = -x v_y + y v_x$ donne les lignes de champ $y = (v_y/v_x) x + \text{cte}$ (droites)

4 - Equation d'Euler du mouvement fluide

$$\rho \, d\mathbf{v}/dt = - \mathbf{grad} P + \mathbf{f}$$

où \mathbf{f} désigne les forces par unité de volume (N m^{-3}) autres que les forces dûes à la pression P . $d\mathbf{v}/dt$ s'appelle dérivée particulaire de la vitesse. Comme la vitesse du fluide en un point $M(x,y,z)$ de l'espace dépend de x, y, z et t (description eulérienne à 4 variables), on peut écrire:

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= \partial\mathbf{v}/\partial x \, dx + \partial\mathbf{v}/\partial y \, dy + \partial\mathbf{v}/\partial z \, dz + \partial\mathbf{v}/\partial t \, dt \\ \text{d'où } d\mathbf{v}/dt &= \partial\mathbf{v}/\partial x \, dx/dt + \partial\mathbf{v}/\partial y \, dy/dt + \partial\mathbf{v}/\partial z \, dz/dt + \partial\mathbf{v}/\partial t \\ &= v_x \partial\mathbf{v}/\partial x + v_y \partial\mathbf{v}/\partial y + v_z \partial\mathbf{v}/\partial z + \partial\mathbf{v}/\partial t = (v_x \partial/\partial x) \mathbf{v} + (v_y \partial/\partial y) \mathbf{v} + (v_z \partial/\partial z) \mathbf{v} + \partial\mathbf{v}/\partial t \end{aligned}$$

$$\boxed{d\mathbf{v}/dt = \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}) + \partial\mathbf{v}/\partial t}$$

Dans la description Lagrangienne, qui suit le fluide, la quantité $d\mathbf{v}/dt$ est l'accélération. Dans la description Eulérienne (position fixe), l'accélération est la somme de l'accélération locale $\partial\mathbf{v}/\partial t$ et de l'accélération convective $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v})$. L'opérateur $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$ est $v_x \partial/\partial x + v_y \partial/\partial y + v_z \partial/\partial z$.

Remarque: on a l'identité $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}) = \mathbf{grad}(\mathbf{v}^2/2) + \mathbf{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ où $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 2 \mathbf{\Omega}$ (vecteur tourbillon); un écoulement irrotationnel est tel que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}) = \mathbf{grad}(\mathbf{v}^2/2)$.

L'équation du mouvement ou équation d'Euler devient:

$$\boxed{\rho [\partial\mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v})] = - \mathbf{grad} P + \mathbf{f}} \quad (\mathbf{f} \text{ en } \text{N m}^{-3})$$

Par exemple, $\boxed{\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} + \nu \rho \Delta \mathbf{v}}$ (en N m^{-3}), expression de la force dans laquelle:

1) $\rho \mathbf{g}$ est le poids volumique

2) $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ est la force de Laplace volumique, \mathbf{j} désignant la densité de courant (A m^{-2}) reliée à l'intensité du courant électrique total I (Ampères) par la loi $I = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ (flux de la densité \mathbf{j}).

3) $\mu \Delta \mathbf{v}$ sont les forces de frottement visqueuses par unité de volume; l'équation d'Euler en présence de viscosité porte alors le nom d'équation de Navier Stokes; dans cette expression, $\Delta \mathbf{v}$ est le Laplacien du vecteur vitesse; μ est la viscosité dynamique en Poiseuille (Pa s ou encore $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$); on définit aussi la quantité $\nu = \mu/\rho$ comme étant la viscosité cinématique en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

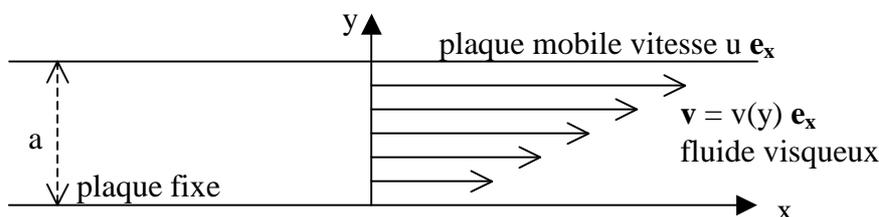
Numériquement, et en première approximation pour un gaz, on a :

$\mu = \nu \rho = 2.2 \cdot 10^{-17} T^{5/2} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ (Poiseuille), où T est la température en Kelvins;

- dans les conditions de la photosphère solaire, avec $T = 10^4 \text{ K}$ et $\rho = 10^{-7} \text{ kg m}^{-3}$, la viscosité dynamique μ est voisine de 10^{-7} Poiseuille et que la viscosité cinématique ν est voisine de $1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

- dans la couronne solaire, avec $T = 10^6 \text{ K}$ et $\rho = 10^{-12} \text{ kg m}^{-3}$, on trouve μ voisin de 10^{-2} Poiseuille et ν voisin de $10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Equation de Navier Stokes stationnaire: exemple de l'écoulement de Couette plan



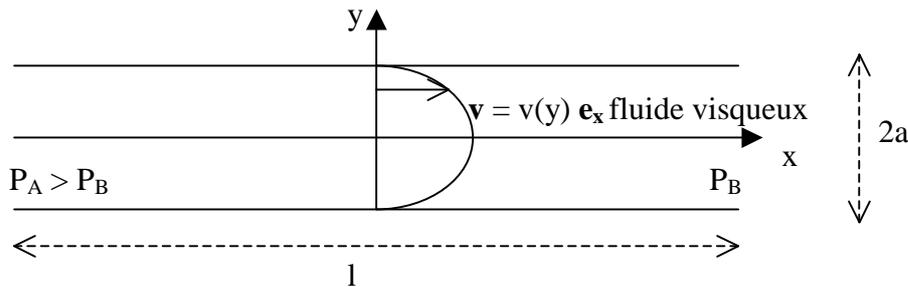
Dans cet écoulement entre deux plans ($y = 0$ et $y = a$), le fluide visqueux est entraîné par une plaque mobile horizontale en $y = a$. Le problème ne dépend que de la variable y et la vitesse du fluide est selon Ox . Dans la direction Oy , l'équation de Navier Stokes est celle de l'équilibre hydrostatique:

$$-dP/dy - \rho g = 0 \text{ d'où } P(y) = P(0) - \rho g y \text{ (si incompressible)}$$

Dans la direction Ox , il n'y a pas de gradient de pression, l'équation de Navier Stokes se réduit à:

$$\Delta v = 0 \text{ soit } d^2v/dy^2 = 0 \text{ avec les conditions aux limites } v(0) = 0 \text{ et } v(a) = u, \text{ d'où } \boxed{v(y) = u (y/a)}$$

Equation de Navier Stokes stationnaire: exemple de l'écoulement de Poiseuille plan



Dans cet écoulement entre deux plans ($y = -a$ et $y = a$), le fluide visqueux est entraîné vers la droite par un gradient de pression uniforme et égal à $(P_B - P_A)/l < 0$. Le problème ne dépend que de la variable y et la vitesse du fluide est selon Ox où l'équation de Navier Stokes se réduit à:

$$-dP/dy + \mu \Delta v = 0 \text{ soit } d^2v/dy^2 = (P_B - P_A)/\mu l < 0$$

avec les conditions aux limites $v(-a) = v(a) = 0$, on obtient $\boxed{v(y) = 1/2 [(P_A - P_B)/\mu l] (a^2 - y^2)}$

Le profil des vitesses est parabolique entre les deux plans.

La force de frottement fluide exercée sur les plans $y = \pm a$ de surface S est donnée par la loi:

$$\boxed{\mathbf{F} = -\mu |dv/dy| S \mathbf{e}_x}$$
 en $y = \pm a$ (unité: N), elle est opposée au mouvement.

ce qui donne en module: $F = [(P_A - P_B)/l] S a$

Le débit volumique D est obtenu par intégration du profil des vitesses $v(y)$ sur la section entre les plans $y = \pm a$, il est proportionnel au gradient de pression, qui fait avancer le fluide:

$$D = 2/3 [(P_A - P_B)/\mu l] a^3 d \text{ (unité: } m^3 s^{-1}\text{)}$$

où d est une dimension caractéristique orthogonale au plan de la figure, selon Oz (la section entre les plans étant de surface $2 a d$)

Les échelles de temps caractéristiques: temps dynamique et temps diffusif

En l'absence de forces autres que visqueuses, l'équation du mouvement s'écrit:

$$\boxed{\rho [\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v})] = \nu \rho \Delta \mathbf{v}}$$

la partie diffusive $\partial \mathbf{v} / \partial t = \nu \Delta \mathbf{v}$ (il s'agit d'une équation de diffusion pure) possède une constante de temps caractéristique, dite temps diffusif:

$$\tau_{\text{diff}} = L^2 / \nu$$

et la partie convective $\partial \mathbf{v} / \partial t = - \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v})$ possède une constante de temps, dite temps dynamique:

$$\tau = L / v$$

Le rapport de ces deux temps caractéristiques est appelé nombre de Reynolds (L et v sont respectivement des longueurs et vitesses caractéristiques du système fluide):

$$\text{Re} = \tau_{\text{diff}} / \tau = L v / \nu$$

Re représente aussi le rapport entre la force convective $\| \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) \|$ et visqueuse $\| \rho \nu \Delta \mathbf{v} \|$.

Dans les conditions de la photosphère solaire, avec $T = 10^4$ K, $L = 10^4$ km, $v = 1$ km/s, $\nu = 1$ m² s⁻¹, Re est voisin de 10^{10} , ce qui signifie que les termes visqueux sont négligeables dans ce régime. Dans la couronne, avec $T = 10^6$ K, $L = 10^5$ km, $v = 100$ km/s, $\nu = 10^{10}$ m² s⁻¹, Re avoisine 10^3 .

Écoulement permanent laminaire, turbulent

L'équation du mouvement devient en régime permanent et en ne considérant que les forces de pression et de frottement:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) = - \text{grad} P + \nu \rho \Delta \mathbf{v}$$

Si $\text{Re} \ll 1$, alors $\| \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) \| \ll \| \nu \Delta \mathbf{v} \|$; il reste $-\text{grad} P + \nu \rho \Delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$; cette équation est linéaire en \mathbf{v} et l'écoulement est laminaire car sa solution est unique.

Si $\text{Re} \gg 1$, alors $\| \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) \| \gg \| \nu \Delta \mathbf{v} \|$; il reste $\text{grad} P + \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$; cette équation est non linéaire en \mathbf{v} et l'écoulement est turbulent; il développe des petites échelles locales de variation.

Force d'inertie de Coriolis

La force d'inertie de Coriolis a une action sur le mouvement d'un fluide dans un référentiel en rotation, comme une étoile. Si Ω est la vitesse angulaire de rotation de l'étoile autour de son axe, la force d'inertie de Coriolis est, par unité de volume, $\mathbf{f} = - 2 \rho \Omega \wedge \mathbf{v}$ (en N m⁻³). Le temps caractéristique associé est:

$$\tau_c = 1 / \Omega$$

Sachant que $\tau = L / v$ est le temps dynamique, on appelle nombre de Rossby le rapport :

$$\text{Ro} = \tau_c / \tau = v / (\Omega L)$$

Ro représente aussi le rapport entre la force advective $\| \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) \|$ et de Coriolis $\| \rho \Omega \wedge \mathbf{v} \|$.

Dans les conditions de la photosphère solaire, avec $L = 10^4$ km, $v = 1$ km/s, $\Omega = 2.5 \cdot 10^{-6}$ rd s⁻¹, Ro est voisin de 100, ce qui signifie que la force de Coriolis peut souvent être négligée. Cependant, aux grandes échelles ($L > 10^5$ km), elle joue un rôle dans la déformation des régions actives.

- Exemple du rôle de la force d'inertie de Coriolis: écoulement géostrophique

On rencontre de tels écoulements en météorologie terrestre ou sur les planètes géantes gazeuses.

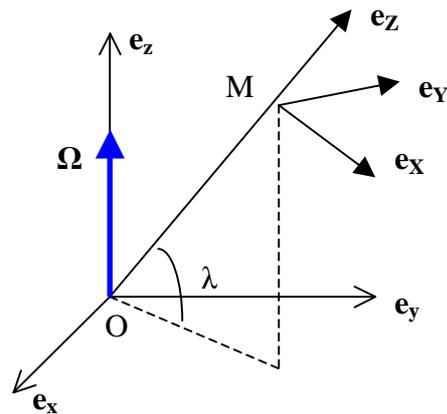
Dans un tel écoulement, la force d'inertie de Coriolis est équilibrée par le gradient de pression:

$$\boxed{-\text{grad } P - 2 \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}} \quad \text{où } \boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$$

on en déduit: $\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v} = -(1/2 \rho \Omega) \text{grad } P$

Considérons un point M à la surface d'une planète en rotation autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire Ω .

Soit $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ le trièdre fixe et $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ le trièdre local au point M, le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ étant horizontal en M, et \mathbf{e}_z la verticale locale.



$$\mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}) = -(1/2 \rho \Omega) \mathbf{e}_z \wedge \text{grad } P$$

Nous supposons que le vecteur vitesse \mathbf{v} est contenu dans le plan tangent en M donc horizontal de sorte que $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v} = 0$.

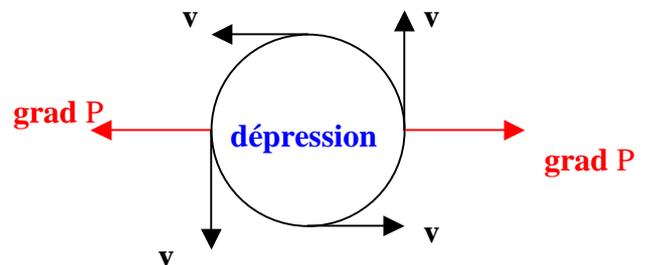
$$\mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{v} = -\sin \lambda \mathbf{v} \quad \text{où } \lambda \text{ est la latitude du lieu (positive au Nord).}$$

En conséquence, $\boxed{\mathbf{v} = (1/2 \rho \Omega \sin \lambda) \mathbf{e}_z \wedge \text{grad } P}$

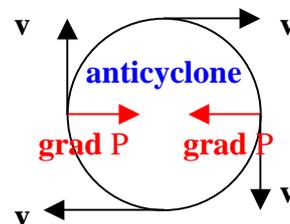
Cette équation montre que la vitesse \mathbf{v} est orthogonale au gradient horizontal de pression; or pour une altitude Z fixe, les isobares ($P = \text{constante}$) sont aussi orthogonales à $\text{grad } P$ puisque $dP = \text{grad } P \cdot d\mathbf{OM} = 0$. Les lignes fluides d'un écoulement géostrophique sont donc parallèles aux isobares du champ de pression. On pourrait aussi écrire $\mathbf{v} = \text{rot} [-P / (2 \rho \Omega \sin \lambda) \mathbf{e}_z]$ si ρ varie peu.



La grande tache rouge de Jupiter, un anticyclone dans l'hémisphère Sud en rotation antihoraire (les sens s'inversent entre les hémisphères car $\sin \lambda$ change de signe)



Écoulement dans le sens antihoraire autour d'une dépression dans l'hémisphère Nord ($\lambda > 0$)



Écoulement dans le sens horaire autour d'un anticyclone dans l'hémisphère Nord ($\lambda > 0$)

L'exemple fonctionne aussi pour la circulation des vents en météorologie terrestre.

Force d'inertie centrifuge d'entraînement et aplatissement des corps en rotation

La force d'inertie centrifuge d'entraînement est à l'origine de l'aplatissement des corps en rotation.

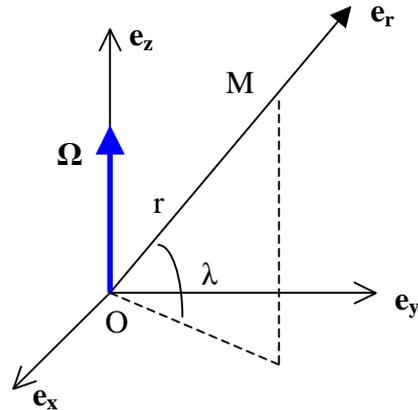
Son expression est, au point M, de projection H sur l'axe de rotation, par unité de volume:

$$\mathbf{f} = \rho \Omega^2 \mathbf{HM} \quad (\text{en } \text{N m}^{-3})$$

La force d'inertie d'entraînement est équilibrée en M par le gradient de pression et la gravité \mathbf{G} :

$$-\mathbf{grad} P + \rho \mathbf{G} + \rho \Omega^2 \mathbf{HM} = \mathbf{0} \quad \text{où } \Omega = \Omega \mathbf{e}_z$$

Supposons le corps de densité uniforme, soit $\rho = \text{constante}$ (cette hypothèse est fautive, car ρ varie en fonction de la distance au centre O).



Le champ de pesanteur d'un corps de densité ρ uniforme est donné par le théorème de Gauss du champ de gravitation (voir électromagnétisme).

Flux à travers une sphère de rayon $r = G 4\pi r^2 = (-4\pi K) \times \text{masse intérieure} = (-4\pi K) \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$

d'où $G = -4\pi K \rho r / 3$ avec $r^2 = OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

En surface d'une sphère de rayon R, $g = 4\pi K \rho R / 3$, d'où $G = -g r/R$ et $\mathbf{G} = -\mathbf{grad}(g r^2/2R)$

Or $\mathbf{HM} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y = \mathbf{grad} (x^2+y^2)/2$

D'où l'équation d'équilibre: $\mathbf{grad} (-P - \rho g (x^2+y^2+z^2)/2R + \rho \Omega^2 (x^2+y^2)/2) = 0$

On en déduit: $P + \rho (g/R - \Omega^2) (x^2+y^2)/2 + \rho g z^2/2R = \text{constante}$

qui s'écrit: $[(1/R^2 - \Omega^2/gR) (x^2+y^2) + z^2/R^2] = 2 (\text{constante} - P) / \rho g R$

$P = \text{constante}$ donne l'équation d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe de rotation Oz . C'est une sphère si $\Omega = 0$.

Les demi axes sont donnés par $1/a^2 = 1/R^2 - \Omega^2/gR$ et $1/b^2 = 1/R^2$

d'où $a = R (1 - \Omega^2 R/g)^{-1/2}$ et $b = R$ avec $a > b$ (renflement équatorial)

Comme le renflement équatorial est généralement faible, on peut écrire: $a = R (1 + \Omega^2 R/2g)$

L'aplatissement est défini par $e = (a - b)/b = \Omega^2 R/2g$

Pour la Terre, $T = 2\pi/\Omega = 24$ heures, $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, on trouve $e = 1.7 \cdot 10^{-3}$ (facteur 2 trop faible)
L'ellipsoïde porte le nom de géoïde.

Pour le Soleil, $T = 2\pi/\Omega = 26$ jours, $g = 275 \text{ m s}^{-2}$, on trouve $e = 10^{-5}$ (bonne valeur)

5 - Mouvement d'un fluide en régime stationnaire

L'équation du mouvement en présence de gravité dans un fluide incompressible mis en mouvement par les gradients de pression (sans autre force que la gravité) s'écrit:

$$\rho [\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v})] = - \text{grad} P + \rho \mathbf{g}$$

Elle se simplifie en régime stationnaire où $\partial/\partial t=0$:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) = - \text{grad} P + \rho \mathbf{g}$$

où $\mathbf{g} = - \text{grad}(g z)$ Or $\mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) = \text{grad}(v^2/2) - \mathbf{v} \wedge \text{rot}(\mathbf{v})$

Donc $\text{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho g z) - \rho \mathbf{v} \wedge \text{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

Prenons la circulation le long d'une ligne fluide de A à B:

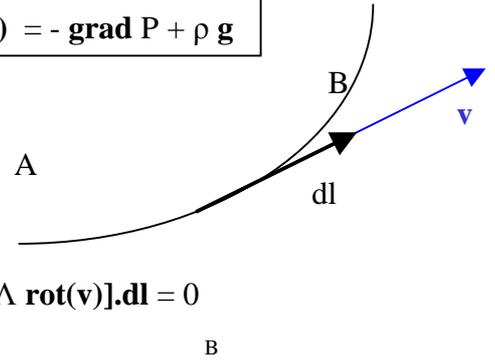
$$\int_A^B \text{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho g z) \cdot d\mathbf{l} - \int_A^B \rho [\mathbf{v} \wedge \text{rot}(\mathbf{v})] \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Or le long d'une ligne fluide, \mathbf{v} et $d\mathbf{l}$ sont colinéaires, donc $\int_A^B \rho [\mathbf{v} \wedge \text{rot}(\mathbf{v})] \cdot d\mathbf{l} = 0$

il reste alors: $\int d(\rho v^2/2 + P + \rho g z) = 0$

$$\text{d'où } \frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z = \text{constante sur une ligne fluide}$$

loi de Bernoulli



Cas particulier de l'écoulement incompressible et irrotationnel tel que $\text{rot}(\mathbf{v}) = 0$

$\text{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho g z) - \rho \mathbf{v} \wedge \text{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ s'écrit $\text{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho g z) = \mathbf{0}$

D'où $\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z = \text{constante uniforme pour toutes les lignes fluides}$

Equation compressible dans le repère de Frénet Dans un système de coordonnées curvilignes (repère de Frénet local \mathbf{t}, \mathbf{n}) où $\mathbf{v} = v \mathbf{t}$:

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) = v \frac{d(v \mathbf{t})}{ds} = \frac{d(v^2/2)}{ds} \mathbf{t} + v^2 \frac{\mathbf{n}}{r}$$

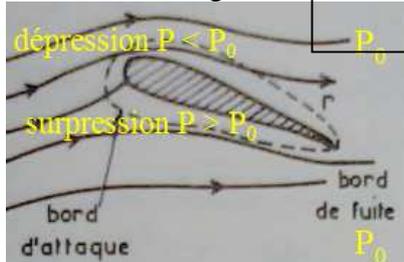
Selon \mathbf{t} : $\rho \frac{d(v^2/2)}{ds} = - \frac{dP}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds}$

Selon \mathbf{n} : $\rho \frac{v^2}{r} = \frac{dP}{dr} + \rho g \frac{dz}{dr}$

s est l'abscisse curviligne de M le long de la ligne fluide AB et

$r = \|\mathbf{CM}\|$ est le rayon de courbure en M, C étant le centre de courbure.

En l'absence de gravité dans la direction \mathbf{CM} , $\frac{dP}{dr} = \rho \frac{v^2}{r} > 0$ effet Coanda



Autour d'un obstacle, la pression augmente en s'éloignant du centre de courbure: c'est l'effet Coanda

exemple: aile d'avion

la pression loin de l'aile est P_0 pression atmosphérique.

Sur l'extrados (dessus): $\frac{dP}{dr} > 0 \rightarrow P_E < P_0$ dépression

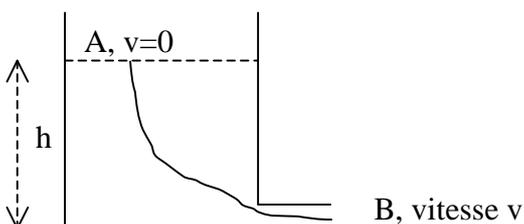
Sur l'intrados (dessous): $\frac{dP}{dr} < 0 \rightarrow P_I > P_0$ surpression

Si le milieu est incompressible ($\rho = \text{constante}$), l'équation selon \mathbf{t} devient simplement:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z = \text{constante}$$

sur une ligne fluide, on retrouve la loi de Bernoulli

Exemple d'application n°1: loi de Torricelli (fluide incompressible)



Entre A et B points à la pression atmosphérique P_0 :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z = \text{constante}$$

$$\text{s'applique ainsi: } P_0 + \rho g h = \frac{1}{2} \rho v^2 + P_0$$

$$\text{d'où } v = (2 g h)^{1/2}$$

Exemple d'application n°2: siphon ou vidange d'un tube compressible de section constante

$\rho v = \text{constante}$ (conservation de la masse)



P_A, v_A P_B, v_B
 $P_A > P_B$

$\rho v \, dv/ds = -dP/ds - \rho \, d(gz)/ds$ avec $\rho v = \text{constante}$ donne une nouvelle équation:

$$d(\rho v^2 + P)/ds = -\rho \, d(gz)/ds$$

Mécanisme du siphon de A vers B

1) si l'on néglige la gravité: $\rho v^2 + P = \text{constante entre A et B}$

$$\rho_A v_A^2 = \rho_B v_B^2$$

$$\rho_A v_A^2 + P_A = \rho_B v_B^2 + P_B = \rho_A v_A v_B + P_B$$

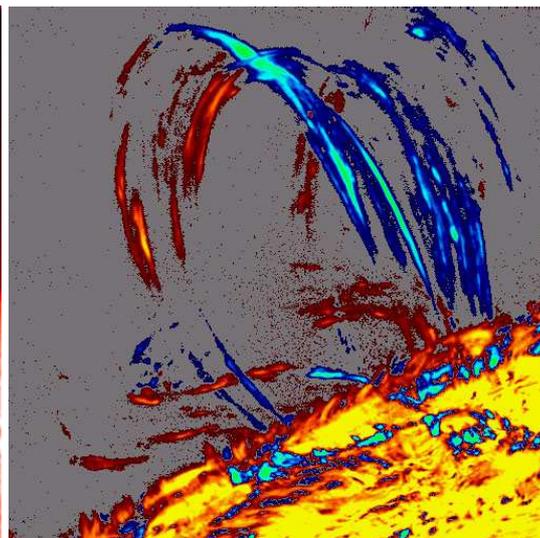
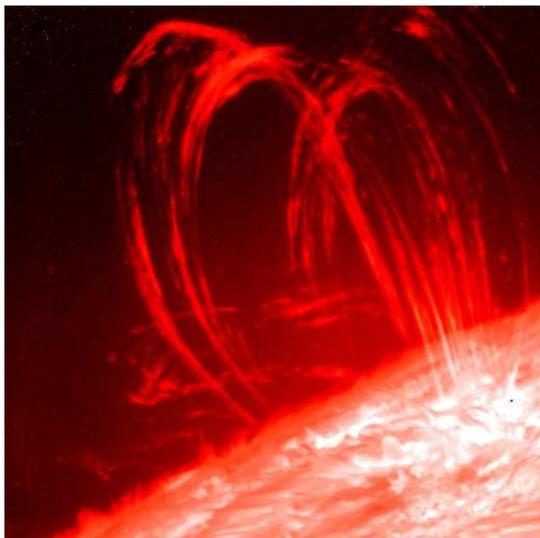
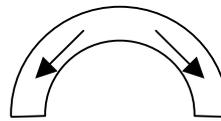
$$\rightarrow \rho_A v_A (v_B - v_A) = P_A - P_B$$

$$\rightarrow v_B = v_A + (P_A - P_B)/\rho_A v_A$$

2) si l'on néglige la pression,

$$1/2 v^2 + g z = \text{constante}$$

mécanisme de vidange (chute libre)



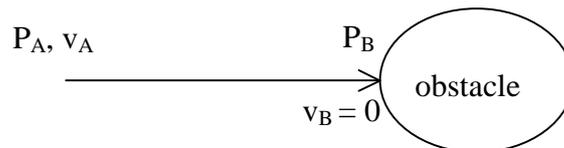
Ecoulement de Bernouilli dans des "tuyaux" magnétiques de l'atmosphère solaire: à gauche, densité de matière, à droite, vitesses Doppler (projection du vecteur v sur la ligne de visée; en rouge mouvements d'éloignement, en bleu mouvements d'approche)

Exemple d'application n°3: pression d'arrêt sur un obstacle

Entre A et B: $1/2 \rho v^2 + P + \rho g z = \text{constante}$

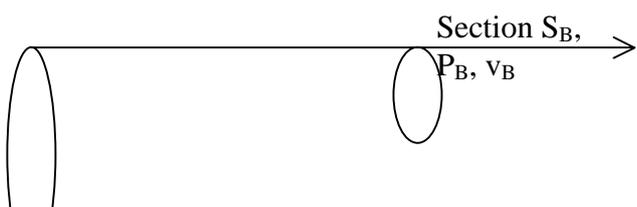
d'où $1/2 \rho v_A^2 + P_A = P_B > P_A$

P_B est la pression d'arrêt.



Application: sonde de Pitot pour la mesure de la vitesse d'un avion. La mesure de la surpression $P_B - P_A$ permet une mesure de v_A connaissant ρ .

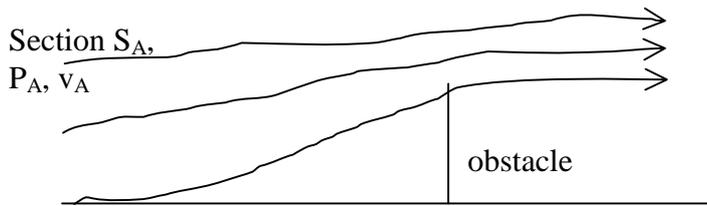
Exemple d'application n°4: effet Venturi (col, obstacle)



Conservation du débit volumique du fluide incompressible:

$$S_A v_A = S_B v_B$$

$$S_A > S_B \rightarrow v_B > v_A$$



Exemple d'application n°5: Tourbillon de Rankine incompressible à vitesse angulaire ω constante (vortex, tornade, cyclone...)

Considérons un écoulement symétrie cylindrique autour de l'axe vertical Oz (vortex, tourbillon) dont le vecteur vitesse $\mathbf{v} = v(r) \mathbf{e}_\theta$ est orthoradial et ne dépend que de la variable radiale r (distance à l'axe Oz du tourbillon). On choisit les coordonnées cylindriques (r, θ, z) ; la gravité s'écrit $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$, et l'écoulement obéit à la loi:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}) = 2 \omega \mathbf{e}_z$$

$\omega \mathbf{e}_z$ est le vecteur rotation du tourbillon; la vorticité vaut 2ω .

ω , vitesse angulaire, est telle que pour $0 < r < R$, $\omega = \omega_0 = \text{constante}$ et pour $r > R$, $\omega = 0$

- champ des vitesses (fonction de r) déterminé par le théorème d'Ampère de la mécanique des fluides (basé sur le théorème de Stokes):

$\iint \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2 \iint \omega dS = 2 \omega S$ où S est la surface (disque de surface πr^2) enlacée par un contour circulaire fermé de rayon r quelconque et de périmètre $2\pi r$:

$$r < R : v 2\pi r = 2 \omega_0 \pi r^2 \rightarrow v(r) = \omega_0 r$$

$$r \geq R : v 2\pi r = 2 \omega_0 \pi R^2 \rightarrow v(r) = \omega_0 R^2/r$$

dans ce second cas $r > R$, la densité volumique de moment cinétique $[\rho v r]$ est constante et il existe un potentiel des vitesses $\Phi(\theta) = \omega_0 R^2 \theta$; l'écoulement est irrotationnel ($\mathbf{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$).

- champ de pression déterminé par l'équation d'Euler:

$$\mathbf{grad}(\rho v^2/2 + P + \rho g z) - \rho \mathbf{v} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{où} \quad \mathbf{v} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = v(r) \mathbf{e}_\theta \wedge 2 \omega \mathbf{e}_z = 2 \omega v(r) \mathbf{e}_r$$

Soit en projection sur \mathbf{e}_r : $d(\rho v^2/2 + P + \rho g z)/dr = 2 \rho \omega v(r)$

$$r < R : \omega = \omega_0 ; v = \omega_0 r \rightarrow d(\rho \omega_0^2 r^2 / 2 + P + \rho g z)/dr = 2 \rho \omega_0^2 r$$

$$\rightarrow \rho \omega_0^2 r^2 / 2 + P + \rho g z = \rho \omega_0^2 r^2 + cte$$

$$\rightarrow P + \rho g z - 1/2 \rho \omega_0^2 r^2 = P_0$$

La constante P_0 est la pression en $z = 0$ et en $r = 0$.

$$r \geq R : \omega = 0 ; v = \omega_0 R^2/r$$

$$\rightarrow P + \rho g z + 1/2 \rho \omega_0^2 R^4/r^2 = \text{constante telle que}$$

les deux équations se raccordent en $r = R$, d'où

$$P + \rho g z + \rho \omega_0^2 R^2 (R^2/2r^2 - 1) = P_0$$

- surface libre: son équation $z(r)$ est donnée par la relation $P(r,z) = \text{constante}$

$$r < R : \rho g z - 1/2 \rho \omega_0^2 r^2 = cte \rightarrow z = 1/2 (\omega_0^2/g) r^2 + z_0 \quad (z_0 \text{ constante}): \text{c'est une parabole}$$

$$r \geq R : \rho g z + 1/2 \rho \omega_0^2 R^4/r^2 = cte \rightarrow z = -1/2 (\omega_0^2/g) R^4/r^2 + cte$$

Les deux équations se raccordent en $r = R$, d'où $z = (\omega_0^2 R^2/g) (1 - R^2/2r^2) + z_0$

Lorsque $r \rightarrow \infty$, $z \rightarrow (\omega_0^2 R^2/g) + z_0$: il se forme une dépression de profondeur

$$h = \omega_0^2 R^2/g$$

- gradient radial de pression

$r < R$: $dP/dr = \rho \omega_0^2 r = \rho v^2/r > 0$ dirigé vers l'extérieur du vortex

$r > R$: $dP/dr = \rho \omega_0^2 R^4/r^3 = \rho v^2/r > 0$ dirigé vers l'extérieur du vortex

- cas limite $R \rightarrow 0$

$\text{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ d'où $v(r) = C / r$ pour tout $r > 0$ (C moment cinétique constant)

L'équation de Bernouilli $\rho v^2/2 + P + \rho g z = \text{cte}$,

ce qui donne pour la surface libre $z = z_\infty - C^2 / 2gr^2$ (la dépression est de profondeur infinie)

- Cas où $z = 0$

$r < R$: $\omega = \omega_0$; $P = P_0 + 1/2 \rho \omega_0^2 r^2 > P_0$ (P_0 pression en $z = 0$ et $r = 0$)

$r > R$: $\omega = 0$; $P = P_0 + \rho \omega_0^2 R^2 (1 - R^2/2r^2) > P_0$

lorsque $r \rightarrow \infty$, $P \rightarrow P_\infty = P_0 + \rho \omega_0^2 R^2$ (par exemple, P_∞ est la pression atmosphérique)

on obtient alors en introduisant la pression à grande distance P_∞ :

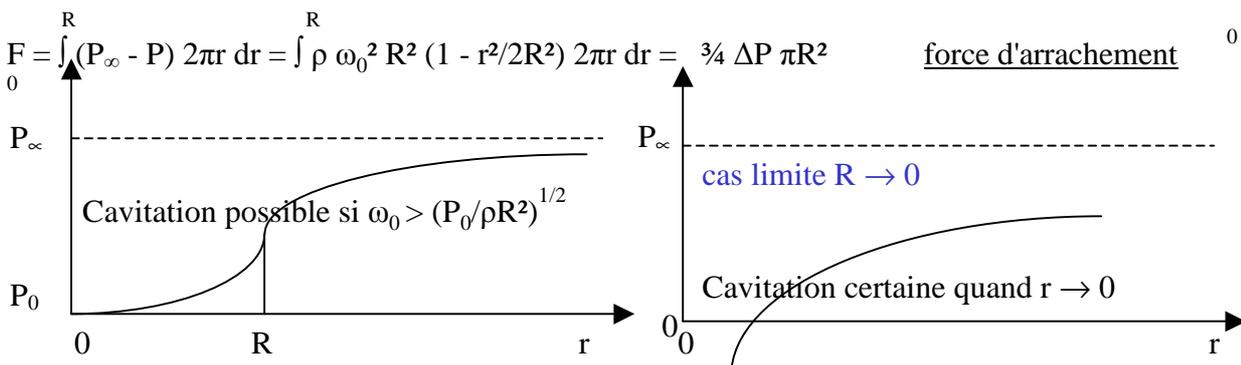
$r < R$: $\omega = \omega_0$; $P = P_\infty + \rho \omega_0^2 R^2 (r^2/2R^2 - 1) < P_\infty$

$r > R$: $\omega = 0$; $P = P_\infty - \rho \omega_0^2 R^4/2r^2 < P_\infty$

La dépression maximale est ainsi égale à $\Delta P = P_\infty - P_0 = \rho \omega_0^2 R^2$

Un phénomène de cavitation ($P = 0$) survient si $P_0 = P_\infty - \rho \omega_0^2 R^2 < 0$ soit si $\omega_0 > (P_0/\rho R^2)^{1/2}$

La force verticale, vers le haut, exercée sur le vortex de rayon R de surface πR^2 vaut:



6 - Equation d'état du gaz

La pression cinétique P due aux collisions dans un gaz à la température T et composé de N particules par unité de volume est donnée par la loi des gaz parfaits:

$P = N k T$

Pour un gaz constitué de particules de masse m, on peut écrire $N = \rho / m$,

alors $P = \rho k T / m = \rho R T / M$ ou encore $P V = n R T$

avec:

P pression (Pa)

T température (Kelvins)

V volume du gaz (m^3)

k constante de Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23}$ SI) et R constante des gaz parfaits ($R = kN = 8.32 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1}$, avec N constante d'Avogadro égale à $6.02 \cdot 10^{23}$ particules/mole)

N densité volumique de particules (m^{-3}) et ρ masse volumique ($kg m^{-3}$)

m masse atomique du gaz (kg) et M masse molaire du gaz = $m N$ (kg)

n nombre de moles

Dans la couronne solaire où le milieu est totalement ionisé, on utilise $P = 2 \rho k T / m$, car pour un proton de masse m, il y a un électron de masse négligeable, mais qui contribue à la pression.

7 - Milieu isentropique (adiabatique réversible)

L'entropie S de n moles de gaz parfait découle de l'identité thermodynamique:

$$dU = - P dV + T dS \quad \text{d'où} \quad \boxed{dS = dU/T + P dV/T}$$

Or $dU = n C_v dT = n R/(\gamma-1) dT$ (loi de Joule) et $PV = nRT$ (loi des gaz parfaits); on en déduit

$$\text{l'entropie du gaz parfait:} \quad \boxed{S = [n R/(\gamma-1)] \ln(P/\rho^\gamma) + \text{cte}}$$

Pour une transformation isentropique sans échange de chaleur, on a donc $\boxed{P / \rho^\gamma = \text{constante}}$

dans laquelle γ est l'exposant adiabatique ($\gamma = C_p/C_v = 5/3$ pour un gaz monoatomique, rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants, $7/5$ pour un gaz diatomique).

Variations compressibles autour de la loi de Bernouilli

considérons l'équation du mouvement stationnaire: $d(v^2/2)/ds = - (1/\rho) dP/ds - d(gz)/ds$

- Dans le cadre d'une transformation isentropique:

$P / \rho^\gamma = P_0 / \rho_0^\gamma = \text{constante}$ implique $dP/P = \gamma d\rho/\rho$, d'où:

$$d(v^2/2)/ds = - (\gamma P/\rho^2) d\rho/ds - d(gz)/ds = - (\gamma P_0/\rho_0^\gamma) \rho^{\gamma-2} d\rho/ds - d(gz)/ds$$

Cette équation s'écrit aussi: $d(v^2/2)/ds = - (\gamma/\gamma-1) (P_0/\rho_0^\gamma) d\rho^{\gamma-1}/ds - d(gz)/ds$

$$\text{soit en intégrant:} \quad \boxed{v^2/2 + (\gamma/\gamma-1) (P_0/\rho_0) (\rho/\rho_0)^{\gamma-1} + g z = \text{constante}}$$

La quantité $(\gamma P_0/\rho_0)$ est le carré de la vitesse du son (voir plus loin).

En introduisant $h = (\gamma/\gamma-1) (P/\rho)$ enthalpie massique, on obtient: $v^2/2 + h + g z = \text{constante}$.

- Dans le cadre d'une transformation isotherme:

$P / \rho = P_0 / \rho_0 = \text{constante}$ implique $dP/P = d\rho/\rho$, d'où:

$$d(v^2/2)/ds = - (P/\rho^2) d\rho/ds - d(gz)/ds = - (P_0/\rho_0) (1/\rho) d\rho/ds - d(gz)/ds$$

Cette équation s'écrit aussi: $d(v^2/2)/ds = - (P_0/\rho_0) d \ln \rho / ds - d(gz)/ds$

$$\text{soit en intégrant:} \quad \boxed{v^2/2 + (P_0/\rho_0) \ln(\rho/\rho_0) + g z = \text{constante}} \quad (P_0/\rho_0 \text{ carré de la vitesse du son}).$$

8 - La loi de conservation de l'énergie

Cette loi de conservation est la plus difficile à établir. Elle résulte du premier principe de la thermodynamique :

$$dU = - P dV + \delta Q$$

avec U fonction énergie interne, V volume, P pression, Q quantité de chaleur échangée. A masse constante, on a $m = \rho V$, soit $V = m / \rho$, ce qui donne par unité de masse:

$$dU/m = - P d(1/\rho) + \delta Q/m$$

Appelons u et q respectivement l'énergie interne et la quantité de chaleur échangée par unité de masse. Il vient : $du = (P/\rho^2) d\rho + \delta q$, soit encore par unité de temps :

$$du/dt = (P/\rho^2) d\rho/dt + \delta q/dt$$

Avec $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$ dérivée particulaire, l'équation ci dessus devient :

$$\partial u/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} u = (P/\rho^2) [\partial \rho/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho] + \delta q/dt$$

L'équation de continuité de la masse nous donne $\partial \rho/\partial t = - \text{div}(\rho \mathbf{v}) = - \rho \text{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho$ d'où

$$\partial u/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} u = - (P/\rho) \text{div} \mathbf{v} + \delta q/dt$$

Multiplions maintenant les deux membres de cette dernière équation par ρ et combinons là avec l'équation de continuité; on obtient tous calculs faits l'équation de continuité de l'énergie interne:

$$\partial(\rho u)/\partial t + \text{div}(\rho u \mathbf{v}) = - P \text{div} \mathbf{v} + \rho \delta q/dt$$

Utilisons maintenant l'équation d'Euler du mouvement $\rho [\partial \mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v})] = - \mathbf{grad} P + \mathbf{f}$ dont on fait le produit scalaire avec le vecteur vitesse \mathbf{v} , ce qui donne une puissance:

$$\rho \mathbf{v} \cdot [\partial \mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v})] = - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} P + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

En combinant cette équation avec l'équation de continuité de la masse, on obtient l'équation de continuité de l'énergie cinétique:

$$\partial(\frac{1}{2} \rho v^2)/\partial t + \text{div}(\frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v}) = - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} P + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

On peut maintenant sommer l'équation de continuité de l'énergie interne et l'équation de continuité de l'énergie cinétique en remarquant que $\text{div}(P \mathbf{v}) = P \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{grad} P \cdot \mathbf{v}$, de sorte que finalement :

$$\partial(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2)/\partial t + \text{div}[(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 + P) \mathbf{v}] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho \delta q/dt$$

Appelons maintenant U l'énergie interne par unité de volume et H l'enthalpie par unité de volume. Comme $U = \rho u$ et $H = U + P$, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\partial(U + \frac{1}{2} \rho v^2)/\partial t + \text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v}] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho \delta q/dt \quad (\text{W m}^{-3}) \quad \text{avec} \quad H = U + P$$

C'est l'équation de conservation de l'énergie.

Dans cette équation, $\rho \delta q/dt$ est le taux de production (si positif) ou de perte (si négatif) de chaleur par unité de volume et de temps (W m^{-3}). Il se met sous la forme phénoménologique:

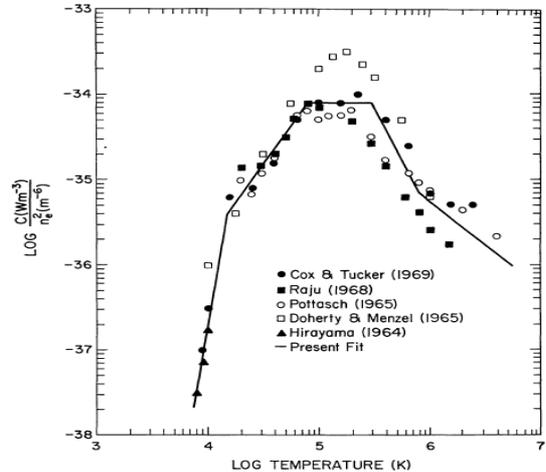
$$\rho \delta q/dt = \dots$$

$$\rho \delta q/dt = -\rho^2 Q(T) + \text{div } \mathbf{F} + \text{autres termes...}$$

relation dans laquelle:

1) $\rho^2 Q(T)$ est le taux de pertes par rayonnement (la fonction $Q(T)$ est expérimentale, elle est tabulée et présente un maximum autour de 10^5 K et décroît en $1/T$ à haute température, voir ci dessous).

Temperature	i	χ_i	α_i
$T \geq 8 \times 10^5 \text{K}$	1	5.51×10^{-30}	-1.0
$8 \times 10^5 \text{K} > T \geq 3 \times 10^5 \text{K}$	2	3.94×10^{-21}	-2.5
$3 \times 10^5 \text{K} > T \geq 8 \times 10^4 \text{K}$	3	8.00×10^{-35}	0
$8 \times 10^4 \text{K} > T \geq 1.5 \times 10^4 \text{K}$	4	1.20×10^{-43}	+1.8
$1.5 \times 10^4 \text{K} > T$	5	4.92×10^{-67}	+7.4



Pertes radiatives.

Fonction $Q(T)$ définie par morceaux en unités MKSA :

$$Q(T) = \chi T^\alpha / m_p^2$$

avec m_p masse du proton = $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg

2) $\text{div } \mathbf{F}$ est le taux de conduction électronique de la chaleur (parallèle aux lignes de champ magnétique); \mathbf{F} est le flux ou courant de chaleur mesuré en W/m^2 donné par la loi de Fourier:

$$\mathbf{F} = -k_{//} \text{grad} T \quad \text{avec } k_{//} = k_0 T^{5/2} = 10^{-11} T^{5/2} \text{ MKSA, conductivité thermique du milieu}$$

La conductivité thermique dépend de la température. Lorsque T varie peu, $\text{div } \mathbf{F} = k_{//} \Delta T$.

Remarque: la loi de Fourier est à l'origine de l'équation de diffusion de la chaleur.

Si la vitesse est nulle, en posant $U = \rho C_v T$

$$\partial U / \partial t + \text{div } \mathbf{F} = 0 \quad \text{où } U = \rho C_v T \quad (\text{J m}^{-3}) \text{ avec } C_v \text{ chaleur massique } (\text{J kg}^{-1}).$$

L'équation de diffusion de la chaleur porte sur la température T et s'écrit: $\rho C_v \partial T / \partial t = k_{//} \Delta T$
où ΔT est le Laplacien de la température.

Equation de conservation de l'énergie en présence de pesanteur

Si $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$ avec $\mathbf{g} = -\text{grad } \phi$, $\phi = g z$ étant le potentiel de pesanteur local, alors $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = -\rho \mathbf{v} \cdot \text{grad } \phi$

En combinant avec l'équation de continuité de la masse, on obtient $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = -\text{div}(\rho \phi \mathbf{v}) - \partial(\rho \phi) / \partial t$, d'où

$$\partial(U + \rho \phi + \frac{1}{2} \rho v^2) / \partial t + \text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi) \mathbf{v}] = \rho \delta q/dt$$

$U + \rho \phi + \frac{1}{2} \rho v^2$ est la densité volumique d'énergie interne + potentielle + cinétique.

Considérons maintenant un volume V fermé par une surface S .

La quantité $\iint [(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi) \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}]$ représente le flux d'énergie aux frontières sur la surface S .

Il y a conservation de l'énergie totale $\iiint (U + \rho \phi + \frac{1}{2} \rho v^2) dV$ dans le volume V si :

- le terme source ou perte $\delta q/dt$ est nul
- les entrées et sorties d'énergie par la surface frontière fermée S se compensent de sorte que $\iint [(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi) \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}] = 0$

En régime stationnaire, l'équation de conservation se résume à:

$$\text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi) \mathbf{v}] = \rho \delta q / dt$$

9 - Formulation de l'énergie interne U et de l'enthalpie H par unité de volume/masse

Pour un gaz parfait, la loi de Joule s'écrit: $U = (\rho/M) C_v T$ et $H = (\rho/M) C_p T = U + P$

M est la masse molaire du gaz ; C_p et C_v sont les capacités calorifiques molaires à pression et volume constant.

Avec $\gamma = C_p/C_v$, $C_p - C_v = R$ (constante des gaz parfaits), on a $C_v = R/(\gamma - 1)$ et $C_p = R \gamma / (\gamma - 1)$

Les fonctions U et H s'écrivent par unité de volume avec m masse atomique :

$$U = (\rho/m) kT / (\gamma - 1) = P/(\gamma - 1) \text{ et } H = (\rho/m) kT \gamma / (\gamma - 1) = P \gamma / (\gamma - 1) \quad (\text{J m}^{-3})$$

Pour un gaz monoatomique, $\gamma = 5/3$ entraîne $U = 3/2 N kT$ et $H = 5/2 N kT$ (N densité en m^{-3}).

Pour un gaz d'hydrogène totalement ionisé (dans la couronne solaire), on aurait en raison de la neutralité électrique $\rho = 2 \rho_{\text{protons}}$

On utilise aussi l'énergie interne massique u et l'enthalpie massique h définis par:

$$u = kT / [m (\gamma - 1)] = [1/(\gamma - 1)] (P/\rho) \text{ et } h = (kT/m) \gamma / (\gamma - 1) = (P/\rho) \gamma / (\gamma - 1) \quad (\text{J kg}^{-1})$$

10 - Equation de conservation de l'énergie en présence de champ magnétique

Pour mémoire seulement, en présence de champ électro-magnétique, l'équation devient:

$$\partial (U + \rho \phi + \frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2 + \mathbf{B}^2 / 2 \mu_0) / \partial t + \text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi) \mathbf{v} + \mathbf{P}] = \rho \delta q / dt - \mathbf{j}^2 / \sigma$$

où $\mathbf{P} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) / \mu_0$ est le vecteur de Poynting vu en électromagnétisme,

ou puissance électromagnétique transportée par unité de surface (W m^{-2}).

Un terme de perte par effet Joule - \mathbf{j}^2 / σ (σ conductivité électrique en S m^{-1}) s'ajoute négativement au taux de production ou de perte de chaleur $\rho \delta q / dt$ (W m^{-3}).

$\sigma = 8 \cdot 10^{-4} T^{3/2} \text{ S m}^{-1}$ pour le plasma solaire à la température T.

$$U + \rho \phi + \frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2 + \mathbf{B}^2 / 2 \mu_0 \quad \text{est la densité volumique d'énergie interne + potentielle + cinétique + électrique + magnétique } (\text{J m}^{-3}).$$

En régime stationnaire, $\text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi) \mathbf{v} + \mathbf{P}] = \rho \delta q / dt - \mathbf{j}^2 / \sigma$

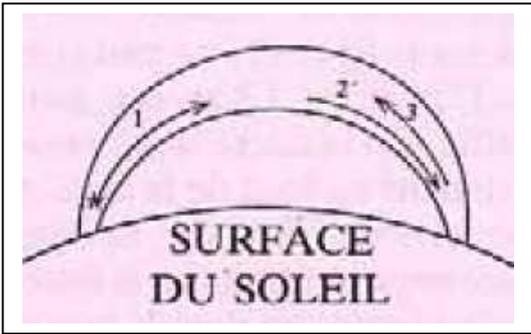
II – Ecoulement en régime stationnaire dans un tube de courant

Un tube de courant est tel que ses parois latérales sont des lignes du champ des vitesses, appelées aussi lignes de courant.

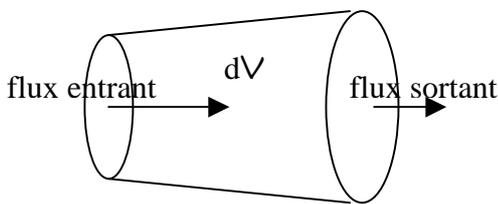
Le vecteur vitesse \mathbf{v} est donc tangent aux parois.

En régime stationnaire, avec $\partial/\partial t = 0$, on a:

<p>Conservation de la masse: $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$</p> <p>Conservation de l'énergie: $\text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi) \mathbf{v}] = \rho \delta q / dt$</p>
--



1 - mouvement longitudinal le long du tube de courant



abscisse s	$s + ds$
section $S(s)$	$S(s+ds)$
débit $[\rho v S](s)$	$[\rho v S](s+ds)$

D'après le théorème d'Ostrogradski sur le volume dV :

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) dV = \iint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

Le long du tube de courant, $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$ sur les surfaces latérales; il reste pour le volume $dV = S ds$:

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho \mathbf{v}) S ds &= \text{flux sortant} - \text{flux entrant} \\ &= [\rho v S](s+ds) - [\rho v S](s) \\ &= \partial[\rho v S] / \partial s ds \end{aligned}$$

d'où: $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 1/S \partial[\rho v S] / \partial s$

Le long d'une ligne de courant, en un point d'abscisse curviligne s et de section $S(s)$, $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ s'écrit, en supposant que le diamètre du tube est petit partout devant sa longueur L (soit en ordre de grandeur $S^{1/2} \ll L$):

$1/S d(\rho v S) / ds = 0$, d'où: $\rho v S = \text{constante}$

Le long de cette même ligne fluide, en un point d'abscisse curviligne s et de section $S(s)$, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit:

$$\begin{aligned} 1/S d[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi) v S] / ds &= \rho \delta q / dt \\ \text{soit } d[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi) v S] / ds &= \rho S \delta q / dt \end{aligned}$$

et avec $ds = v dt$, on obtient: $d[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi) v S] = \rho S v \delta q$

Utilisons de nouveau l'enthalpie h par unité de masse ($H = \rho h$); comme $\rho v S = \text{constante}$, il vient:

$$d(h + \frac{1}{2} v^2 + \varphi) = \delta q$$

soit finalement: $\Delta(h + \frac{1}{2} v^2 + \varphi) = q$ ($J \text{ kg}^{-1}$)

ou le symbole Δ désigne la variation massique de la quantité $h + \frac{1}{2} v^2 + \varphi$ entre l'entrée et la sortie; q est la chaleur échangée par unité de masse.

Si le fluide est incompressible, on a $\Delta(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi) = Q$ ($J \text{ m}^{-3}$)

ou le symbole Δ désigne la variation volumique de la quantité $H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi$ entre l'entrée et la sortie; Q est la chaleur échangée par unité de volume.

Cependant, $H = U + P$, donc $\Delta H = \Delta U + \Delta P$ et le premier principe de la thermodynamique indique, à volume constant, que $\Delta U = Q$. On retrouve ainsi la loi de Bernouilli:

$$\Delta(P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi) = 0$$

Si l'écoulement a lieu dans un tube magnétique, les lignes de courant étant supposées colinéaires aux lignes du champ magnétique, on doit adjoindre l'équation de Maxwell flux $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

Le long d'une ligne de champ de section S variable, $\text{div } \mathbf{B} = 0$ s'écrit $1/S \, d(BS)/ds = 0$, s étant l'abscisse curviligne, d'où

$$B S = \text{constante}$$

2 - Force de Laplace; mouvement longitudinal et équilibre transversal

En présence de champ magnétique, la force de Laplace par unité de volume est $\mathbf{f} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$

La densité de courant \mathbf{j} provient de l'équation de Maxwell Ampère dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS):

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

On a négligé dans cette approximation le courant de déplacement $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, la vitesse caractéristique du fluide v étant négligeable devant C vitesse de la lumière. Sachant que :

$$\text{grad } B^2 = 2 \mathbf{B} \wedge \text{rot } \mathbf{B} + 2 \mathbf{B} \cdot \text{grad } \mathbf{B}$$

$$\text{on en déduit } \mathbf{f} = (\text{rot } \mathbf{B} / \mu_0) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \text{grad } \mathbf{B} / \mu_0 - \text{grad } (B^2 / 2\mu_0)$$

tension magnétique pression magnétique

Dans le repère de Frênet, avec \mathbf{t} vecteur unitaire tangent aux lignes de champ, on a $\mathbf{B} = B \mathbf{t}$, et :

$$\mathbf{B} \cdot \text{grad } \mathbf{B} = B \, d/ds(B\mathbf{t}) = B^2 \, dt/ds + B \, dB/ds \mathbf{t}$$

Or $dt/ds = \mathbf{n} / R$, R rayon de courbure de la ligne de champ, et \mathbf{n} normale à la ligne de champ

$$\text{donc } \mathbf{f} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = - \text{grad } (B^2 / 2\mu_0) + B^2 / (\mu_0 R) \mathbf{n} + d(B^2 / 2\mu_0) / ds \mathbf{t}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = - \text{grad}_\perp (B^2 / 2\mu_0) + \mathbf{n} B^2 / (\mu_0 R)$$

où grad_\perp est le gradient dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ (orthogonale à \mathbf{t}).

En présence d'un écoulement stationnaire parallèle aux lignes de champ magnétique, le vecteur vitesse est $\mathbf{v} = v \mathbf{t}$, et le terme $\mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = v \, d(v\mathbf{t}) / ds$ se décompose en :

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = v^2 / R \mathbf{n} + d(v^2 / 2) / ds \mathbf{t}$$

$$\text{de sorte que l'équation du mouvement } \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = - \text{grad } P + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$$

devient avec le champ de pesanteur $\mathbf{g} = - \text{grad } (g z)$:

$$\rho v^2/R \mathbf{n} + \rho \mathbf{grad}_{//}(v^2/2) = - \mathbf{grad}_{\perp}(P+B^2/2\mu_0) + \mathbf{n} B^2/(\mu_0 R) - \mathbf{grad}_{//}P - \rho \mathbf{grad}_{//}(gz) - \rho \mathbf{grad}_{\perp}(gz)$$

où $\mathbf{grad}_{//} = d/ds$ est le gradient dans la direction des lignes de champ (direction \mathbf{t}).

En projection dans la direction \mathbf{t} du mouvement et du champ magnétique, on obtient:

$$\rho \mathbf{grad}_{//}(v^2/2) = - \mathbf{grad}_{//}P - \rho \mathbf{grad}_{//}(gz)$$

En projection dans la direction \mathbf{n} orthogonale au mouvement et au champ magnétique:

$$(\rho v^2 - B^2/\mu_0)/R \mathbf{n} = - \mathbf{grad}_{\perp}(P+B^2/2\mu_0) - \rho \mathbf{grad}_{\perp}(gz)$$

Pour un fluide incompressible, dans la direction du mouvement et du champ magnétique, on a:

$$\mathbf{grad}_{//}(\rho v^2/2 + P + \rho gz) = 0$$

c'est la loi de Bernouilli $\rho v^2/2 + P + \rho gz = \text{constante sur une ligne de champ}$

dans laquelle le champ magnétique n'intervient pas; le fluide glisse donc le long de "tuyaux magnétiques".

Pour un fluide incompressible dans une configuration de lignes fluides et magnétiques telles que le rayon de courbure $R \rightarrow \infty$, la projection dans la direction orthogonale donne:

$$\mathbf{grad}_{\perp}(P + B^2/2\mu_0 + \rho gz) = 0$$

C'est la loi de l'équilibre transversal entre pression gazeuse et magnétique

$P + B^2/2\mu_0 + \rho gz = \text{constante}$ dans laquelle la vitesse n'intervient pas.

$B^2/2\mu_0$ est la pression magnétique.

Le paramètre β du plasma est égal au rapport de la pression gazeuse à la pression magnétique:

$$\beta = P / (B^2/2\mu_0) \quad (\text{nombre sans dimension})$$

Si $\beta > 1$, les forces de pression dominant ; et si $\beta < 1$, les forces magnétiques dominant.

β varie énormément dans l'atmosphère solaire, non pas à cause de la variation du champ magnétique en altitude, mais parce que la pression du gaz varie très vite en fonction de l'altitude z :

- dans la photosphère calme, $\beta \gg 1$ car $P = 10^3$ Pa et $B^2/2\mu_0$ est voisin de 1 Pa (avec $B = 10^{-3}$ T)
- dans la chromosphère calme, $\beta \approx 1$ car $P = 1$ Pa et $B^2/2\mu_0$ est voisin de 1 Pa (avec $B = 10^{-3}$ T)
- dans la couronne, $\beta \ll 1$ car $P = 10^{-4}$ Pa et $B^2/2\mu_0$ est voisin de 1 Pa (avec $B = 10^{-3}$ T)

La chromosphère solaire réalise une sorte de transition entre un milieu dominé par les forces de pression et un milieu dominé par les forces magnétiques.

Les taches (champ fort de l'ordre de 0.1 T) ont toujours $\beta \ll 1$. En effet, $P = 10^3$ Pa et $B^2/2\mu_0$ est voisin de 10^4 Pa ou plus.

III - Equation de diffusion et d'advection du champ magnétique

On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell Ampère en ARQS: $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

or $\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{j}$; on obtient donc $\Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \text{rot } \mathbf{j}$ car $\text{div } \mathbf{B} = 0$

Avec la loi d'Ohm $\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ où γ est la conductivité électrique du plasma, on trouve :

$$\Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \text{rot} (\gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})) = -\mu_0 \gamma \text{rot} (\mathbf{E}) - \mu_0 \gamma \text{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

où on a fait l'hypothèse simplificatrice que la conductivité γ ne varie pas dans l'espace (ce qui n'est pas vrai, pour l'atmosphère solaire, à cause de la température hétérogène car $\gamma = 8 \cdot 10^{-4} \text{ T}^{3/2} \text{ S m}^{-1}$).

Avec l'équation de Maxwell Faraday $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, on obtient:

$$\Delta \mathbf{B} = \mu_0 \gamma \partial \mathbf{B} / \partial t - \mu_0 \gamma \text{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

soit l'équation de diffusion et d'advection du champ magnétique :

$$\Delta \mathbf{B} / \mu_0 \gamma + \text{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$$

- Dans un milieu de conductivité infinie, on a simplement $\text{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$ qui constitue une équation de transport ou d'advection du champ magnétique dont le temps

caractéristique est le temps dynamique égal à $\tau = L/v$ (avec L dimension caractéristique).

- Dans un milieu au repos, $\Delta \mathbf{B} / \mu_0 \gamma = \partial \mathbf{B} / \partial t$ est une équation de diffusion pure,

dont le temps caractéristique (temps de diffusion) est égal à $\tau_d = L^2 \mu_0 \gamma$

1 - Echelles de temps caractéristiques dans le cas du soleil

Numériquement, on trouve avec la loi $\gamma = 8 \cdot 10^{-4} \text{ T}^{3/2} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$:

$\gamma \approx 10^3 \text{ S m}^{-1}$ dans la photosphère solaire (10000 K)

$\gamma \approx 10^6 \text{ S m}^{-1}$ à 10^6 K dans la couronne solaire (proche de la conductivité 10^7 S m^{-1} d'un métal).

On en déduit les temps caractéristiques τ_d et τ dans les structures solaires:

- *structures fines photosphériques*: $L = 10^3 \text{ km}$, $v = 1 \text{ km/s}$: $\tau_d = 10^9 \text{ s}$, $\tau = 10^3 \text{ s}$

- *structures coronales*: $L = 10^5 \text{ km}$, $v = 100 \text{ km/s}$: $\tau_d = 10^{16} \text{ s}$, $\tau = 10^3 \text{ s}$

On constate qu'aux échelles des structures solaires observables ($L > 100 \text{ km}$), le temps de diffusion τ_d est toujours très long devant le temps dynamique τ ; la diffusion du champ magnétique est donc inefficace, sauf sur des échelles minuscules de l'ordre du mètre, ce qui laisse supposer que les phénomènes purement diffusifs ne se produisent que sur ces petites échelles spatiales qui sont inobservables. Pour $L = 1 \text{ km}$, on trouve par exemple $\tau_d = 10^3 \text{ s}$ dans la photosphère.

Mais il existe une échelle de temps intermédiaire qui concerne l'instabilité de déchirement (« tearing mode ») dans une région de champs magnétiques anti parallèles ou nappe de courant.

Cette instabilité se produit sur l'échelle de temps caractéristique égale à :

$$\tau_t = (\tau_d \tau)^{1/2}$$

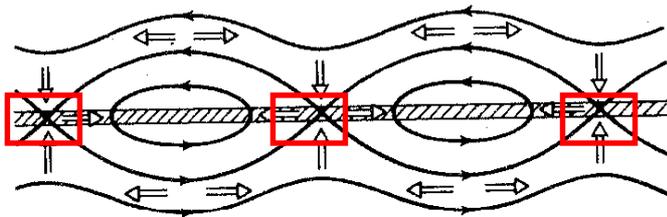
ce qui donne numériquement pour une région d'épaisseur $L = 100 \text{ km}$ (minimum observable) à $T = 10000 \text{ K}$ et $v = 1 \text{ km/s}$: $\tau_d = 10^9 \text{ s}$, $\tau = 10^3 \text{ s}$, et $\tau_t = 10^5 \text{ s}$ soit une journée.

Cependant, ce temps peut être nettement inférieur en cas de conductivité anormale réduite par la turbulence locale (on a vu que le plasma solaire est très turbulent car $Re \gg 1$). Le rapport

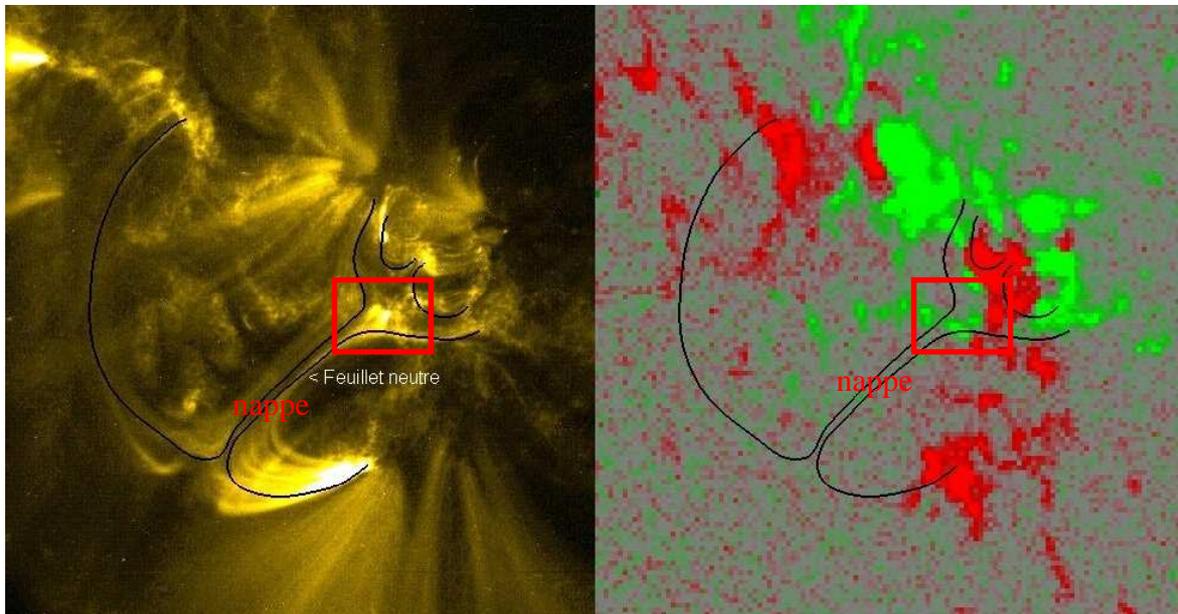
$$R_m = \tau_d / \tau = L \mu_0 \gamma v$$

est appelé nombre de Reynolds magnétique et le temps de déchirement est alors $\tau_t = \tau (R_m)^{1/2}$

Dans la couronne solaire avec les valeurs ci dessus, $R_m \approx 10^{13}$; dans la photosphère, on aurait $R_m \approx 10^6$. R_m est de l'ordre de 1 seulement aux petites échelles spatiales diffusives ($L < 1$ km).



Modes de déchirement du champ magnétique dans une configuration anti parallèle (nappe de courant); seuls les points X (encadrés en rouge) de la nappe (hachurée) sont des sites efficaces et rapides de diffusion



Observation d'une nappe de courant dans un site éruptif (TRACE, NASA, à gauche en EUV et SOHO/MDI, ESA/NASA, à droite en champ magnétique longitudinale)

2 - Diffusion dans quelques cas simples

- Diffusion d'un pic isolé de champ magnétique et étalement

On se place dans un espace à 1 dimension x et on suppose connue à l'instant $t = 0$ la distribution du champ magnétique vertical $B(x,0)$. $B(x,t)$ est donné par la résolution de l'équation de diffusion :

$$\partial^2 B / \partial x^2 / \mu_0 \gamma = \partial B / \partial t$$

dont la solution est:
$$B(x,t) = (\mu_0 \gamma / 4\pi t)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} B(u-x,0) e^{-\mu_0 \gamma u^2 / 4t} du$$

Si $B(x,0) = B_0 \delta(x)$ pic de Dirac, nul partout sauf à l'origine, on obtient la fonction d'étalement:

$$B(x,t) = B_0 (\mu_0 \gamma / 4\pi t)^{1/2} e^{-\mu_0 \gamma x^2 / 4t}$$

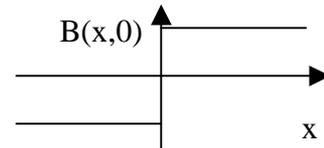
L'étalement du champ magnétique possède une longueur caractéristique L telle que $\mu_0 \gamma L^2 / 4t = 1$ soit un étalement L variant en $t^{1/2}$.

- Nappe de courant et point neutre de type X

Une nappe de courant dans le plan yOz infiniment fine peut être décrite par un modèle simple:

$\mathbf{B} = B(x,t) \mathbf{e}_y$ avec: $B(x,0) = B_0$ pour $x > 0$ et $B(x,0) = -B_0$ pour $x < 0$. On trouve le résultat :

$$B(x,t) = (2 B_0 / \sqrt{\pi}) \int_0^y e^{-u^2} du \quad \text{pour } y = x / (4t/\mu_0\gamma)^{1/2}$$



où l'intégrale n'est pas calculable analytiquement, mais seulement numériquement.

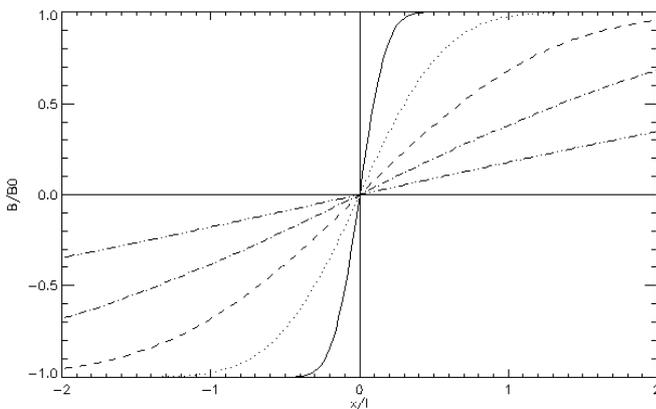
On a $B(0,t) = 0$ (point neutre X) et $\lim B(x,t) = \pm B_0$ lorsque $x \rightarrow \pm \infty$

La densité de courant est donnée par $j_z = (1/\mu_0) dB/dx = [2B_0/(\mu_0\sqrt{\pi})] (\mu_0 \gamma / 4t)^{1/2} e^{-\mu_0\gamma x^2/4t}$

En $x = 0$ dans la nappe, $j_z(0)$ diminue avec le temps en $t^{-1/2}$. Néanmoins, le courant total

$j_{\text{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} j_z dx = 2B_0/\mu_0$ est conservé, ce qui signifie que le courant diffuse en s'étendant.

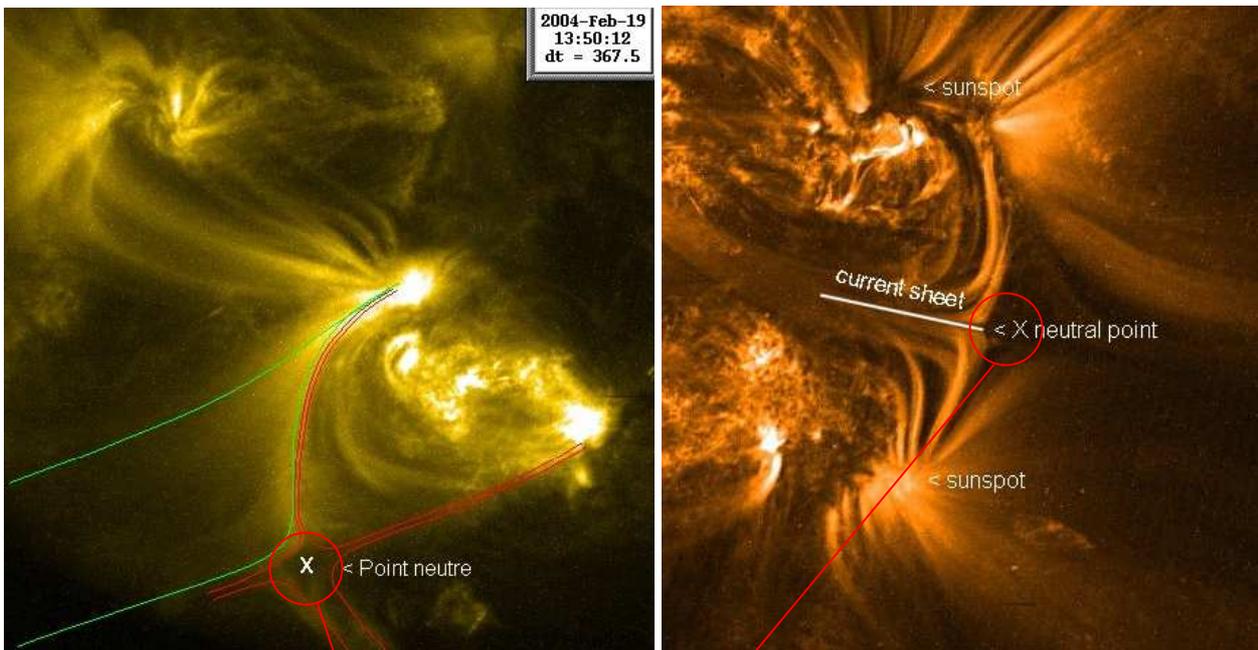
La longueur caractéristique d'étalement L est encore telle que $\mu_0\gamma L^2/4t = 1$ soit L variant en $t^{1/2}$.



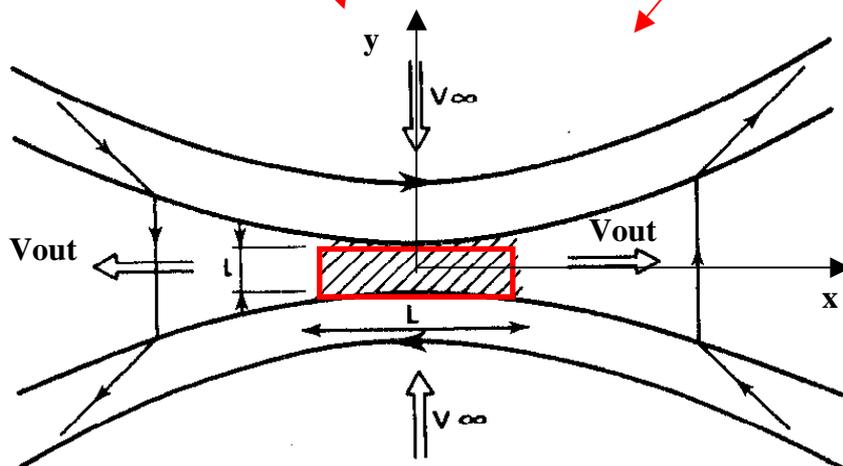
Exemple de diffusion du champ magnétique dans une nappe de courant. Le champ magnétique est initialement antiparallèle dans l'espace $x > 0$ et $x < 0$. On a représenté B/B_0 en fonction de x pour différentes valeurs de t , normalisé par le temps diffusif τ_d . L'espace x est normalisé par l définie par $\tau_d = l^2 \mu_0 \gamma$
 Courbes présentées pour $t/\tau_d =$
 0.01 ——— 0.1 0.5 -----
 2.0 - - - - - 10.0 - - - - -

3 - Reconnexion magnétique

Ainsi que nous l'avons remarqué, une diffusion efficace et rapide ne peut se développer qu'aux petites échelles, au voisinage d'un point d'annihilation des champs magnétiques dans une nappe de courant très fine dont l'épaisseur l est gouvernée par les mouvements de convergence du milieu vers le point central diffusif X (rond rouge) comme le montre la figure ci dessous.



Points X et nappes de courant au dessus d'une région éruptive (TRACE, NASA, en EUV)



Reconnexion magnétique. La partie hachurée est une région centrale purement diffusive, et d'épaisseur l petite dans laquelle le nombre de Reynolds magnétique R_m est voisin de 1.

Le temps diffusif dans la couche d'épaisseur l s'écrit : $\tau_d = l^2 \mu_0 \gamma$. Si v_∞ désigne la vitesse de convergence de la matière vers la nappe, alors $l = \tau_d v_\infty = l^2 \mu_0 \gamma v_\infty$ d'où l'on tire l'épaisseur l de la région de diffusion:

$$l = 1 / (\mu_0 \gamma v_\infty)$$

En prenant $v_\infty = 1 \text{ km/s}$, $\gamma \approx 10^3 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, l'ordre de grandeur de l'épaisseur l de la couche est seulement le mètre !

La matière est éjectée du site diffusif à la vitesse d'Alfven $v_{\text{out}} = B/(\mu_0 \rho)^{1/2}$, vitesse en général élevée mais inobservable vu la faible épaisseur l du site de reconnexion. B est la valeur du champ externe à la nappe de courant; ρ est la masse volumique interne. Voici des exemples:

- photosphère solaire: $B = 10^{-3} \text{ T}$, $\rho = 10^{-6} \text{ kg m}^{-3}$ donne $v_{\text{out}} = 10 \text{ km/s}$
- taches solaires: $B = 0.1 \text{ T}$, $\rho = 10^{-6} \text{ kg m}^{-3}$ donne $v_{\text{out}} = 100 \text{ km/s}$
- couronne solaire: $B = 10^{-3} \text{ T}$, $\rho = 10^{-12} \text{ kg m}^{-3}$ donne $v_{\text{out}} = 1000 \text{ km/s}$

La longueur L de la région diffusive est donnée par la conservation de la masse : $\rho_{\text{in}} L v_\infty = \rho_{\text{out}} l v_{\text{out}}$. Ce qui donne L de l'ordre de 10 m dans la photosphère solaire, et du km dans les conditions de la couronne, avec $v_\infty = 1 \text{ km/s}$ et $\rho_{\text{in}} \approx \rho_{\text{out}}$ en première approximation.

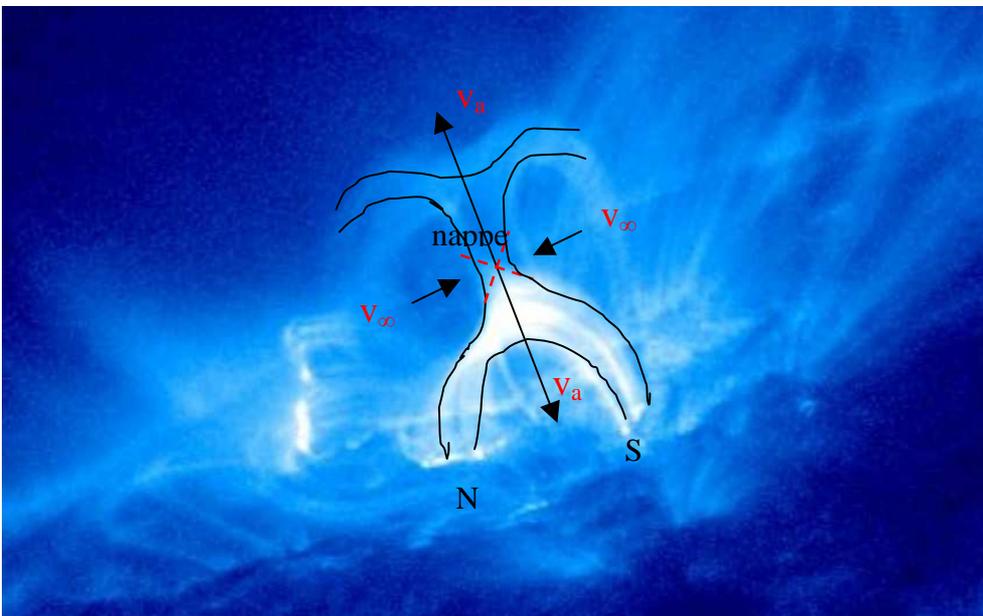
Par ailleurs, la conservation du flux magnétique donne $v_\infty B_\infty = v_{out} B_{out}$. Comme $v_\infty \ll v_{out}$, on en déduit que $B_\infty \gg B_{out}$. La nappe de courant convertit donc l'énergie magnétique en énergie cinétique et en chaleur (effet Joule).

La topologie locale des lignes de champ peut être décrite par le modèle simple de champ magnétique $\mathbf{B}(y, \alpha^2 x, 0)$ dans le repère Oxy de la figure, avec $\alpha^2 \ll 1$. Les lignes de champ magnétique sont des hyperboles d'équation $y^2 - \alpha^2 x^2 = \text{constante}$, ayant pour asymptotes $y = \pm \alpha x$.

La densité de courant est alors donnée par $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} / \mu_0 = (\alpha^2 - 1) / \mu_0 \mathbf{e}_z$

D'où la force de Laplace $\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = [(1-\alpha^2) \alpha^2 x \mathbf{e}_x - (1-\alpha^2) y \mathbf{e}_y] / \mu_0$

Cette force montre que la matière est poussée le long de l'axe Oy vers la nappe de courant et éjectée de la nappe le long de l'axe Ox.



Reconnexion magnétique dans la couronne solaire: observations satellite SDO NASA Instrument AIA Extrême Ultra Violet $T = 10^7$ K Site diffusif au point X de la nappe de courant

IV – Ondes acoustiques, ondes magnétiques, ondes de gravité

1 - Ondes de pression longitudinales (force de rappel: pression gazeuse)

On dispose des équations de base suivantes en négligeant la gravité :

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 & \text{conservation de la masse} \\ \rho [\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v})] = - \text{grad } P & \text{mouvement (force de rappel = gradient de pression)} \end{cases}$$

Le milieu est initialement au repos de pression P_0 et masse volumique ρ_0 uniformes, et on se place dans l'hypothèse de petits mouvements de vitesse \mathbf{v} le long de l'axe des x et on pose:

$P = P_0 + P_1$ où P_1 est la surpression par rapport à l'équilibre (négatif ou positif)

$\rho = \rho_0 + \rho_1$ où ρ_1 est la surdensité par rapport à l'équilibre (négatif ou positif)

avec $|P_1| \ll P_0$ et $|\rho_1| \ll \rho_0$

En négligeant les termes du second ordre comme $\mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v})$, on obtient des deux équations en projetant celle du mouvement selon Ox, avec $\mathbf{v} = v(x,t) \mathbf{e}_x$, P_1 et ρ_1 étant fonctions de x et t:

$$\begin{cases} \partial \rho_1 / \partial t + \rho_0 \partial v / \partial x = 0 \\ \rho_0 \partial v / \partial t = - \partial P_1 / \partial x \end{cases}$$

Pour aller plus loin, il faut relier P_1 à ρ_1 :

Soit χ le coefficient de compression caractéristique du gaz: $\chi = (1/\rho) \partial \rho / \partial P$

Pour une transformation isotherme du gaz parfait, $\chi = 1/P_0$
 Pour une transformation isentropique du gaz parfait, $\chi = 1/\gamma P_0$

Or $\chi = (1/\rho_0) \rho_1/P_1$, d'où $\rho_1 = \chi P_1 \rho_0$

$$\begin{cases} \chi \partial P_1 / \partial t + \partial v / \partial x = 0 \\ \rho_0 \partial v / \partial t = - \partial P_1 / \partial x \end{cases}$$

d'où il vient $\partial^2 v / \partial x^2 = \chi \rho_0 \partial^2 v / \partial t^2$ équation de d'Alembert; c'est donc l'équation de propagation d'une OPPH du type $v = |v| e^{i(\omega t - kx)}$ et de vitesse de phase $C_s = 1/(\chi \rho_0)^{1/2}$

- dans un milieu isotherme, $C_s = (P_0/\rho_0)^{1/2} = (R T_0/M)^{1/2}$

avec R constante des gaz parfaits, T_0 température et M masse molaire.

- dans un milieu adiabatique, $P/\rho^\gamma = \text{constante}$, $C_s = (\gamma R T_0/M)^{1/2}$

la relation de dispersion est $\omega = C_s k$

La linéarisation de l'équation $\rho_0 \partial v / \partial t = - \partial P_1 / \partial x$ pour une OPPH donne, avec $\partial / \partial t = i \omega$ et $\partial / \partial x = -i k$:

$\rho_0 \omega v = k P_1$ d'où $P_1 = \rho_0 C_s v$ et $\rho_1 = \chi \rho_0^2 C_s v$

Exemple du soleil:

- dans la chromosphère solaire, avec $T = 8000$ K, on trouve $C_s = (\gamma k T_0/m)^{1/2} = 11$ km/s
 - dans la couronne solaire, avec $T = 1.5 \cdot 10^6$ K, on trouve $C_s = (\gamma k T_0/m)^{1/2} = 144$ km/s
 avec $\gamma = 5/3$ et M masse molaire du proton (10^{-3} kg).

Aspects énergétiques

Le vecteur de Poynting de l'onde sonore est $\mathbf{\Pi} = P_1 \mathbf{v}$, où P_1 désigne la surpression ($P = P_0 + P_1$ avec $P_1 \ll P_0$). L'équation de conservation de la puissance a pour expression:

$$\text{div } \mathbf{\Pi} + \partial(1/2 \rho_0 \mathbf{v}^2 + 1/2 \chi P_1^2) / \partial t = 0$$

$1/2 \rho_0 \mathbf{v}^2$ et $1/2 \chi P_1^2$ sont respectivement les densités volumiques d'énergie cinétique et potentielle.

La surpression P_1 étant reliée à la vitesse v par $P_1 = \rho_0 C_s v$, il y a équipartition entre énergie cinétique et potentielle. La puissance instantanée transportée par l'onde est $\mathbf{\Pi} = \rho_0 v^2 C_s$ et en moyenne $\langle \mathbf{\Pi} \rangle = 1/2 \rho_0 |v|^2 C_s$ (W m⁻²)

2 - Ondes magnétiques d'Alfven transversales (force de rappel: magnétique)

On dispose des équations de base suivantes, dans lesquelles on néglige la gravité et la pression:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho [\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v})] = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} / \mu_0 \\ \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{conservation de la masse} \\ \text{mouvement (Euler, force de rappel magnétique)} \\ \text{Maxwell Ampère} \\ \text{équation de Maxwell Faraday en conductivité infinie} \\ \text{avec } \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0} \end{array}$$

On se place dans l'hypothèse de petits mouvements $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$ le long de l'axe des z dans un champ uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$ porté par l'axe des x, ρ_0 étant la masse volumique uniforme (figure). Les quantités dépendent de la variable x et de t.

Si on considère ρ comme constante (pas de force de pression), alors l'équation de conservation de la masse est vérifiée car $\text{div } \mathbf{v} = 0$ (\mathbf{v} est porté par \mathbf{e}_z et ne dépend que de x).

Soit \mathbf{B}_1 la perturbation du champ magnétique ($B_1 \ll B_0$); $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ et $\rho = \rho_0$ (incompressible) d'où les deux équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \partial \mathbf{v} / \partial t = \text{rot } \mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{B}_0 / \mu_0 \\ \partial \mathbf{B}_1 / \partial t = \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) \end{array} \right.$$

On a éliminé les termes du second ordre.

Avec $\mathbf{B}_1 = B_1 \mathbf{e}_z$, $\text{rot } \mathbf{B}_1 = - \partial B_1 / \partial x \mathbf{e}_y$

$$\rightarrow \rho_0 \partial \mathbf{v} / \partial t = (B_0 / \mu_0) \partial B_1 / \partial x \mathbf{e}_z$$

Avec $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0 = v B_0 \mathbf{e}_y$, $\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) = B_0 \partial v / \partial x \mathbf{e}_z$

$$\rightarrow \partial B_1 / \partial t = B_0 \partial v / \partial x$$

Dérivons la seconde équation par rapport à x:

$$B_0 \partial^2 v / \partial x^2 = \partial^2 B_1 / \partial t \partial x = (\rho_0 \mu_0 / B_0) \partial^2 v / \partial t^2 \quad \text{et finalement, on trouve :}$$

$$\boxed{\partial^2 v / \partial x^2 = (\mu_0 \rho_0 / B_0^2) \partial^2 v / \partial t^2} \quad \text{équation de d'Alembert,}$$

qui est une équation de propagation d'une OPPH du type $v = |v| e^{i(\omega t - kx)}$ de vitesse de phase:

$$\boxed{v_a = B_0 / (\mu_0 \rho_0)^{1/2}} \quad \text{La relation de dispersion est} \quad \boxed{\omega = v_a k}$$

v_a est appelée vitesse d'Alfvén, de l'ordre de 1000 km/s dans la couronne solaire, 100 km/s dans les taches solaires (valeurs très supérieures à la vitesse du son C_s); dans le soleil calme (champ magnétique faible), par contre, v_a est petit devant la vitesse du son C_s (< 10 km/s).

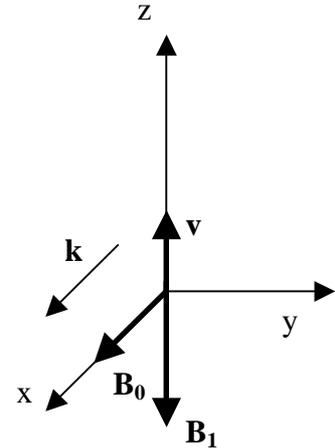
La seconde équation $\partial B_1 / \partial t = B_0 \partial v / \partial x$ donne la perturbation de champ magnétique B_1 en utilisant les opérateurs valables pour une OPPH, à savoir:

$$\partial / \partial t = i \omega \quad \text{et} \quad \partial / \partial x = -i k, \quad \text{d'où: } i \omega B_1 = -i k v B_0 \rightarrow \boxed{B_1 = -B_0 (v / v_a) \ll B_0}$$

En présence de la force de pression ($-\text{grad } P$), on obtiendrait des ondes magnéto acoustiques.

Aspects énergétiques

Le vecteur de Poynting de l'onde magnétique est $\mathbf{\Pi} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}_1) / \mu_0$, où $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0$.



$$\mathbf{E} = -v \mathbf{e}_z \wedge B_0 \mathbf{e}_x = -v B_0 \mathbf{e}_y \text{ d'où } \mathbf{\Pi} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}_1)/\mu_0 = -v B_0 \mathbf{e}_y \wedge B_1 \mathbf{e}_z / \mu_0 = -v B_0 B_1 \mathbf{e}_x / \mu_0$$

Avec $B_1 = -B_0 (v / v_a)$, on déduit $\mathbf{\Pi} = (B_1^2/\mu_0) v_a \mathbf{e}_x$

où B_1^2/μ_0 est la surpression magnétique à une constante près (en effet, la pression magnétique totale est $(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)^2/2\mu_0 = B_0^2/2\mu_0 + B_1^2/2\mu_0$ car \mathbf{B}_0 et \mathbf{B}_1 sont orthogonaux). L'équation de conservation de la puissance a pour expression:

$$\text{div } \mathbf{\Pi} + \partial(1/2 \rho_0 \mathbf{v}^2 + 1/2 B_1^2/\mu_0)/\partial t = 0$$

$1/2 \rho_0 \mathbf{v}^2$ et $1/2 B_1^2/\mu_0$ sont respectivement les densités volumiques d'énergie cinétique et magnétique. Comme $B_1 = -B_0 (v / v_a)$, il y a équipartition entre les deux.

La puissance transportée par l'onde est $\Pi = (B_1^2/ \mu_0) v_a = \rho_0 v^2 v_a$ et en moyenne,

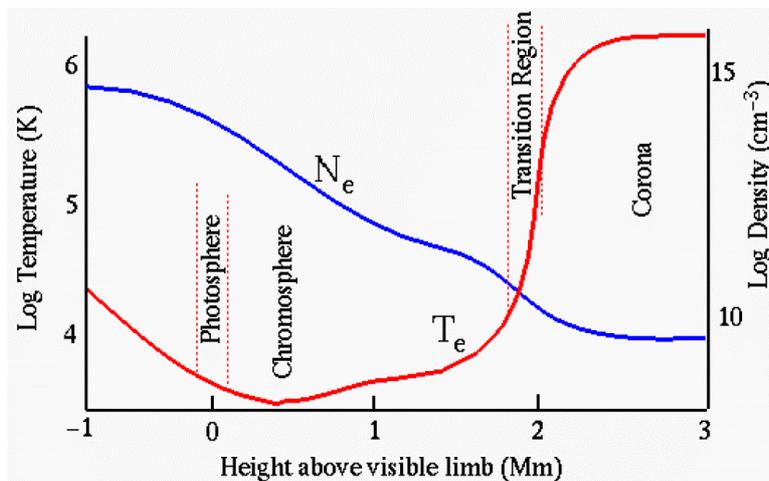
$$\langle \Pi \rangle = 1/2 \rho_0 |v|^2 v_a \text{ (W m}^{-2}\text{)}$$

On remarque que le rapport entre la puissance acoustique $\langle \Pi_s \rangle$ et magnétique $\langle \Pi_m \rangle$ vaut:

$$\langle \Pi_s \rangle / \langle \Pi_m \rangle = C_s/v_a = \beta^{1/2}$$

$\beta \gg 1$ dans la photosphère solaire calme, $\beta \ll 1$ dans les taches (champ magnétique fort).

3 - Application des ondes: chauffage de l'atmosphère solaire

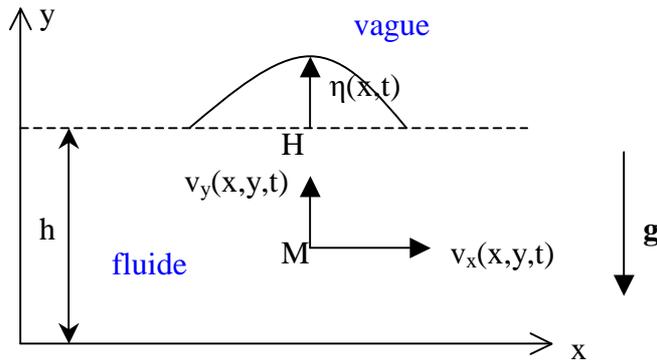


Température T (échelle LOG) dans l'atmosphère solaire en fonction de l'altitude z . La surface est la photosphère en $z = 0$ où $T = 6000$ K. La température remonte brusquement de 10^4 K à 10^6 K en l'espace de 100 km seulement dans la zone de transition chromosphère couronne.

Le transport acoustique (période 300 s ou fréquence 3 mHz) domine dans le soleil calme car $\beta \gg 1$ (champs magnétiques faibles); ρ varie en $e^{-z/h}$, où z est l'altitude et h l'échelle de hauteur hydrostatique ($h = RT/gM \approx 200$ km), la conservation de la masse $\rho v = \text{constante}$ suggère que la vitesse v varie approximativement en $e^{z/h}$ $v > C_s$ se former et dissiper l'énergie en chauffant localement le plasma. Ceci se produit pour $z = 2 h$ ou $z = 3 h$ dans la chromosphère.

4 - Ondes de gravité dans un fluide incompressible: la houle

Nous considérons un fluide incompressible de masse volumique ρ tel que $\text{div } \mathbf{v} = 0$, soumis aux forces de pression et de gravité, initialement au repos et en équilibre hydrostatique, selon le modèle suivant de profondeur h :



A l'équilibre hydrostatique, la pression $P_0(y)$ du fluide est donnée par la loi:

$$P_0(y) = P_0(0) - \rho g y$$

La vitesse du fluide en $M(x,y)$ est $\mathbf{v}(x,y,t)$ avec 2 composantes (v_x, v_y) et l'élévation du fluide en $H(x,h)$ est appelée $\eta(x,t)$.

Le PFD ou équation d'Euler s'écrit: $\rho \partial \mathbf{v} / \partial t + \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = - \text{grad } P + \rho \mathbf{g}$

On s'intéresse aux petits mouvements à partir de la position de repos du fluide, de telle sorte que le terme $\mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v}$ peut être négligé (second ordre) devant $\partial \mathbf{v} / \partial t$ (premier ordre). Appelons maintenant $P_1(x,y,t)$ la surpression (positive ou négative) par rapport à l'équilibre hydrostatique $P_0(y)$ du fluide: on a donc $P = P_0 + P_1$ et, en raison de l'équilibre hydrostatique initial, $-\text{grad } P_0 + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$.

L'équation d'Euler devient donc: $\rho \partial \mathbf{v} / \partial t = - \text{grad } P_1$

Prenons sa divergence; comme $\text{div } \mathbf{v} = 0$ (fluide incompressible), il vient $\Delta P_1 = 0$

La surpression vérifie donc l'équation de Laplace.

Nous allons rechercher une solution en ondes progressives selon Ox de la forme $P_1 = f(y) e^{i(\omega t - kx)}$

L'équation de Laplace devient alors: $d^2 f / dy^2 - k^2 f = 0$

qui a pour solution $f(y) = A e^{ky} + B e^{-ky}$

Nous devons maintenant examiner les conditions aux limites du problème:

- en $y = 0$, $v_y(x,0,t) = 0$

- en $y = h$, $v_y(x,h,t) = \partial \eta(x,t) / \partial t$ et $P_1(x,h,t) = \rho g \eta(x,t)$

On peut calculer $v_y = V_y(y) e^{i(\omega t - kx)}$ par l'équation d'Euler: $\rho \partial v_y / \partial t = - \partial P_1 / \partial y$

$$\rho i \omega v_y = - k e^{i(\omega t - kx)} (A e^{ky} - B e^{-ky})$$

$$\text{d'où } v_y = i (k / \rho \omega) e^{i(\omega t - kx)} (A e^{ky} - B e^{-ky})$$

La condition aux limites en $y = 0$, $v_y(x,0,t) = 0$, implique $A = B$

$$\text{Alors, } P_1 = 2 A \text{ch}(ky) e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad v_y = 2 i A (k / \rho \omega) \text{sh}(ky) e^{i(\omega t - kx)}$$

La seconde condition en $y = h$ donne d'une part $\eta(x,t) = (2 A / \rho g) \text{ch}(kh) e^{i(\omega t - kx)}$

et d'autre part, $v_y(x,h,t) = \partial \eta(x,t) / \partial t = i \omega (2 A / \rho g) \text{ch}(kh) e^{i(\omega t - kx)}$

que nous pouvons comparer à l'expression $v_y(x,h,t)$ déduite de l'équation d'Euler, à savoir:
 $v_y(x,h,t) = 2 i A (k / \rho \omega) \text{sh}(kh) e^{i(\omega t - kx)}$

L'égalité entre les deux expressions donne la relation:

$$i \omega (2 A / \rho g) \text{ch}(kh) = 2 i A (k / \rho \omega) \text{sh}(kh)$$

c'est à dire la relation de dispersion des ondes: $\omega^2 = k g \text{th}(kh)$

Examinons deux cas intéressants:

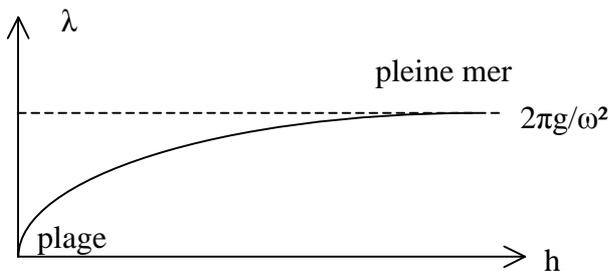
a) en eau profonde (pleine mer): $h \rightarrow \infty$ donne $\omega^2 = k g$ indépendant de la profondeur h

La vitesse de phase $v = \omega/k = g / \omega$ dépend de ω , le milieu est dispersif

b) en eau peu profonde (plage): $h \rightarrow 0$ donne $\omega = k (gh)^{1/2}$ dépendant de la profondeur h

La vitesse de phase $v = \omega/k = (gh)^{1/2}$ ne dépend pas de ω , le milieu n'est pas dispersif

Traçons dans le cas général la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ en fonction de h à ω fixé.



La longueur d'onde de la houle augmente avec la profondeur pour une période $T = 2\pi/\omega$ donnée. Elle est plus grande en pleine mer que sur la plage où elle tend vers zéro.

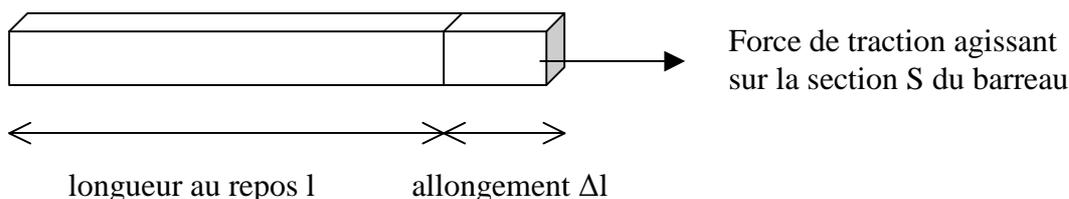
Application au soleil:

$\omega^2 = k g$ donne le mode fondamental des ondes de gravité observées dans l'atmosphère de l'étoile, de fréquence voisine du milli Hertz.

Il existe aussi des ondes acoustiques de quelques milli Hertz telles que $\omega = C_s k$ où C_s est la vitesse du son égale à $(\gamma RT/M)^{1/2}$, voisine de 9 km s^{-1} pour $T = 6000 \text{ K}$, $\gamma = 5/3$ et $M = 10^{-3} \text{ kg}$ (hydrogène).

5 - Ondes élastiques longitudinales dans les liquides et les solides

Considérons un barreau élastique de longueur l au repos et de section S , soumis à une force de traction, subissant ainsi un allongement Δl .



Loi de Hooke

Il apparaît au sein du barreau une contrainte ou surpression σ proportionnelle à son allongement Δl et donnée par la loi de Hooke:

$$\sigma = E (\Delta l / l) \quad \text{en Pascals (Pa)}$$

E est un coefficient caractéristique du matériau appelé module d'Young ou module d'élasticité. E se mesure en Pa (ou MPa). Pour un solide métallique, E est voisin de 10^{11} Pa.

Soit χ le coefficient de compression du matériau que nous avons défini par: $\chi = (1/\rho) \partial\rho/\partial P$

Pour un matériau de masse m donnée, $m = \rho V$ implique $\chi = - (1/V) \partial V/\partial P$

Dans le cas présent, $V = S l$ et $|\partial V/\partial P| \approx S \Delta l / \sigma$, dont on déduit:

$$\chi = 1/E$$

Nous avons vu que dans un gaz, l'onde se propage à la vitesse de phase $C_s = 1/(\chi \rho_0)^{1/2}$

Dans le cas d'un milieu élastique, cette relation donne $C_s = (E / \rho_0)^{1/2}$
où ρ_0 est la masse volumique au repos.

Exemples: vitesses de propagation de l'onde élastique longitudinale dans un solide, liquide, gaz

acier (solide): $\rho_0 = 7800 \text{ kg m}^{-3}$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $C_s = 5000 \text{ m s}^{-1}$

eau (liquide): $\rho_0 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $E = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $C_s = 1400 \text{ m s}^{-1}$

air (gaz): $\rho_0 = 1.3 \text{ kg m}^{-3}$, $E = 1.4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $C_s = 330 \text{ m s}^{-1}$

V - Chocs hydrodynamiques : relations de Rankine Hugoniot

Nous traitons un choc comme une discontinuité de vitesse, température, densité et pression. En amont, le nombre de Mach (rapport de la vitesse du fluide à la vitesse du son) est supérieur à l'unité. Un choc engendre une compression du plasma en aval. Appelons v_1, P_1, ρ_1 les vitesse, pression, masse volumique en amont du choc, et v_2, P_2, ρ_2 les vitesse, pression, masse volumique en aval du choc. On s'intéresse au régime stationnaire monodimensionnel adiabatique (axe Ox).

La conservation de la masse $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ donne $\rho v = \text{constante}$, donc

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

L'équation du mouvement $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}) + \mathbf{grad} P = 0$ donne

$$\rho_1 v_1^2 + P_1 = \rho_2 v_2^2 + P_2$$

L'équation de conservation de l'énergie $\text{div}[(H + 1/2 \rho v^2) \mathbf{v}] = 0$ (adiabatique) donne :

$$(H_1 + 1/2 \rho_1 v_1^2) v_1 = (H_2 + 1/2 \rho_2 v_2^2) v_2,$$

Comme $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, on obtient avec l'enthalpie massique du gaz parfait $h = H/\rho = [\gamma / (\gamma - 1)] P/\rho$:

$$[\gamma / (\gamma - 1)] P_1/\rho_1 + 1/2 v_1^2 = [\gamma / (\gamma - 1)] P_2/\rho_2 + 1/2 v_2^2$$

En fonction du nombre de Mach incident $M_1 = v_1/C_{s1}$ où

$$M_1 = v_1/C_{s1}$$

où

$$C_{s1} = (\gamma P_1/\rho_1)^{1/2}$$

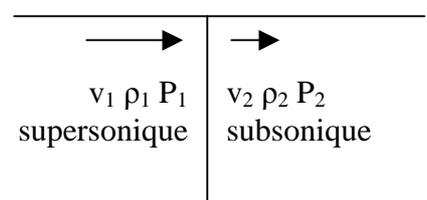
est la vitesse du son incidente, on obtient pour $M_1 > 1$,

les relations de Rankine Hugoniot :

$$v_1/v_2 = \rho_2/\rho_1 = (\gamma+1) M_1^2 / [2 + M_1^2 (\gamma-1)] > 1 \quad (\text{compression})$$

$$P_2/P_1 = [2 \gamma M_1^2 - (\gamma-1)] / (\gamma+1) > 1 \quad (\text{compression})$$

$$M_2^2 = [M_1^2 (\gamma-1) + 2] / [2 \gamma M_1^2 - (\gamma-1)] < 1 \quad (\text{subsonique})$$



$$T_2/T_1 = (P_2/P_1) / (\rho_2/\rho_1) > 1 \quad (\text{chauffage})$$

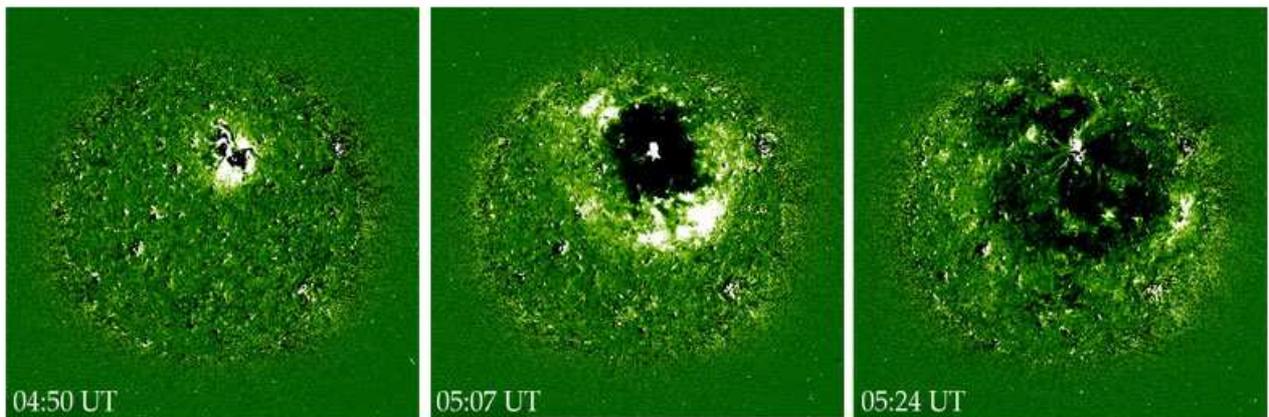
amont CHOC aval

$$S_2 - S_1 = nR/(\gamma-1) \ln[(P_2/P_1) / (\rho_2/\rho_1)^\gamma] > 0$$

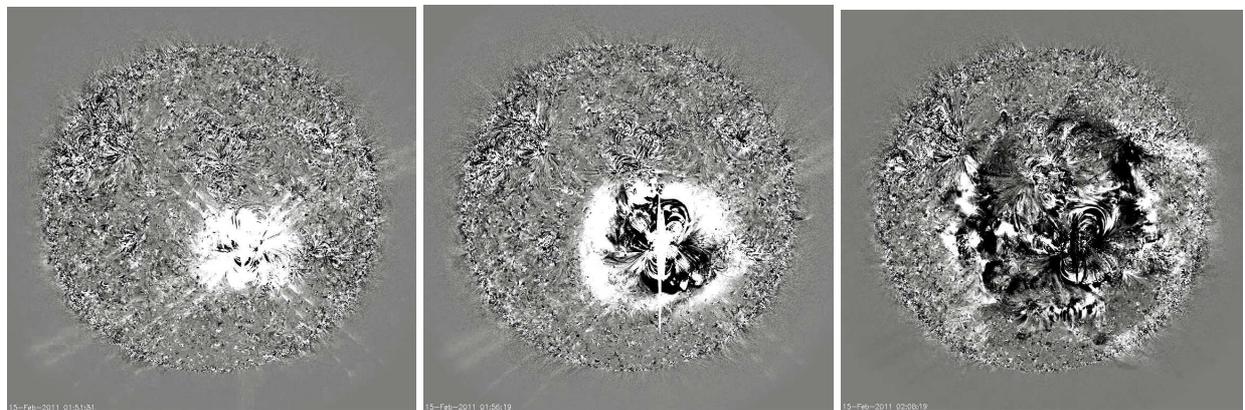
Ci dessus, $S = nR/(\gamma-1) \ln[P / \rho^\gamma]$ est l'entropie de n moles de gaz parfait (R constante des gaz parfaits).

Lorsque M_1 varie de 1 à l'infini :

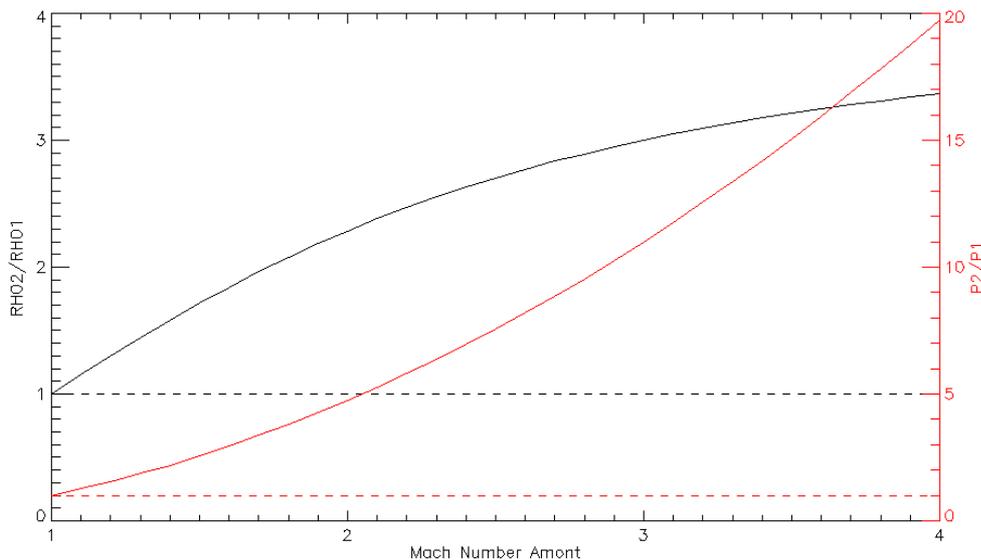
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 < v_1/v_2 = \rho_2/\rho_1 < (\gamma+1)/(\gamma-1) \quad (\text{maximum 4 pour } \gamma = 5/3) \\ 1 < P_2/P_1 < \infty \quad (\text{compression}) \\ 1 < T_2/T_1 = (P_2/P_1) / (\rho_2/\rho_1) < \infty \quad (\text{chauffage puisque } T_2/T_1 > 1) \\ 0 < S_2 - S_1 < \infty \quad (\text{augmentation d'entropie}) \end{array} \right.$$



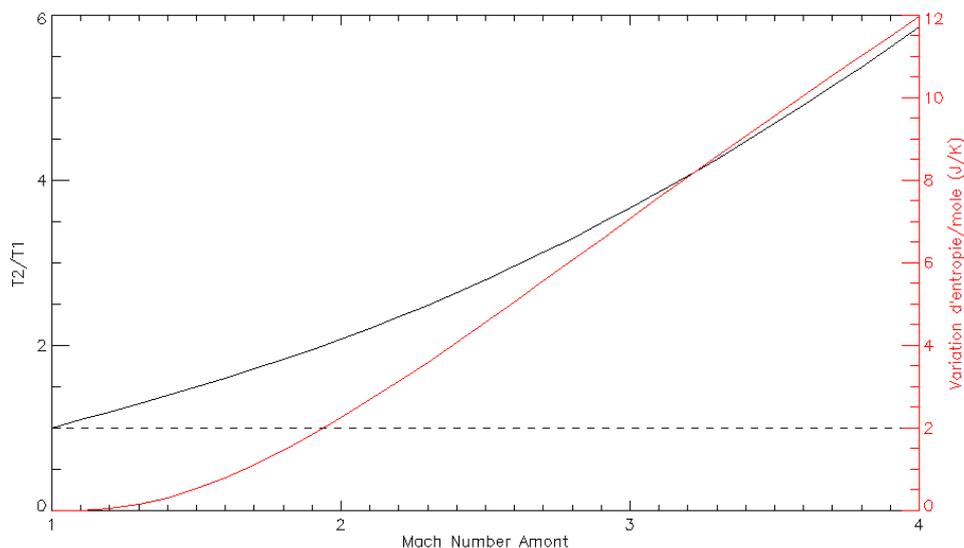
Onde de choc de Moreton déclenchée par une éruption dans l'atmosphère solaire. Observations SOHO EIT, raie du fer ionisé (Fe XII) à 19.5 nm de longueur d'onde (extrême ultra violet). L'onde peut se déplacer jusqu'à 500 km/s et balayer la surface du soleil en 10 minutes.



Observations SDO, raie du fer ionisé (Fe XII) à 19.5 nm de longueur d'onde (extrême ultra violet).



Rapports ρ_2/ρ_1 (noir) et P_2/P_1 (rouge) en fonction du nombre de Mach amont (> 1). Il y a compression. $\rho_2/\rho_1 > 1$ $P_2/P_1 > 1$



Rapport T_2/T_1 et variation d'entropie par mole $S_2 - S_1$ en fonction du nombre de Mach amont (> 1). Le choc adiabatique s'accompagne d'une augmentation d'entropie et de chauffage ($T_2/T_1 > 1$), c'est une transformation irréversible.

VI - Exemple d'écoulement transsonique: le vent solaire (solution de Parker)

On s'intéresse pour finir à l'écoulement du vent solaire, constitué de particules (protons, électrons) qui s'échappent du soleil en permanence vers le milieu interplanétaire. Les équations fondamentales, en régime stationnaire, et en négligeant toute force magnétique, ainsi que toute source d'énergie, ont été établies précédemment:

$$\begin{cases} \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \\ \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) = - \text{grad} P + \rho \mathbf{g} \end{cases}$$

avec $P = 2 \rho kT/m$, loi des gaz parfaits (m est la masse atomique du proton, le facteur 2 provient du fait que le milieu est totalelement ionisé dans la couronne solaire); on supposera que le milieu est isotherme ($T = \text{constante}$), ce qui donne 3 équations à 3 inconnues, P , ρ et v .

On se place dans un système de coordonnées sphériques, dans lequel la seule variable est r . Le vecteur vitesse est purement radial. La gravité dépend de r (loi de Newton $\mathbf{g} = - \mathbf{KM}/r^2$). Dans ce cas, $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = 1/r^2 \text{d}/\text{dr}(r^2\rho v) = 0$; on en déduit :

$$\boxed{r^2\rho v = \text{constante}} \quad (= \rho_0 v_0 r_0^2)$$

L'équation du mouvement devient : $\rho v dv/dr = - dP/dr - \rho KM/r^2$

M est la masse du soleil. On choisit v comme variable, et on exprime ρ et P en fonction de v:

$$\rho = \rho_0 v_0 r_0^2 / (v r^2)$$

et

$$P = 2 \rho kT/m = 2 (kT/m) \rho_0 v_0 r_0^2 / (v r^2)$$

avec les condition aux limites suivantes à la surface du soleil de rayon r_0 : $\rho = \rho_0$ et $v = v_0$.

L'équation du mouvement s'écrit:

$$dv/dr (v - v_s^2/v) = 2 v_s^2/r - (v_1^2/2) (r_0/r^2)$$

où $v_s = (2 kT/m)^{1/2}$ est la vitesse isotherme du son
 et $v_1 = (2KM/r_0)^{1/2}$ est la vitesse de libération du corps attractif

Remarque: on trouve v_1 en écrivant que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en $r = r_0$ (rayon du soleil) est égale à celle que l'on aurait à l'infini, c'est à dire nulle:

$$1/2 m v_1^2 - K m M/r_0 = 0 + 0 \text{ (à l'infini)}$$

d'où l'expression de $v_1 = (2KM/r_0)^{1/2}$. La vitesse de libération est donc la vitesse minimale d'éjection de la surface solaire pour échapper à l'attraction du soleil. Elle est de 600 km s^{-1} , très supérieure à celle du son.

L'équation différentielle s'intègre facilement:

$$1/2 (v^2 - v_0^2) - v_s^2 \ln(v/v_0) = 2 v_s^2 \ln(r/r_0) + (v_1^2/2) (r_0/r - 1)$$

L'équation différentielle admet une singularité lorsque le terme de gauche et le terme de droite sont nuls simultanément : $v = v_s$ et $r = r_s = 1/4 r_0 (v_1/v_s)^2$

La solution est alors transsonique ($v < v_s$ pour $r < r_s$ et $v > v_s$ pour $r > r_s$). Cette solution est atteinte pour la condition initiale v_0 telle que :

$$1/2 (v_s^2 - v_0^2) - v_s^2 \ln(v_s/v_0) = 2 v_s^2 \ln(1/4 (v_1/v_s)^2) + (v_1^2/2) (4(v_s/v_1)^2 - 1)$$

Numériquement, avec $T = 1.5 \cdot 10^6 \text{ K}$ (température de la couronne solaire), $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ (masse du soleil), $r_0 = 700000 \text{ km}$ (rayon du soleil), $m = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ (masse du proton), $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ (constante de Boltzman), $K = 6.67 \cdot 10^{-11}$ (constante de gravitation), on a:

$$\begin{cases} v_s = 157 \text{ km/s} \\ v_1 = 600 \text{ km/s} \end{cases}$$

dont on déduit $r_s = 3.9 r_0$.

Dans ce modèle, l'écoulement devient supersonique pour $r_s = 4 r_0 = 4$ rayons solaires lorsque v_0 satisfait l'équation ci dessus, ce qui donne $v_0 = 6.3 \text{ km/s}$.

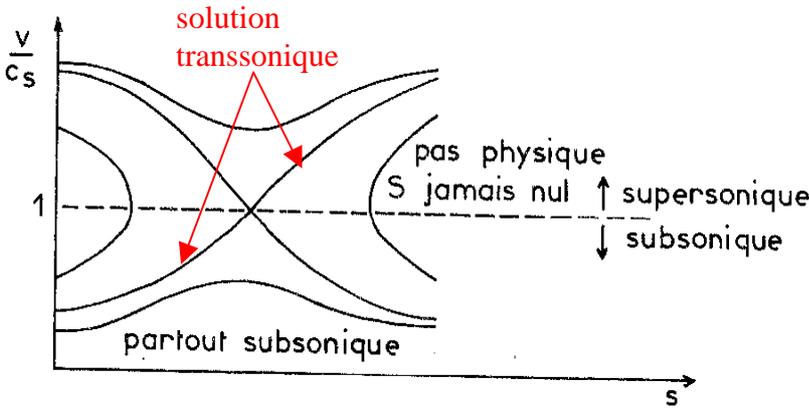
A grande distance du soleil, on a les solutions asymptotiques :

$$v = 2 v_s [\ln(r/r_0)]^{1/2} \text{ et } \rho = \rho_0 v_0 r_0^2 / [2 v_s r^2 (\ln(r/r_0))^{1/2}]$$

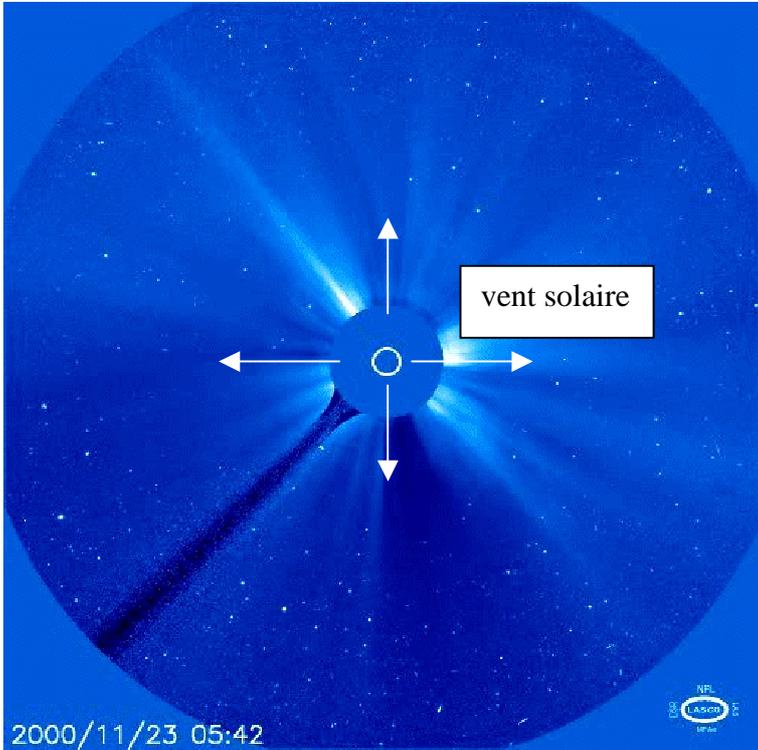
Ce sont des fonctions à variation spatiale lente. A l'orbite de la Terre (1 UA = 150 millions de km), cette solution asymptotique donne 365 km/s (la valeur observée est voisine de 400 km/s).

La masse volumique observée y est voisine de $\rho = 1.7 \cdot 10^{-20} \text{ kg m}^{-3}$. La solution de Parker permet de calculer la masse volumique dans la couronne à la naissance du vent solaire à partir des mesures à 1 UA par la relation $\rho_0 = r^2 \rho v / (r_0^2 v_0)$, ce qui donne $\rho_0 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ kg m}^{-3}$.

La situation réelle est plus complexe en raison du champ magnétique solaire et de la rotation de l'étoile. Le mouvement radial des particules se combine à la la rotation du Soleil, et le fluide emporte avec lui les lignes de champ magnétique solaires qui forment une spirale (la spirale de Parker) non plane, avec une alternance de secteurs à polarité N ou S dans le plan de l'écliptique.



Solutions de Parker $v/v_s(r)$ du vent solaire selon les valeurs de la vitesse initiale v_0 ; la solution transsonique (subsonique dans la basse couronne, puis supersonique) est la seule convenable.



Le vent solaire permanent est souvent doublé d'une composante sporadique, celle des éjections de masse coronale lors des phases actives (éruptions)