Module Astronomie-Astrophysique (M1) **Bruno Sicardy**
Université Pierre et Marie Curie

Rayonnement

1- *Récepteur photographique.* D'après vous, pourquoi une plaque photographique est-elle plus sensible dans le bleu que dans le rouge? Pourquoi est-il difficile d'observer vers 10 μm?

2- *Photons et diffraction.* Montrer que le principe d'incertitude d'Heisenberg permet de retrouver l'angle de diffraction typique des photons passant par une ouverture de diamètre D.

3- *Diffraction et pouvoir de résolution.* La diffraction provoque un étalement angulaire $\theta \sim 1.2\lambda/D$ d'un faisceau lumineux à la longueur d'onde λ, passant par une ouverture circulaire de diamètre D. Montrer que ceci entraîne un pouvoir de résolution, en arcsec, de $\sim 0.25\lambda_{\mu\mathrm{m}}/D_{\mathrm{m}}$.

4- *Pouvoir de résolution de l'œil.* Estimer, selon votre expérience personnelle, le pouvoir de résolution de l'œil humain. Estimer, selon les lois de la diffraction, le pouvoir de résolution de l'œil, sachant que la pupille a un diamètre de l'ordre de 4 mm. Conclusion?

5- *La couleur bleue du ciel.* Les molécules d'azote et d'oxygène (N_2 et O_2) de l'atmosphère peuvent diffuser la lumière solaire dans toutes les directions (diffusion Rayleigh). La *section efficace de diffusion* Rayleigh de N_2 et O_2 varie comme $1/\lambda^4$, où λ est la longueur d'onde. Expliquer alors pourquoi le ciel nous apparaît bleu, et pourquoi les levers et couchers de Soleil sont orange (même en l'absence de poussières).

6- *Surface de Lambert.* On appelle *surface de Lambert* la surface qui, photométriquement, est la plus simple possible: un petit élément d'aire dS rayonne dans un demi-espace avec une intensité I constante, i.e. qui ne dépend pas de la direction. Rappeler soigneusement la définition de l'intensité lumineuse.

Montrer que si une telle surface reçoit perpendiculairement, et par unité de surface, une puissance lumineuse E (appelée $éclairement$, mesurée en Wm^{-2}), alors elle rayonne de manière isotrope dans le demi-espace avec une intensité:

$$I = E/\pi$$

7- *Epaisseur optique.* Montrer que pour un milieu de faible épaisseur optique, $\delta\tau \ll 1$, la *fraction* de flux incident Φ absorbée vaut approximativement $\delta\tau\Phi$.

Montrer que si une atmosphère a une épaisseur optique normale (i.e. le long de la verticale) de τ_N, alors son épaisseur optique le long d'un rayon incliné de B par rapport à l'horizon vaut $\tau = \tau_N/\sin B$. Conséquences pour les observations du sol? (NB. la quantité $1/\sin B$ s'appelle le *masse d'air*).

Montrer que si un milieu dilué est composé de particules sphériques de rayon r et de densité surfacique n_s (nombre de particules par unité de surface), alors son épaisseur optique vaut $\delta\tau \approx \pi n_s r^2$.

Application: pouvez-vous estimer l'épaisseur optique normale de la Galaxie, due aux étoiles, au niveau du Soleil? (On considèrera que près du Soleil, les distances typiques entre deux étoiles est de $\sim$ 1 pc, et que la Galaxie a une épaisseur de $\sim$ 1000 pc).

7- *Maximum de la fonction de Planck, loi de Wien.* La fonction de Planck:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

décrit l'intensité lumineuse (par intervalle de fréquence) émise par la surface d'un corps noir à la température T. Montrer que la fonction de Planck atteint un maximum lorsque $x \equiv h\nu/kT$ vérifie:

$$x = 3[1 - \exp(-x)].$$

Comment peut-on résoudre cette équation? En déduire que le maximum de $B(\nu, T)$ est atteint pour une longueur d'onde λ_m (loi de Wien):

$$\lambda_m(\mu\mathrm{m}) \times T(\mathrm{K}) \sim 5100 \ \ \mu\mathrm{m\ K}$$

On peut exprimer l'intensité non pas en fonction de la fréquence ν, mais en fonction de la longueur d'onde λ, et l'exprimer non pas par intervalle de fréquence $d\nu$, mais par intervalle de longueur d'onde $d\lambda$. Montrer que cette intensité par intervalle de λ s'écrit:

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(hc/kT\lambda) - 1}.$$

Montrer que sous cette nouvelle forme, la fonction de Planck atteint son maximum lorsque $y \equiv hc/kT\lambda$ vérifie:

$$y = 5[1 - \exp(-y)],$$

et que la fonction $B(\lambda, T)$ atteint son maximum pour (loi de Wien):

$$\lambda_m(\mu\mathrm{m}) \times T(\mathrm{K}) \sim 2900 \ \ \mu\mathrm{m\ K}$$

8- *Loi de Stefan.* Un petit élément de surface dS d'un corps noir émet dans un demi-espace, avec une intensité $B(\nu, T)$. Montrer que sur tout le spectre, cette surface émet une puissance (loi de Stefan surfacique):

$$dP = \sigma T^4 dS,$$

où la *constante de Stefan* σ vaut:

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \cdot \frac{k^4}{c^2h^3} \sim 5.67 \times 10^{-8} \ \ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$$

On admettra le résultat $\int_0^\infty x^3 dx/[\exp(x) - 1] = \pi^4/15$.

9- *Une autre forme de la loi de Stefan.* On se propose d'exprimer la loi de Stefan non pas par la puissance émise dans tout le spectre par unité de surface dans le demi-espace extérieur, mais mais par la densité d'énergie e à l'intérieur du corps noir (J m^{-3}). Pour cela: (a) montrer que les photons qui passent pendant le temps dt à travers dS en faisant un angle θ par rapport à la normale à dS, vont occuper un volume $c \cos\theta dt dS$. (b) En déduire que l'énergie par unité de volume se déplaçant dans une direction quelconque dans l'intervalle de fréquence $d\nu$ et dans l'angle solide $d\Omega$ vaut $B(\nu, T)d\nu d\Omega/c$. (c) Montrer alors que l'énergie par unité de volume émise dans toutes les directions dans l'intervalle $d\nu$ vaut $4\pi B(\nu, T)d\nu/c$. (d) Déduire alors que la densité d'énergie intégrée sur tout le spectre vaut (loi de Stefan volumique):

$$e(T) = \frac{4\sigma T^4}{c}$$

N.B. On note parfois $a = 4\sigma/c$, donc $e = aT^4$. A.N. Calculer e pour le rayonnement du fond cosmologique ($T \sim$ 2.7 K).

10- *Pourquoi nous voyons le Soleil.* Le Soleil a une température effective T_{eff} (de corps noir) de 5770 K, à quelle longueur d'onde son intensité $B(\lambda, T)$ est-elle maximale? De quel facteur a-t-elle chuté dans le violet (0.4 μm) et dans le rouge (0.85 μm). Conclusion pour la vision humaine? Y-a-t-il un miracle?

11- *Où y-a-t-il quelque chose à voir?* Dans quelle longueur d'onde doit-on a priori observer une étoile chaude (par ex. $T =$ 20000 K (type spectral B)? Un nuage moléculaire à T= 30 K? Le rayonnement du fond cosmologique ($T \sim$ 2.7 K)? A quelle longueur d'onde émettons nous surtout (cf. les organes récepteurs des serpents)?

12- *La fenêtre cosmologique.* Dessiner sur un diagramme log-log le rayonnement du Soleil, supposé un corps noir à 5770 K, et le rayonnement du corps noir de la Terre ($T \sim 10$ C en moyenne). Montrer qu'il y a une "fenêtre" spectrale vers 5 μm où l'on n'est pas trop gêné ni par le rayonnement solaire, ni par l'émission thermique de la Terre. D'après vous, pourquoi appelle-t-on cette fenêtre la "fenêtre cosmologique"?

13- *Luminosité du Soleil.* En assimilant le Soleil à un corps noir à 5770 K, et en prenant pour son rayon $R_\odot$= 700000 km, en déduire sa *luminosité* $L_\odot$, i.e. la puissance totale rayonnée par le Soleil.

On peut mesurer le flux d'énergie qui atteint la Terre, en provenance du Soleil. On obtient, en moyenne, f= 1367 W m^{-2} (f est appelé la $constante\ solaire$, non constante!). Sachant que nous orbitons en moyenne à 149.6 millions de km du Soleil, en déduire la luminosité solaire. Conclusion.

14- *Températures des surfaces planétaires.* On appelle *albédo de Bond* A d'une surface planétaire, la proportion d'énergie lumineuse réfléchie la planète dans l'espace. Montrer qu'à l'équilibre thermique, la surface planétaire se met à la température:

$$T = \left[\frac{(1-A)L_\odot}{16\pi\sigma}\right]^{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}},$$

où a est la distance de la planète au Soleil. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme:

$$T \sim (1-A)^{1/4} \cdot \frac{280}{\sqrt{a_{\mathrm{UA}}}}\ \mathrm{K},$$

où a_{UA} est la distance exprimée en unités astronomiques. Calcul de T pour Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, qui sont respectivement à 0.387, 0.723, 1, 1.52, 5.20, 9.54, 19.2 et 39.4 UA du Soleil, et qui ont pour albédos de Bond typiques $A \sim 0.3$.

La valeur obtenue pour la Terre vous paraît-elle raisonnable? Expliquer qualitativement comment l'effet de serre nous permet de bénéficier de températures plus clémentes.

Des mesures infra-rouges donnent pour Jupiter T= 124 K et pour Saturne, T= 95 K. Qu'en concluez-vous?

15- *Puissance rayonnée par un être humain.* En estimant les valeurs typiques de la température de la peau, sa surface et la température extérieure, montrer qu'un être humain dégage une puissance typique de 100 W. Montrer que ceci est compatible avec le métabolisme mimimum d'une personne, $\sim$ 2000 Calories par jour (1 Cal = 4184 Joules)