Formalisme hamiltonien appliqué aux résonances (Lindblad et corotation)

$$\boxed{H = -\frac{\mu^3}{2}\frac{(GM)^2}{\Lambda^2} - \frac{\mu'^3}{2}\frac{(GM)^2}{\Lambda'^2} + \mu\mu' A e \cos\phi + \mu\mu' A' e' \cos\phi'}$$

$$\lambda \longleftrightarrow \Lambda = \mu\sqrt{GMa}$$
$$-\bar{\omega} \longleftrightarrow \Gamma = \mu\sqrt{GMa}\,(1-\sqrt{1-e^2}) \sim \mu\sqrt{GMa}\; e^2/2$$
$$\lambda' \longleftrightarrow \Lambda' = \mu'\sqrt{GMa'}$$
$$-\bar{\omega}' \longleftrightarrow \Gamma' = \mu'\sqrt{GMa'}\,(1-\sqrt{1-e'^2}) \sim \mu'\sqrt{GMa'}\; e'^2/2$$

On change de variables :

$$\lambda \longleftrightarrow J$$
$$\lambda' \longleftrightarrow J'$$
$$\phi \longleftrightarrow \Theta$$
$$\phi' \longleftrightarrow \Theta'$$

$$\phi = (m+1)\lambda' - m\lambda - \bar{\omega}$$
$$\phi' = (m+1)\lambda' - m\lambda - \bar{\omega}'$$

de $\Lambda d\lambda - \Gamma d\bar{\omega} + \Lambda' d\lambda' - \Gamma' d\bar{\omega}' = J d\lambda + J' d\lambda' + \Theta\, d\phi + \Theta' d\phi'$

on tire :

$$\left|\begin{array}{l} \Lambda = J - m(\Theta + \Theta') \\ \Gamma = \Theta \\ \Lambda' = J' + (m+1)(\Theta + \Theta') \\ \Gamma' = \Theta' \end{array}\right.$$

ou :

$$\boxed{\begin{array}{ll} J = \Lambda + m(\Gamma + \Gamma') & \lambda \\ \Theta = \Gamma & \phi \\ J' = \Lambda' - (m+1)(\Gamma + \Gamma') & \lambda' \\ \Theta' = \Gamma' & \phi' \end{array}}$$

Cas de la $\boxed{\text{corotation}}$.

$$\boxed{H = -\frac{\mu^3}{2}\frac{(GM)^2}{\Lambda^2} - \frac{\mu'^3}{2}\frac{(GM)^2}{\Lambda'^2} + \mu\mu' A' e' \cos\phi'}$$

Alors : $\boxed{\begin{array}{l} J = cste \\ J' = cste \\ \Theta = cste \end{array}} = \mu\sqrt{GMa}\, e^2/2 \rightarrow \boxed{e \propto \frac{1}{a^{1/4}}}$

On suppose $e \ll 1$, alors,

$$J \sim \Lambda + m\Lambda' = cste \rightarrow \dot{\Lambda} = -m\dot{\Lambda}' = -m\dot{\Theta}' = m\frac{\partial H}{\partial \phi} = -m\mu\mu' A' e' \sin\phi'$$

mais $\dot{\Lambda} \sim -\frac{\mu}{3} a^2 \dot{n}$, donc $\boxed{\dot{n} \sim \frac{3m}{a^2}\mu' A' e' \sin\phi'}$

de plus $\dot{\phi}' = +\frac{\partial H}{\partial \Theta'} = \frac{\partial H}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial \Theta} + \frac{\partial H}{\partial \Lambda'}\frac{\partial \Lambda'}{\partial \Theta'} = (m+1)\frac{\partial H}{\partial \Lambda'} - m\frac{\partial H}{\partial \Lambda}$

$$\boxed{\dot{\phi}' = (m+1)n' - mn}$$

d'où $\ddot{\phi}' = -m\dot{n} = -\frac{3m^2}{a^2}\mu' A' e' \sin\phi'$

$$\boxed{\boxed{\ddot{\phi}' = -\frac{3m^2}{a^2}\mu' A' e' \sin\phi'}}$$

NB. dans la limite où $\mu \to 0$ on a bien $\left| \begin{array}{l} \dot{\Lambda}' \to 0 \\ \dot{n} \to 0 \end{array}\right.$, mais $\frac{\dot{\Lambda}}{\mu} \to$ valeur finie

donc $\dot{n} \to$ valeur finie, etc...

Cas de la résonance de Lindblad

$$\boxed{H = -\frac{\mu^3}{2}\frac{(GM)^2}{\Lambda^2} - \frac{\mu'^2}{2}\frac{(GM)^2}{\Lambda'^2} + \frac{\mu\mu'}{M} A e \cos\phi} \qquad [A] = [a^2 n^2]$$

Alors : $\boxed{\begin{array}{l} J = \text{cste} \\ J' = \text{cste} \\ \Theta' = \text{cste} \end{array}}$

On suppose que $\boxed{e' = 0}$, donc $\boxed{\Theta' = \Gamma' = 0}$, d'où :

$\boxed{J = \Lambda + m\Gamma}$, constante de Jacobi et donc $J' = \Lambda' - (m+1)\Gamma$

De plus, dans le cas où $\mu \to 0$, $J' \simeq \Lambda'$ $\to$ $\boxed{a' = \text{cste}}$

ou plutôt : $J' \sim \Lambda' - (m+1)\Gamma'$ $\to \Lambda'$ et Γ' constants

Le hamiltonien devient :

$$\boxed{H = -\frac{\mu^3}{2}\frac{(GM)^2}{\Lambda^2} + \mu\mu' A e \cos\phi} \quad \text{où} \quad e = \sqrt{\frac{\Theta[2J - (2m+1)\Theta]}{(J - m\Theta)^2}} \sim \sqrt{\frac{2\Theta}{J}} \text{ pour } e \ll 1$$

$$\boxed{-\frac{\mu'^3}{2}\frac{(GM)^2}{\Lambda'^2}}$$

Soit

$$\boxed{H = -\frac{\mu^3}{2}\frac{(GM)^2}{(m\Theta - J)^2} + \frac{\mu\mu'}{M} A \sqrt{\frac{2\Theta}{J}} \cos\phi} \quad (\text{paramétré par } J).$$

$$\boxed{-\frac{\mu'^3}{2}\frac{(GM)^2}{((m+1)\Theta + J')^2}}$$

- $\boxed{-\dfrac{\mu^3(GM)^2}{2(J-m\,Ⓗ)^2}}$?

$$= -\frac{\mu^3(GM)^2}{2J^2}\left(1-m\frac{Ⓗ}{J}\right)^{-2} \qquad \text{or} \quad (1-\varepsilon)^{-2} = 1+2\varepsilon+3\varepsilon^2$$

$$= -\frac{\mu^3(GM)^2}{2J^2}\left(1+2m\frac{Ⓗ}{J}+3m^2\frac{Ⓗ^2}{J^2}\right)$$

On peut laisser le terme constant d'ordre 0 en $\frac{Ⓗ}{J}$:

$$= -m\frac{\mu^3(GM)^2}{J^3}Ⓗ - \frac{3}{2}m^2\frac{\mu^3(GM)^2}{J^4}Ⓗ^2$$

$J \simeq \mu\sqrt{GMa}\left(1+\frac{me^2}{2}\right)$

Définissons une fréquence de référence correspondant à la résonance "exacte", soit $(m+1)n' - m\,n_r = 0$, et soit a_r le rayon correspondant $(a_r^3 n_r^2 = GM)$

Soit $\Delta n = n - n_r$ la "distance" à la résonance.

$\Delta a = a - a_r$

Alors $3\frac{\Delta a}{a} + 2\frac{\Delta n}{n} = 0$

Soit $J_r \equiv \mu\sqrt{GMa_r}$, alors $\boxed{J =} J_r\left[1+\frac{me^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a}\right] = \boxed{J_r(1+G)}$

$$= J_r\left[1+\frac{me^2}{2}-\frac{1}{3}\frac{\Delta n}{n_r}\right]$$

NB. il faut supposer que me^2 et $\frac{\Delta a}{a}$ sont du même ordre. A vérifier un jour...

Soit $G = \frac{me^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a_r}$, comme $J = cste \Rightarrow \boxed{G = cste = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta a}{a_r}+me^2\right]}$

donc $\boxed{\frac{da}{a}+m\,de^2 = 0}$ (ne pas confondre da et Δa !)

ce qui est bien obtenu via $E - n'H = cste$

$$\begin{cases} dE = n'dH \\ \frac{n'}{n} = \frac{m}{m+1} \end{cases} \quad \text{etc...}$$

Donc : $\boxed{-\frac{\mu^3(GM)^2}{2(J-m\Theta)^2}} =$

$$-mn_r\frac{\Theta}{(1+C)^3} - \frac{3}{2}\frac{m^2}{\mu a^2}\Theta^2 =$$

$$\boxed{-mn_r\Theta + 3mn_rC\Theta - \frac{3}{2}\frac{m^2}{\mu a^2}\Theta^2}$$

- $\boxed{-\frac{\mu'^3(GM)^2}{2[J'+(m+1)\Theta]^2}}$? idem, en remplaçant $-m \to +(m+1)$ et en prenant $C'=0$...

$$\boxed{= (m+1)n'\Theta - \frac{3}{2}\frac{(m+1)^2}{\mu' a'^2}\Theta^2}$$

Comme par définition $(m+1)n' - mn_r = 0$:

$$\boxed{H = 3mn_rC\Theta - \frac{3}{2}\left[\frac{m^2}{\mu a^2} + \frac{(m+1)^2}{\mu' a'^2}\right]\Theta^2 + \frac{\mu\mu'}{M}A\sqrt{\frac{2\Theta}{\mu a_r^2 n_r}}\cos\phi}$$

$$\begin{cases} \dot\phi = \dfrac{\partial H}{\partial\Theta} \\ \dot\Theta = -\dfrac{\partial H}{\partial\phi} \end{cases}$$

On peut prendre comme nouvelles variables ϕ et $\frac{\Theta}{\mu} \to \Theta$, et comme nouveau hamiltonien $\frac{H}{\mu} \to H$

$$H = 3mn_rC\Theta - \frac{3}{2}\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{\mu}{\mu'}\frac{(m+1)^2}{a'^2}\right]\Theta^2 + \mu' A\sqrt{\frac{2\Theta}{a_r^2 n_r}}\cos\phi$$

et faire tendre $\frac{\mu}{\mu'} \to 0$, d'où : (en laissant tomber les indices r)

$$\boxed{H = 3mnC\cdot\Theta - \frac{3m^2}{2a^2}\Theta^2 + \frac{\mu'}{M}A\sqrt{\frac{2\Theta}{a^2 n}}\cos\phi}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot\phi = \dfrac{\partial H}{\partial\Theta} \\ \dot\Theta = -\dfrac{\partial H}{\partial\phi} \end{cases}}$$

$$\boxed{(m+1)n' - mn \sim 0}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta a}{a} + me^2\right)}$$

où $\Delta a = a - a_r$

On a $\Theta \sim a^2 n \frac{e^2}{2}$

soit $\Theta \rightarrow \frac{\Theta}{a^2 n} = \boxed{\Theta \sim \frac{e^2}{2}}$

$H \rightarrow \frac{H}{a^2 n} = H$

$$\boxed{H = 3mnG.\,\Theta - \frac{3}{2} m^2 n\, \Theta^2 + \frac{\mu' A}{M a^2 n} \sqrt{2\Theta} \cos\phi}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial \Theta} \\ \dot{\Theta} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} \end{array}}$$

alors $\begin{cases} h = \sqrt{2\Theta} \cos\phi = e \cos\phi \\ k = \sqrt{2\Theta} \sin\phi = e \sin\phi \end{cases}$ sont conjuguées

$\Theta = \frac{h^2 + k^2}{2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{h} = -\frac{\partial H}{\partial k} \\ \dot{k} = +\frac{\partial H}{\partial h} \end{array}}$$

$$\boxed{H = \frac{3}{2} mnG.\,(h^2 + k^2) - \frac{3}{4} m^2 n\, (h^2 + k^2)^2 + \frac{\mu' A}{M a^2 n} h}$$