Eléments d'analyse vectorielle

(les **vecteurs** sont en caractères **gras)**

Ci dessous, f (x,y,z) désigne un champ scalaire; c'est une fonction des variables (x, y, z).
A (A_x, A_y, A_z), **B** (B_x, B_y, B_z) et **C** (C_x, C_y, C_z) désignent des champs vectoriels, chaque composante est un champ scalaire dépendant des variables spatiales (x, y, z).

1 - Rappels sur les vecteurs

- *le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre positif ou négatif*
$\mathbf{A.B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\| \cos(A,B)$
Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.
$\|\mathbf{A}\|^2 = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A.A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

- *le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur*
$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y\ ,\ A_z B_x - A_x B_z,\ A_x B_y - A_y B_x)$
$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ est un vecteur orthogonal à la fois à **A** et à **B**
$\|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\| \, |\sin(A,B)|$
Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul.
$\|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\|$ représente l'<u>aire</u> du parallélogramme généré par **A**, **B**

Règle des doigts de la main droite: **A =** pouce ; **B =** index ; $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ = majeur

- *le produit mixte de trois vecteurs est un nombre*:
$\mathbf{A}.(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{C}.(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B}.(\mathbf{C} \wedge \mathbf{A})$ est invariant par permutation circulaire
$|\mathbf{A}.(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})|$ représente le <u>volume</u> du prisme droit généré par **A, B, C**
Dès que deux vecteurs sont colénéaires, le produit mixte est nul.

- *le double produit vectoriel de trois vecteurs est un vecteur*:
$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} .\mathbf{C})\, \mathbf{B} - (\mathbf{A} .\mathbf{B})\, \mathbf{C}$
n'a pas de composante sur **A** puisqu'il lui est orthogonal

2- Dérivées partielles, différentielle d'une fonction

Soit f(x,y,z) une fonction des variables spatiales x, y, z
$\partial f/\partial x$ est la dérivée de la fonction par rapport à x en considérant y et z comme des constantes
$\partial f/\partial y$ est la dérivée de la fonction par rapport à y en considérant x et z comme des constantes
$\partial f/\partial z$ est la dérivée de la fonction par rapport à z en considérant x et y comme des constantes

$df = \partial f/\partial x\, dx + \partial f/\partial y\, dy + \partial f/\partial z\, dz$ est la différentielle de f(x,y,z); elle représente les variations de f(x,y,z) lorsque x varie de x à x+dx, y de y à y+dy et z de z à z+dz

3 - les opérateurs

Ils agissent soit sur des champs scalaires, soit sur des champs vectoriels. En coordonnées cartésiennes, on définit:

- L'opérateur « *nabla* »: $\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$

- L'opérateur *gradient*: $\mathbf{grad}\ f = \nabla f = (\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y,\ \partial f/\partial z)$

Remarque: df = **gradf . dOM** avec **dOM** (dx, dy, dz)

- L'opérateur *divergence*: div **A** = ∇ . **A** = $\partial A_x/\partial x + \partial A_y/\partial y + \partial A_z/\partial z$ (produit scalaire de ∇ et **A**)

- L'opérateur *rotationnel*: **rot** A = ∇ Λ **A** (produit vectoriel de ∇ et de **A**) tel que:

$$\mathbf{rot}\, A = (\partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z ,\ \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x ,\ \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y)$$

Remarques:
Le gradient s'applique à un champ scalaire et le résultat est un champ vectoriel
La divergence s'applique à un champ vectoriel et le résultat est un champ scalaire
Le rotationnel s'applique à un champ vectoriel et le résultat est un champ vectoriel

- *Quelques formules très utiles*:

rot(**grad**f) = ∇ Λ (∇ f) = **0** *le rotationnel d'un gradient est nul*
div(**rotA**) = ∇ . (∇ Λ A) = 0 *la divergence d'un rotationnel est nulle*

div(f **A**) = f div**A** + **grad**f . **A**
rot(f **A**) = f **rotA** + **grad**f Λ **A**
Cas particulier: si A est un vecteur fixe indépendant des coordonnées de l'espace:
div(f **A**) = **grad**f . **A**
rot(f **A**) = **grad**f Λ **A**

div(**A** Λ B) = **B rotA – A rotB**

grad (**A²/2**) = **A** Λ **rotA + (A.grad)A**

rot(rotA) = grad(div**A) - ΔA**

- Le *Laplacien* *scalaire* est défini par $\Delta f = \nabla^2 f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2$ = div(**grad** f)

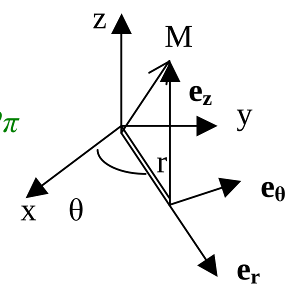
- Le *Laplacien* *vectoriel* est défini par **ΔA = grad(**div**A) - rot(rotA)**
En cartésiennes, on peut écrire **ΔA** = $(\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$ ou Δ est le Laplacien scalaire; ce n'est pas vrai dans les autres systèmes de coordonnées (cylindriques et sphériques).
Le Laplacien s'applique à un champ scalaire ou vectoriel et le résultat est de même nature

4 - systèmes de coordonnées

- *Coordonnées cylindriques* M(r, θ, z), trièdre mobile ($\mathbf{e_r}, \mathbf{e_\theta}, \mathbf{e_z}$)

OM = r $\mathbf{e_r}$ + z $\mathbf{e_z}$
grad f = [$\partial f/\partial r$, $(1/r)\,\partial f/\partial\theta$, $\partial f/\partial z$]
div**A** = $(1/r)\,\partial(rA_r)/\partial r + (1/r)\,\partial A_\theta/\partial\theta + \partial A_z/\partial z$
rotA = [$(1/r)\,\partial A_z/\partial\theta - \partial A_\theta/\partial z$, $\partial A_r/\partial z - \partial A_z/\partial r$, $(1/r)\,(\partial(rA_\theta)/\partial r - \partial A_r/\partial\theta)$]

$r \geq 0$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

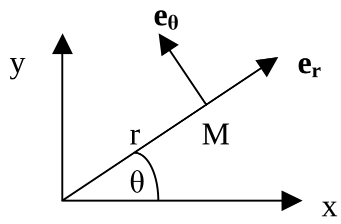


$$\Delta f = (1/r)\,\partial(r\partial f/\partial r)/\partial r + (1/r^2)\,\partial^2 f/\partial\theta^2 + \partial^2 f/\partial z^2$$

- *Coordonnées polaires* M(r, θ) planes, repère mobile (**e_r, e_θ**)
  Ce sont les coordonnées cylindriques sans la 3ème dimension z

OM = r **e_r**
grad f = [$\partial f/\partial r$, $(1/r)\, \partial f/\partial\theta$]
div**A** = $(1/r)\, \partial(rA_r)/\partial r + (1/r)\, \partial A_\theta/\partial\theta$
rot A = $(1/r)\, (\partial(rA_\theta)/\partial r - \partial A_r/\partial\theta)$ **e_z**

$r \geq 0$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

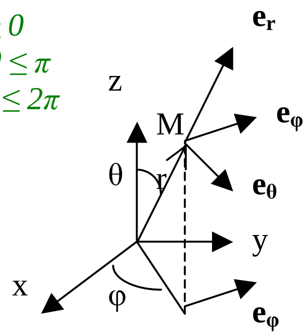


$\Delta f = (1/r)\, \partial(r\partial f/\partial r)/\partial r + (1/r^2)\, \partial^2 f/\partial\theta^2$

- *Coordonnées sphériques* M(r, θ, φ), trièdre mobile (**e_r, e_θ, e_φ**)

OM = r **e_r** (**e_φ** ∈ plan xOy)
grad f = [$\partial f/\partial r$, $(1/r)\, \partial f/\partial\theta$, $(1/r\sin\theta)\, \partial f/\partial\varphi$]
div**A** = $(1/r^2)\, \partial(r^2A_r)/\partial r + (1/r\sin\theta)\, \partial(\sin\theta A_\theta)/\partial\theta + (1/r\sin\theta)\, \partial A_\varphi/\partial\varphi$
rot A = [$(1/r\sin\theta)\ (\partial(\sin\theta A_\varphi)/\partial\theta - \partial A_\theta/\partial\varphi)$,
$(1/r\sin\theta)\, \partial A_r/\partial\varphi\ -\ (1/r)\ \partial(rA_\varphi)/\partial r$,
$(1/r)\ (\partial(rA_\theta)/\partial r - \partial A_r/\partial\theta)$]

$r \geq 0$
$0 \leq \theta \leq \pi$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$



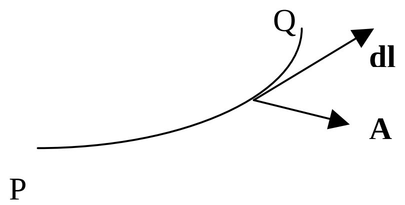
$\Delta f = (1/r)\, \partial^2(rf)/\partial r^2 + (1/r^2\sin\theta)\, \partial(\sin\theta\, \partial f/\partial\theta)/\partial\theta + (1/r^2\sin^2\theta)\, \partial^2 f/\partial\varphi^2$

5 - circulation et flux d'un champ vectoriel

- *Circulation d'un champ vectoriel **A** sur un contour*:
  c'est l'intégrale curviligne ∫ **A . dl**
  où **dl** désigne un élément de contour (**dl** est **tangent** au contour en tout point). L'intégrale curviligne s'évalue entre un point de départ P et un point d'arrivée Q.

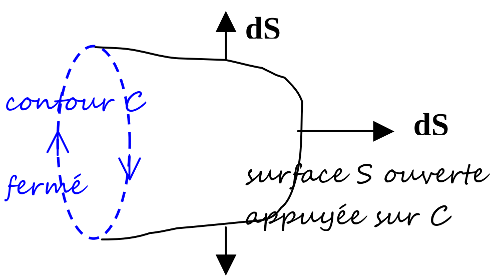
  Si le contour est <u>fermé</u>, alors P = Q et
  le signe ∫ est barré d'un rond et la circulation s'écrit:

$$\boxed{\oint \mathbf{A}\,.\,\mathbf{dl}}$$

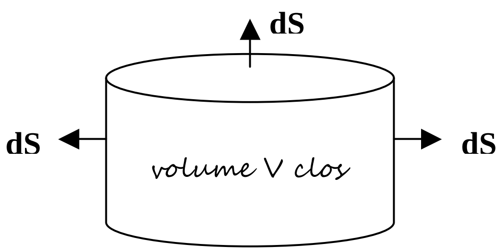


Un champ vectoriel **A** dont la circulation est nulle sur tout contour <u>fermé</u> est dit à <u>circulation conservative</u>. C'est toujours vrai si **A** est un champ défini par **A** = grad **f** ou f est une fonction "potentiel" (exemple: champ de pesanteur, champ de gravitation, champ électrostatique).

- *Flux d'un champ vectoriel **A** sur une surface*:
  c'est l'intégrale surfacique ∬ **A . dS**
  où **dS** désigne un élément de surface (le vecteur **dS** = **n** dS est normal en tout point de la surface).
  Une surface qui entoure un volume est <u>fermée</u>: le vecteur **dS** est orienté vers l'<u>extérieur</u>.
  Une surface qui s'appuie sur un contour fermé est <u>ouverte</u>; **dS** est orienté par le contour.



Surface <u>ouverte</u> appuyée sur un contour



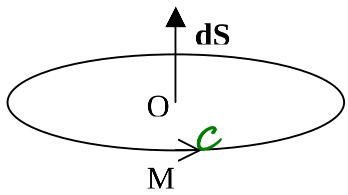
Surface <u>fermée</u> entourant un volume fini

Une surface ouverte appuyée sur un contour orienté (exemple: un disque délimité par la circonférence d'un cercle) s'oriente à la'de de la règle des doigts de la lain droite:

pouce en M le long du *Contour C*

index = MO, vise le centre O de *C*

majeur = **vecteur surface dS**



Si la surface est <u>fermée</u>, alors le signe ∬ est barré d'un rond et le flux au travers s'écrit:

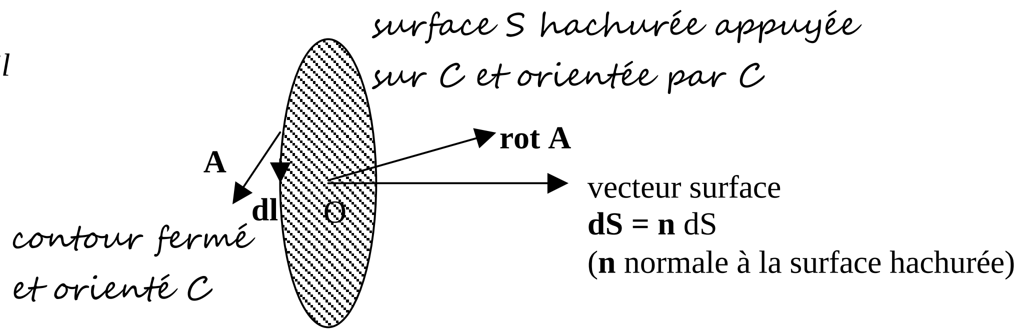
$$\boxed{\oint\!\!\oint \mathbf{A} \,.\, \mathbf{dS}}$$

Un champ vectoriel **A** dont le flux est nul sur toute surface <u>fermée</u> entourant un volume quelconque est dit à <u>flux conservatif</u> (exemple: champ magnétique).

6 - Théorême de Stokes

Formule de Stokes ou du rotationnel: ∫ **A . dl** = ∬ **rotA . dS**
La circulation du champ vectoriel **A** sur un contour <u>fermé</u> *C* est égale au flux de son rotationnel à travers n'importe quelle surface *S* s'appuyant sur ce contour fermé.

Vue de profil



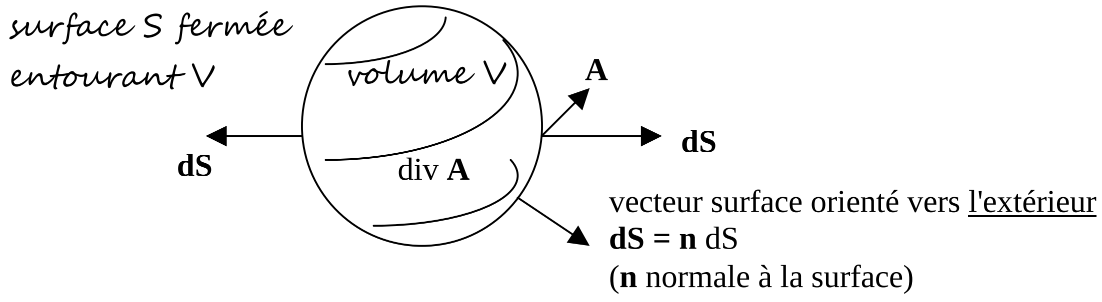
On choisit une orientation arbitraire du contour *C*.

Le vecteur surface **S** est alors orienté par *C* selon la règle des doigts de la main *droite*: pouce sur le contour dans le sens choisi, l'index vise le centre O, le majeur indique le vecteur **S**.

On peut aussi utiliser la règle du bonhomme d'Ampère: couché sur le contour *C* dans le sen choisi, il regarde le centre O, son bras gauche indique le vecteur **S**.

7 - Théorême d'Ostrogradski

Formule d'Ostrogradski ou « flux divergence »: ∬ **A . dS** = ∭ div**A** dv
Le flux du champ vectoriel **A** à travers une surface <u>fermée</u> *S* est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume intérieur *V* délimité par cette surface.



Exemple simple:

prenons $\mathbf{A}(x,y,z) = x\,\mathbf{e_x} + y\,\mathbf{e_y} + z\,\mathbf{e_z}$

Alors div $\mathbf{A}$ = 3

D'après le théorême d'Ostrogradski, $\iint \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS} = \iiint \text{div}\mathbf{A}\, dv = 3\, V$

Le volume V intérieur à toute surface S fermée et quelconque est tout simplement donné par:

$V = 1/3 \iint \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS}$

Si la surface S fermée est composée de facettes planes, le calcul de cette intégrale est aisé.

8 - Lignes de champ

Si **A** est un champ vectoriel, l'équation des lignes de champ est donnée par $\mathbf{A} = k\, \mathbf{dOM}$ (k réel), **dOM** étant un élément tangent à la ligne de champ. On en tire les équations différentielles par élimination de k:

coordonnées cartésiennes: $dx / A_x = dy / A_y = dz / A_z$ avec **dOM** (dx, dy, dz)

coordonnées cylindriques: $dr / A_r = r\, d\theta / A_\theta = dz / A_z$ avec **dOM** (dr, rdθ, dz)

coordonnées sphériques: $dr / A_r = r\, d\theta / A_\theta = r \sin\theta\, d\varphi / A_\varphi$ avec **dOM** (dr, rdθ, r sinθ dφ)

A est tangent en tout point à la ligne de champ.

9 - Lignes ou surfaces équipotentielles

Si **A** est un champ vectoriel tel que **A** = **grad** V où V est une fonction "potentiel", l'équation des lignes ou surfaces équipotentielles est donnée par:

$dV = 0 = \mathbf{grad}V \cdot \mathbf{dOM} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{dOM}$

impliquant que les lignes ou surfaces équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ.

Leur équation est donnée par V(x, y, z) = constante, qui définit une surface.

En deux dimensions dans le plan xOy, V(x, y) = constante définit une ligne équipotentielle.

10 - Annexe1: quelques constantes fondamentales universelles en physique

Unités fondamentales: mètre, kg, seconde, Ampère, Kelvin (les autres unités s'y ramènent)

$C = 3\ 10^{8}$ m/s vitesse de la lumière dans le vide

$e = 1.6\ 10^{-19}$ C charge de l'électron

$m_e = 9.1\ 10^{-31}$ kg masse de l'électron

$m_p = 1.67\ 10^{-27}$ kg masse du proton

$h = 6.62\ 10^{-34}$ constante de Planck

$k = 1.38\ 10^{-23}$ constante de Boltzmann

$\mathcal{N} = 6.02\ 10^{23}$ nombre d'Avogadro

$R = 8.32$ J K^{-1} $mole^{-1}$ constante des gaz parfaits

$R_H = 13.6$ eV constante de Rydberg

$\mu_0 = 4\ \pi\ 10^{-7}$ perméabilité magnétique du vide

$G = 6.67\ 10^{-11}$ constante gravitationnelle

$1/(4\ \pi\ \varepsilon_0) = 9\ 10^{9}$ permittivité du vide

11 - Annexe2: quelques constantes spécifiques au soleil

$M_S = 2\ 10^{30}$ kg masse solaire

$R_S = 696000$ km rayon solaire

$g_S = 275$ m/s² accélération de la pesanteur à la surface solaire = $G\ M_s / R_s^2$

$L = 3.86\ 10^{26}$ W luminosité solaire (luminosité d'1 m² de surface: $6.3\ 10^{7}$ W)

1 UA = 149600000 km distance moyenne Terre/Soleil

$V_l = 620$ km/s vitesse de libération

$T_e = 5800$ K température effective

Composition : H 92.1% et He 7.8%, autres éléments (O, C, N, Fe, Mg, Ca…) en trace (0.1%)

Rotation : 26 jours à l'équateur, 31 jours aux pôles, inclinaison de 6° sur l'écliptique