Electromagnétisme A

- les champs E et B définis par leur action sur une charge: force de Lorentz
- travail et énergie
- accélération d'une charge par un champ électrique
- déviation d'une charge par un champ magnétique; pulsation, rayon de giration, miroir magnétique
- déviation d'une charge dans un champ magnétique; équation horaire
- oscillateur harmonique en présence de champ magnétique; effet Zeeman
- oscillateur harmonique dans un champ électrique oscillant; profil d'amortissement en fréquence

I - Force de Lorentz subie par une charge dans un champ électrique et dans un champ magnétique

Une particule de charge q mobile, de vitesse **v**, plongée dans un champ électrique **E** et dans un champ magnétique **B**, subit la force de Lorentz:

$$\boxed{\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})}$$

q **E** est une force électrique, colinéaire au champ éléctrique **E**.

q **v** Λ **B** est une force magnétique, <u>orthogonale</u> à la fois à la vitesse **v** de la charge et au champ magnétique **B**.

Unités: **E** se mesure en Volts/m; **B** en Tesla (T); q en Coulomb (C); **v** en m/s.
Rappel: charge élémentaire e = 1.6 10-19 C; le proton a la charge +e, l'électron la charge -e.

II - Travail de la force de Lorentz et énergie mécanique

Le travail élémentaire est dW = **F.dOM**, où **dOM** est un déplacement élémentaire de la charge située en M, l'origine du repère étant en O; la vitesse **v** est reliée à **dOM** par **v** = **dOM/dt**.

$$dW = q\,\mathbf{E.dOM} + q\,(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})\mathbf{.dOM}$$
$$dW = q\,\mathbf{E.v}\,dt + q\,(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})\mathbf{.v}\,dt$$

Or (**v** Λ **B**)**.v** = 0 car (**v** Λ **B**) est un vecteur orthogonal au vecteur vitesse **v**

Donc dW = q **E.v** dt

La puissance de la force de Lorentz est $\boxed{\mathcal{P} = q\,\mathbf{E.v}}$ (Watts)

<u>La force magnétique ne travaille pas; sa puissance est nulle; seule la force électrique travaille</u>.

Si m désigne la masse de la particule de charge q, le principe fondamental de la dynamique implique:

$$m\,d\mathbf{v}/dt = q\,\mathbf{E} + q\,(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

Effectuons le produit scalaire avec v; il vient: $d(\frac{1}{2} m\,\mathbf{v}^2)/dt = q\,\mathbf{E.v} = q\,\mathbf{E.dOM}/dt$

d'où $d(\frac{1}{2} m\,\mathbf{v}^2) = q\,\mathbf{E.dOM}$

Si E dérive du potentiel électrostatique V, on a **E** = - **grad(**V**)**
d'où d(½ m $\mathbf{v}^2$) = - q **grad(**V**).dOM = - q** dV   car par définition, dV **= grad(**V**).dOM**

La quantité $\boxed{\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + qV}$ est <u>conservée</u>. C'est l'énergie mécanique de la particule chargée.

$\boxed{\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2}$ est l'énergie <u>cinétique</u> et $\boxed{qV}$ est l'énergie <u>potentielle</u>.

III - Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique constant

Supposons qu'une particule ponctuelle de charge q et de masse m soit soumise à la seule force électrique **F** = q **E**, où **E** est invariable dans l'espace et dans le temps.

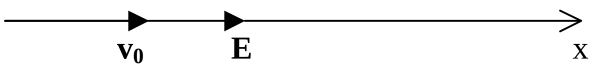
Le principe fondamental de la dynamique s'écrit:

m d²**OM**/dt² = m d**v**/dt = q **E**

ce qui s'intègre vectoriellement:

v(t) = d**OM**/dt = (q **E** / m) t **+** $\mathbf{v_0}$ où $\mathbf{v_0}$ est la vitesse initiale de la charge.
OM(t) = (½ q **E** /m**)** t² **+** $\mathbf{v_0}$ t + $\mathbf{OM_0}$ où M_0 est la position initiale de la charge.

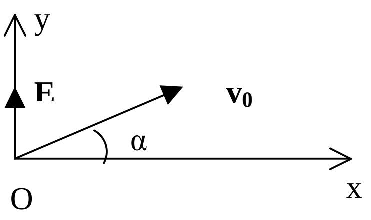
Exemple 1:
E et $\mathbf{v_0}$ sont colinéaires; la charge a pour abscisse x(t) et pour vitesse v(t) sur un axe Ox; sa position initiale est l'abscisse x_0



v(t) = (q E /m) t **+** v_0
et
x(t) = (½ q E / m) t² + v_0 t + x_0

Il s'agit d'un mouvement rectiligne, accéléré ou ralenti.

Exemple 2:
la charge a pour coordonnées [x(t), y(t)] et pour vitesse [v_x(t), v_y(t)] dans le repère (xOy); en t=0, elle est au point O et possède la vitesse initiale $\mathbf{v_0}$ [v_0 cos(α), v_0 sin(α)]



On a: **v**(t) = d**OM**/dt = (q **E** / m) t **+** $\mathbf{v_0}$ et **OM**(t) = (½ q **E** /m) t² **+** $\mathbf{v_0}$ t + $\mathbf{OM_0}$
Ces deux équations se projettent sur les axes Ox et Oy:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\alpha) & \text{mouvement à vitesse constante selon Ox} \\ v_y(t) = (q E / m)\, t + v_0 \sin(\alpha) & \text{mouvement accéléré ou ralenti selon Oy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t \\ y(t) = (\tfrac{1}{2} q E / m)\, t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t \end{cases}$$

On peut éliminer le temps t entre les deux équations; on obtient l'équation de la trajectoire:

$y = (½\, q\, E / m)\, (x / v_0 \cos(\alpha))^2 + x \tan(\alpha)$

Il s'agit d'une parabole.

Conclusion: les charges sont accélérées ou ralenties par un champ électrique. L'énergie cinétique de la particule varie.

IV - Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique; pulsation gyromagnétique et rayon de giration

Supposons qu'une particule ponctuelle de charge q et de masse m soit soumise à la seule force magnétique $\mathbf{F} = q\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, où $\mathbf{B}$ est invariable dans l'espace et dans le temps.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit:

$m\, d\mathbf{v}/dt = q\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$

Le produit scalaire avec v donne $m\, \mathbf{v}.d\mathbf{v}/dt = d(½\, m\, \mathbf{v}^2)\, /dt = 0$.

L'énergie cinétique de la particule est constante. La norme v du vecteur vitesse est invariable.

Considérons maintenant la dérivée du produit scalaire $\mathbf{v.B}$ par rapport au temps en supposant que $\mathbf{B}$ ne varie pas au cours du temps:

$d(\mathbf{v.B})/dt = d\mathbf{v}/dt\, .\, \mathbf{B} = q/m\ (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})\, .\, \mathbf{B} = 0$ puisque $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ et $\mathbf{B}$ sont orthogonaux.

On en déduit que le produit scalaire $\mathbf{v.B}$ est constant.

On peut décomposer le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ en 2 composantes, $\mathbf{v}_{//}$ dans la direction du champ magnétique et $\mathbf{v}_\perp$ dans le plan orthogonal au champ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{//} + \mathbf{v}_\perp$. On a alors avec $v = \|\mathbf{v}\|$, $v_{//} = \|\mathbf{v}_{//}\|$, $v_\perp = \|\mathbf{v}_\perp\|$ et $B = \|\mathbf{B}\|$:

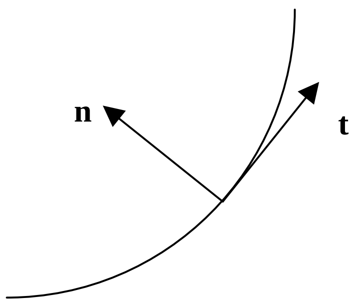
$v^2 = v_{//}^2 + v_\perp^2 = \text{constante}$ $v_{//}\, B = \text{constante}$	*Conséquence: B = constante, alors $v_{//}$ = constante et $v_\perp$ = constante*

Mouvement dans un champ magnétique de la forme $\mathbf{B} = B\, \mathbf{e_z}$

$\mathbf{v}_{//}$ est dans la direction Oz du champ magnétique et $\mathbf{v}_\perp$ dans le plan orthogonal xOy que l'on munit du repère de Frênet (**t**, **n**) où **t** est la tangente à la trajectoire et **n** la normale. $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{e_z})$ forment un trièdre orthonormé.

L'équation du mouvement s'écrit:

$m\, d\mathbf{v}/dt = m\, d\mathbf{v}_{//}/dt + m\, d\, \mathbf{v}_\perp/dt = q\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = q\, \mathbf{v}_\perp \wedge \mathbf{B}$



Posons $\mathbf{v}_{//} = v_{//}\, \mathbf{e_z}$ et $\mathbf{v}_\perp = v_\perp\, \mathbf{t}$

On a d'une part:

$\mathbf{v}_\perp \wedge \mathbf{B} = v_\perp \mathbf{t} \wedge B \mathbf{e_z} = - v_\perp B \mathbf{n}$
et d'autre part:
$d\mathbf{v}_\perp/dt = dv_\perp/dt\ \mathbf{t} + v_\perp\ d\mathbf{t}/dt$

Attention ! Ne pas confondre t, temps, et **t**, vecteur unitaire tangent !

Or $d\mathbf{t}/dt = (d\mathbf{t}/ds)\ (ds/dt)$ où s est l'abscisse curviligne de la charge dans le plan xOy; $v_\perp = ds/dt$; et $d\mathbf{t}/ds = \mathbf{n}/R$ où R est le rayon de courbure de la trajectoire.

Donc $d\mathbf{v}_\perp/dt = dv_\perp/dt\ \mathbf{t} + (v_\perp^2/R)\ \mathbf{n}$

et $m\ dv_{//}/dt\ \mathbf{e_z} + m\ dv_\perp/dt\ \mathbf{t} + (m\ v_\perp^2/R)\ \mathbf{n} = - q\ v_\perp B\ \mathbf{n}$

sur $\mathbf{e_z}$, on obtient: $dv_{//}/dt = 0$ d'où $\boxed{v_{//} = \text{constante}}$
sur **t**, on obtient: $dv_\perp/dt = 0$ d'où $\boxed{v_\perp = \text{constante}}$
et
sur **n**, on obtient: $m\ v_\perp^2/R = - q\ v_\perp B$ d'où $\boxed{R = - m\ v_\perp / q\ B}$ <u>rayon de giration</u>

et le vecteur rotation de la charge $\boxed{\mathbf{\Omega} = - (q\ B / m)\ \mathbf{e_z}}$

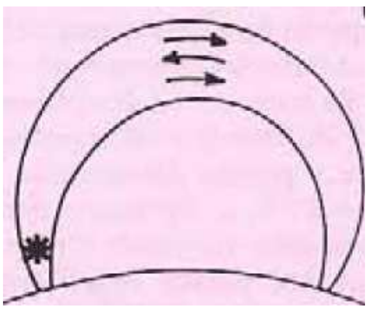
L'accélération dans le plan xOy est donnée par $\boxed{\mathbf{a}_\perp = d\mathbf{v}_\perp/dt = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v}_\perp}$

La quantité $\boxed{\|\mathbf{\Omega}\| = |q\ B / m|}$ porte le nom de <u>pulsation gyromagnétique</u>.

Si le champ magnétique est <u>uniforme</u>, le rayon de courbure R est <u>uniforme</u> et la trajectoire est un <u>cercle dans le plan xOy</u>. Il est parcouru dans le sens horaire ou antihoraire selon le signe du produit (q B). Dans l'espace, le mouvement est une <u>hélice</u> d'axe parallèle à $\mathbf{e_z}$ et de pas $h = v_{//}\ T$ où T est le temps de parcours du cercle égal à $2\pi/\Omega$**.** Le moment cinétique est constant et vaut $m\ v_\perp R$.

Conclusion: les charges sont déviées par un champ magnétique. L'énergie cinétique de la particule ne varie pas.

Application: le phénomène de piégeage de charges par miroir magnétique



A la surface du Soleil, le phénomène de miroir magnétique se produit lorsqu'une particule chargée se déplace d'une zone de champ magnétique faible (sommet d'une arche magnétique) vers ses pieds d'ancrage où le champ magnétique est fort. La vitesse de dérive $v_{//}$, maximale au sommet de l'arche, diminue vers ses pieds, peut s'annuler et s'inverser.

Le champ magnétique **B** étant à flux conservatif, on peut écrire en première approximation:

$\boxed{B\ S = \text{constante}}$, où S est la section de l'arche. Cette ci diminue du sommet vers les pieds de l'arche, de sorte que le champ magnétique B augmente.

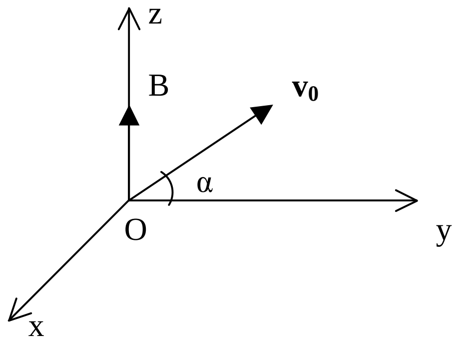
Cependant, $v_{//}\ B = \text{constante}$ implique que $v_{//}$ diminue du sommet vers les pieds de l'arche.

De $v^2 = v_{//}^2 + v_\perp^2 = \text{constante}$, on en déduit que $v_\perp$ augmente vers les pieds de l'arche.

Aux ordres de grandeur, en supposant que S est voisin de R², rayon de giration, B varie en 1/R² et $v_{//}$ varie en R²; comme R → 0 aux pieds, $v_{//}$ → 0 aux pieds, donc $v_{//}$ peut s'annuler et s'inverser.

Sachant que R = m v⊥ / q B, on en déduit que v⊥ varie en 1/R, donc v⊥ → ∞ aux pieds.

V - Mouvement d'une particule chargée dans un champ dans un champ magnétique uniforme; équation horaire



On considère une particule de charge q et de masse m plongée dans un champ magnétique uniforme **B** = B $\mathbf{e_z}$, située à l'instant t = 0 à l'origine O du repère, et de vitesse initiale $\mathbf{v_0}$ contenue dans le plan (yOz), de coordonnées (0, v_0 cosα, v_0 sinα). La particule est à l'instant t en M de coordonnées (x, y, z) et sa vitesse **v** a pour composantes (dx/dt, dy/dt, dz/dt).

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit:
m d**v**/dt = q **v** Λ **B** , équation que l'on projette sur les 3 axes.

$$\begin{cases} \text{Selon Ox: } m\, d^2x/dt^2 = q\, B\, dy/dt & (1) \\ \text{Selon Oy: } m\, d^2y/dt^2 = -\, q\, B\, dx/dt & (2) \\ \text{Selon Oz: } m\, d^2z/dt^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

La troisième équation donne immédiatement dz/dt = v_0 sinα = constante, et z(t) = v_0 sinα t

Le mouvement se fait donc à <u>vitesse constante dans la direction du champ magnétique</u>.

Les deux premières équations sont couplées; pour les résoudre, on va les combiner en posant u(t) = x(t) + i y(t) et on calcule (1) + i (2), ce qui donne:

$$m\, d^2u/dt^2 = -\, i\, q\, B\, du/dt$$

avec la condition initiale en t = 0: du/dt = i v_0 cosα, on obtient:

$$du/dt = i\, v_0 \cos\alpha \exp(-\, i\, \omega t) = i\, v_0 \cos\alpha\, [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] = v_0 \cos\alpha\, [\sin(\omega t) + i \cos(\omega t)]$$

où $\boxed{\omega = q\, B / m}$ est la <u>pulsation gyromagnétique</u>.

$$\begin{cases} dx/dt = v_0 \cos\alpha \sin(\omega t) \\ dy/dt = v_0 \cos\alpha \cos(\omega t) \end{cases}$$

Dans le plan xOy, la vitesse est égale à v_0 cosα ; selon l'axe Oz, la vitesse vaut v_0 sinα ; <u>la norme du vecteur vitesse est donc constante et égale à v_0.</u>

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \, (1 - \cos(\omega t)) / \omega \\ y(t) = v_0 \cos\alpha \, \sin(\omega t) / \omega \end{cases}$$

d'où l'équation de la trajectoire dans le plan xOy:

$$(x - v_0 \cos\alpha / \omega)^2 + y^2 = (v_0 \cos\alpha / \omega)^2$$

C'est un cercle de centre $\boxed{C\ (v_0 \cos\alpha / \omega, 0)}$ et de rayon $\boxed{R = v_0 \cos\alpha / \omega}$, dit rayon de giration.

Au bout d'une rotation effectuée en un temps $T = 2\pi / \omega$, la particule a dérivé sur l'axe Oz de la quantité $h = v_0 \sin\alpha \, T = 2\pi \, v_0 \sin\alpha / \omega$.

La trajectoire dans l'espace est donc une hélice de pas h dont l'axe est parallèle au champ magnétique, décrite à vitesse constante, avec un rayon R de giration constant.

On remarque que $\boxed{h / R = 2\pi \tan(\alpha)}$, rapport qui ne dépend que de l'orientation de la vitesse initiale.

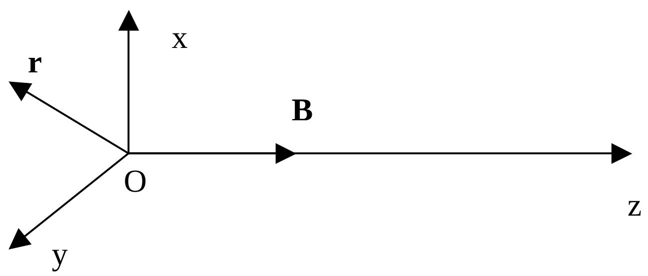
La force de Lorentz a pour composantes: $q B v_0 \cos\alpha \, [\cos(\omega t), - \sin(\omega t), 0]$, sa norme est invariable et vaut $q B v_0 \cos\alpha$. Elle est radiale. Le moment de cette force par rapport à l'axe de l'hélice est donc nul, impliquant la constance du moment cinétique K égal à:

$$\boxed{K = m v_0 \cos\alpha \, R = m v_0^2 \cos^2\alpha / \omega}$$

VI - Oscillateur harmonique en présence de champ magnétique et effet Zeeman

Considérons un modèle d'atome très simplifié dans lequel l'électron mobile en M autour du noyau immobile situé en O est décrit par un oscillateur harmonique, c'est à dire dont la force de rappel est décrite par - k **OM**, où k est une constante positive. La charge de l'électron est -e et sa masse est m. On plonge cet électron dans un champ magnétique extérieur, de sorte qu'il subit deux forces, la force de rappel vers O et la force de Lorentz.

Mouvement de l'électron dans le champ magnétique



On choisit un champ magnétique uniforme et on oriente l'axe Oz tel que $\mathbf{B} = B \, \mathbf{e_z}$

L'électron est situé à l'extrémité du vecteur $\mathbf{OM} = \mathbf{r}(x,y,z)$. On pose:

$\omega_0^2 = k/m$ pulsation propre liée à la force de rappel
et
$\omega_g = eB/m$ pulsation gyromagnétique.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit vectoriellement:

$m\, d^2\mathbf{r}/dt^2 = -k\,\mathbf{r} - e\, d\mathbf{r}/dt \wedge B\,\mathbf{e_z}$

En projection sur les axes, cette équation devient:

$$\begin{cases} d^2x/dt^2 + \omega_0^2\, x + \omega_g\, dy/dt = 0 & (1) \\ d^2y/dt^2 + \omega_0^2\, y - \omega_g\, dx/dt = 0 & (2) \\ d^2z/dt^2 + \omega_0^2\, z = 0 & (3) \end{cases}$$

La 3ème équation donne par exemple $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t)$, qui représente une vibration selon l'axe Oz de pulsation ω_0 dans la direction du champ magnétique. On dit que la vibration est polarisée linéairement selon Oz.

Pour résoudre les deux premières équations donnant le mouvement vibratoire dans le plan xOy, on pose $u = x + i\,y$ et on effectue (1) + i (2). Il vient:

$d^2u/dt^2 + \omega_0^2\, u - i\,\omega_g\, du/dt = 0$

Posons $u = u_0\, e^{i\omega t}$, on obtient $u_0\, e^{i\omega t}\,(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_0\omega_g) = 0$

Nous recherchons les solutions de $(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_0\omega_g) = 0$ telles que $\omega_g << \omega_0$. On obtient alors les deux solutions:

$\boxed{\omega = \omega_g/2 + \omega_0 \text{ et } \omega = \omega_g/2 - \omega_0}$, ce qui donne les deux autres solutions possibles:

$$\begin{cases} u_1 = u_0\,[\cos(\omega_0+\omega_g/2)t + i \sin(\omega_0+\omega_g/2)t\,] \\ \text{et} \\ u_2 = u_0\,[\cos(\omega_0-\omega_g/2)t - i \sin(\omega_0-\omega_g/2)t\,] \end{cases}$$

$\boxed{\omega_L = \omega_g/2 = e\,B / 2\,m \text{ s'appelle pulsation de Larmor}}$

En supposant que $u_0 = x_0$ (réel), on en déduit les deux vibrations suivantes selon la valeur de ω:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0+\omega_g/2)t \\ y = x_0 \sin(\omega_0+\omega_g/2)t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0-\omega_g/2)t \\ y = -\,x_0 \sin(\omega_0-\omega_g/2)t \end{cases}$$

Ces deux vibrations décrivent un cercle, puisque $(x^2 + y^2) = cte$, on dit qu'elles sont polarisées circulairement droite et gauche selon le sens de rotation du vecteur $\mathbf{r}(x,y,0)$ dans le plan perpendiculaire au champ magnétique.
L'écart entre les deux pulsations étant $\boxed{\Delta\omega = \omega_g}$, on en déduit l'écart en longueur d'onde sachant que $\lambda = C\, 2\pi/\omega$:

$\Delta\lambda = \lambda^2\, \Delta\omega / 2\pi C = \lambda^2\, \omega_g / 2\pi C = (e / 2\pi m C)\, \lambda^2\, B$

On note par convention $\boxed{\Delta\lambda_B = (e / 4\pi m C)\, \lambda^2\, B}$ de sorte que l'écartement est $\boxed{\Delta\lambda = 2\,\Delta\lambda_B}$

et numériquement $\boxed{\Delta\lambda_B = 4.67\; 10^{-13}\; \lambda^2\, B}$

avec dans cette formule B en Gauss ($1\,G = 10^{-4}\,T$), λ et $\Delta\lambda_B$ en Angströms (10^{-10} m).

Effet Zeeman

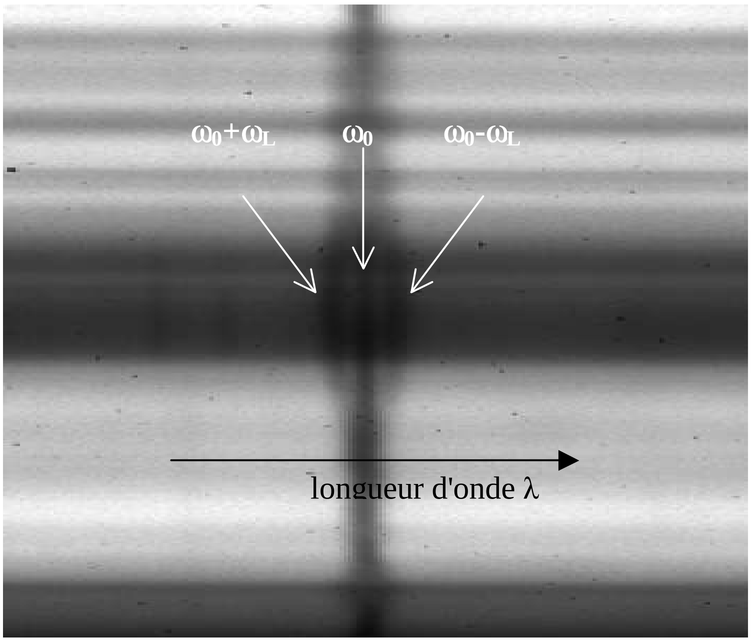
La mécanique quantique transforme cette expression en introduisant simplement un facteur multiplicatif, le facteur de Landé équivalent g* de la transition (ce facteur est tabulé):

$\boxed{\Delta\lambda_B = (e / 4\pi mC)\, g^*\, \lambda^2\, B \;=\; 4.67\; 10^{-13}\;\; g^*\, \lambda^2\, B}$ avec B en Gauss, λ et $\Delta\lambda_B$ en Angströms.

Il y a en conclusion trois solutions possibles:
- une vibration dans la direction du champ magnétique à la pulsation ω_0 de l'oscillateur harmonique
- deux vibrations dans un plan orthogonal au champ magnétique ayant pour pulsation $\omega_0+\omega_L$ ou $\omega_0-\omega_L$ qui sont polarisées circulairement droite et gauche ($\omega_L = \omega_g/2$ pulsation de Larmor).

L'écart $\Delta\omega = \omega_g$ entre les deux pulsation ou l'écart en longueur d'onde $\Delta\lambda$ est proportionnel au module B du champ magnétique.

C'est l'effet Zeeman. On l'observe sur une raie spectrale atomique (exemple ci dessous) centrée sur la pulsation ω_0 sans champ magnétique; en présence de champ, deux autres composantes centrées sur $\omega_0+\omega_L$ et $\omega_0-\omega_L$ apparaissent. La mesure de leur écartement permet de connaître la valeur du champ magnétique à distance, en examinant les spectres de certains atomes. Application: mesure des champs magnétiques solaires et stellaires.



Raie FeI 6173 A sur une tache solaire

VII - Oscillateur harmonique en présence d'un champ électrique et profil d'amortissement en fréquence

Un modèle très simple permet d'expliquer les profils en fréquence des raies spectrales qui caractérisent un gaz en interaction avec le rayonnement ambiant (ondes lumineuses). Considérons un modèle unidimensionnel composé un électron de position x(t) lié au noyau de l'atome par la force de rappel $-kx$, subissant un amortissement $-m\gamma dx/dt$, et oscillant dans un champ électrique de la forme $E\, e^{i\omega t}$ représentant une vibration lumineuse de pulsation $\omega = 2\pi\nu$ ou de fréquence ν.
m et -e sont respectivement la masse et la charge de l'électron; γ représente son amortissement (en s^{-1}). Le principe fondamental de la dynamique donne selon Ox:

$m\, d^2x/dt^2 + m\gamma\, dx/dt + kx = -e\, E\, e^{i\omega t}$

et l'on pose $x = X\, e^{i\omega t}$, où X est l'amplitude complexe du mouvement.

On a alors: $(- m\, \omega^2 + i\omega\, m\gamma + k)\, X = -e\, E$

d'où $X = (-e/m)\, E / (\omega_0^2 - \omega^2 + i\, \gamma\, \omega)$

$\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ est la pulsation propre, qui décrit de façon très simplifiée le fait que l'électron est lié au noyau par une force de rappel.

Nous nous intéressons à la puissance moyenne dissipée par la force de frottement $<m\gamma(dx/dt)^2>$, qui dans la réalité correspond à la perte d'énergie de l'électron lié parce qu'il rayonne en se comportant comme un dipôle oscillant (rayonnement dipolaire électrique, théorie des potentiels retardés).

Comme $<(dx/dt)^2> = ½\, |(dx/dt)^2| = ½\, |X|^2\, \omega^2$, la puissance moyenne absorbée par la dissipation est égale à :

$<P_f> = ½\, m\gamma\, |X|^2\, \omega^2 = ½\, \gamma\, (e^2/m)\, E^2\, \omega^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\, \omega^2]$

En posant $\omega = 2\pi\nu$, il vient $<P_f> = (\gamma/8\pi^2)\, (e^2/m)\, E^2 / [(\nu_0^2/\nu - \nu)^2 + (\gamma/2\pi)^2]$

Au voisinage de la fréquence de résonance ν_0, on a $(\nu_0^2/\nu - \nu) \approx 2(\nu_0 - \nu)$, d'où

$<P_f> \approx (\gamma/32\pi^2)\, (e^2/m)\, E^2 / [(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$

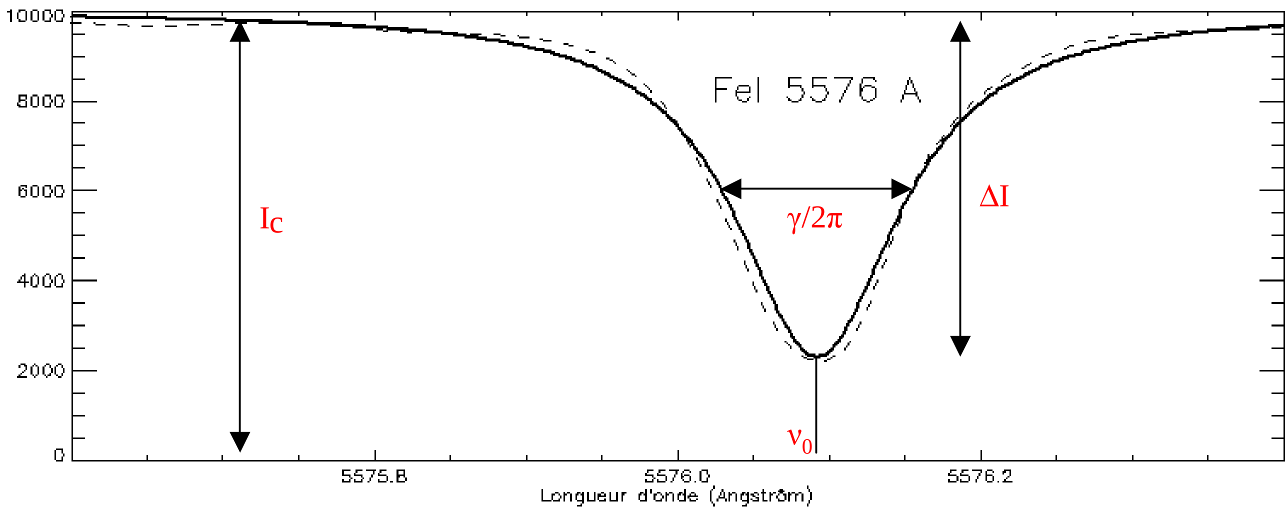
La section efficace σ (en m²) de photo excitation caractérise l'interaction entre le rayonnement et l'électron lié à l'atome; elle est définie comme le rapport de la puissance moyenne dissipée $<P_f>$ (en W) à la puissance moyenne électromagnétique transportée par unité de surface (moyenne du vecteur de Poynting $<P>$ en W/m²), égale au produit $C\, \varepsilon_0\, E^2/2$:

$\sigma(\nu) = <P_f> / <P> = <P_f> / (C\, \varepsilon_0\, E^2/2)$ proportionnel à $\boxed{L(\nu) = (\gamma/4\pi)^2 / [(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]}$

Il s'agit d'un profil "Lorentzien", présentant un pic à la résonance ν_0 et de largeur à mi hauteur $\gamma/2\pi$.

ν_0 est assimilable à la fréquence centrale d'une raie spectrale atomique, la quantité $\gamma/2\pi$ représentant alors la largeur naturelle de la raie ou élargie par les collisions, de l'ordre de $10^{-11}\ s^{-1}$.

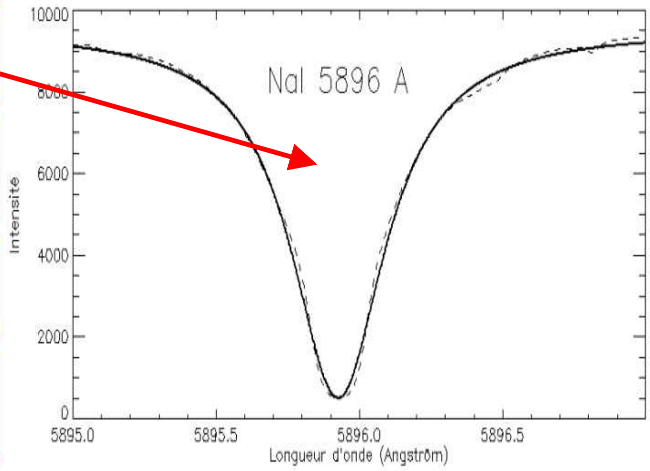
Cependant, dans l'atmosphère solaire, les profils sont plutôt renversés, en absorption.



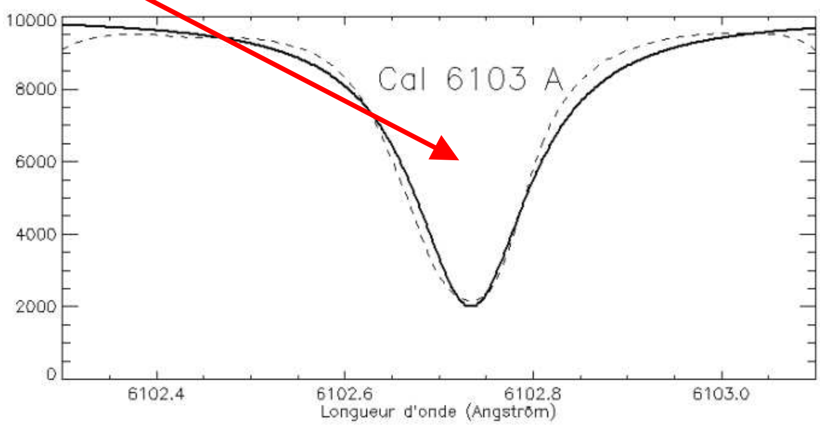
On effectue alors un ajustement (trait continu ——) entre le profil d'une raie solaire observée (ici en tirets ----) et la fonction intensité:

$$\boxed{I(\nu) = I_C - \Delta I\, L(\nu)}$$

où $L(\nu)$ est le profil Lorentzien ci dessus (fonction variant entre 0 et 1, égale à 1 à la résonance), Ic l'intensité du rayonnement continu (figure) et ΔI la dépression centrale de la raie (figure). Pour de nombreuses raies d'atomes lourds, l'ajustement est bon. Par contre, pour des atomes plus légers (Hydrogène), il l'est moins. En effet, on n'a pas tenu compte, par simplicité, de l'agitation thermique des atomes, qui confère au coeur des raies un profil plutôt de forme gaussienne, et cette agitation thermique est d'autant plus forte que les éléments ont une faible masse.



Exemples de raies spectrales dans l'atmosphère du soleil: Sodium à 589.6 nm, Calcium à 610.3 nm
En trait pointillé: profil <u>observé</u> de la raie en fonction de la longueur d'onde
En trait continu: fonction $I(\nu) = I_C - \Delta I\, L(\nu)$ <u>ajustée</u> au profil observé



L'exploration des profils des raies permet de sonder l'atmosphère solaire en profondeur; ici plusieurs couches de la chromosphère dans la raie H alpha de l'Hydrogène