Résonances et marées dans le Système Solaire et les disques:
Notes sur le formalisme hamiltonien

Bruno Sicardy
Rédigé par Frédéric Pierret

17 février 2013

Table des matières

Chapitre 1

Mécaniques hamiltonienne

1.1 Formalisme

• **Rappels :** Le mouvement d'une particule est décrit par des variables conjuguées p,q (par exemple position x et quantité de mouvement mv), et par un hamiltonien $H(p,q)$. Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} \dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

• La trajectoire est décrite dans l'espace (q,p), appelé espace des phases.

• Si H ne dépend pas explicitement du temps, le système est dit autonome.

• Dans ce cas $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = 0$, H est intégrale première du mouvement, c'est en fait l'énergie totale du système.

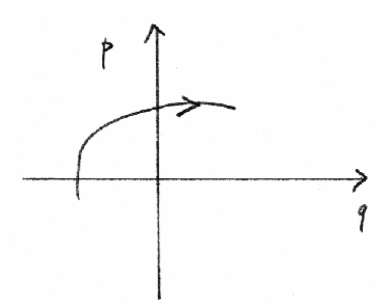

FIGURE 1.1 – Le mouvement d'un système dans l'espace des phases. Si le hamiltonien est autonome, alors le système suit une courbe de niveau H= constante.

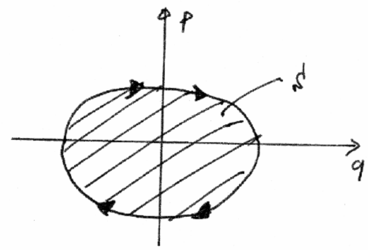

FIGURE 1.2 – L'aire S de la surface enfermée dans la trajectoire suivie par le système est reliée à la variable action par $J = S/2\pi$.

- Si H dépend explicitement du temps, H n'est plus conservé et $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

- Si le mouvement de la particule est décrit par N couples de variables conjuguées deux à deux

$$q_1, p_1, q_2, p_2, ..., q_N, p_N,$$

on dit que le mouvement de la particule (ou du système de particules) a N degrés de liberté.

- Pour un système décrit par les variables (p,q), on peut choisir de nouvelles variables (J,ϕ), appelées variables action et angle. La variable action est reliée à à l'aire de la surface enfermée par la trajectoire dans l'espace (p,q) :

- Plus précisement $J = \frac{S}{2\pi}$, ϕ est relié (mais en général pas linéairement) à la position (ou phase) du point le long de l'orbite.

$$\begin{cases} \dot{\phi}= \frac{\partial H}{\partial J} \\ \dot{J}=-\frac{\partial H}{\partial \phi} \end{cases}$$

- Si le système est autonome, $\dot{J} = 0$. En effet, le système suit alors une courbe fermée qui est une courbe de niveau d'énergie H= constante, et qui enferme donc une surface d'aire constante.

- La transformation (q,p) $\longleftrightarrow$ (J,ϕ) est univoque, et est un cas particulier de transformation canonique (ou passage de variables conjuguées à d'autres variables conjuguées).

- Si le système a plusieurs degrés de liberté, on peut associer des variables action-angle $J_1, \phi_1, J_2, \phi_2, ..., J_N, \phi_N$ à chacun de ces degrés de liberté.

- On peut aussi combiner entre elles ces variables. En particulier on peut combiner linéairement les angles $\phi_1, ..., \phi_N$ pour avoir de nouveaux angles $\theta_1, ..., \theta_N$. A chacun de ces nouveaux angles est associé une variable action $\Theta_1, ..., \Theta_N$. On peut montrer que cette transformation $J_1, \phi_1, J_2, \phi_2, ..., J_N, \phi_N \longleftrightarrow \Theta_1, \theta_1, ..., \Theta_N, \theta_N$ est canonique si :

$$J_1 d\phi_1 + ... + J_N d\phi_N = \Theta_1 d\theta_1 + ... + \Theta_N d\theta_N$$

FIGURE 1.3 – Le mouvement keplerien le plus simple : une particule de masse négligeable orbitant autour d'un corps massif.

- Si J, ϕ sont des variables action-angle, alors on peut montrer que :

$$\begin{cases} x{=}\sqrt{2J}\cos\phi \\ y{=}\sqrt{2J}\sin\phi \end{cases}$$

sont des variables conjuguées, et que

$$\begin{cases} \dot{x}{=}-\frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y}{=}\ \frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

- Cas du problème képlérien :

Dans l'espace 3-D, la particule a trois degrés de liberté, décrits par les trois couples de variables action-angle :

$$\begin{cases} M & \longleftrightarrow L = & \mu\sqrt{GMa} \\ \omega & \longleftrightarrow G = & \mu\sqrt{GMa(1-e^2)} \\ \Omega & \longleftrightarrow H = & \mu\sqrt{GMa(1-e^2)}\cos I \end{cases}$$

appelées variables de Delaunay.

- On peut aussi prendre pour angles :

$$\begin{cases} \lambda & = M + \omega + \Omega = M + \varpi & \text{(longitude moyenne)} \\ -\varpi & = -(\omega + \Omega) & \text{(- longitude du périastre)} \\ -\Omega & & \text{(- longitude du noeud)} \end{cases}$$

avec les variables actions correspondantes, Λ, Γ et Z, respectivement.

En appliquant : $LdM + \omega da + \Omega dH = \Lambda d\lambda - \Gamma d\varpi - Zd\Omega$, on trouve :

$$\begin{cases} \Lambda & = & L \\ \Gamma & = & L - G \\ Z & = & G - H \end{cases}$$

Soit les couples :

$$\begin{cases} \lambda & \longleftrightarrow \quad \Lambda = \mu\sqrt{GMa} \\ -\varpi & \longleftrightarrow \quad \Gamma = \mu\sqrt{GMa}(1-\sqrt{1-e^2}) \\ -\Omega & \longleftrightarrow \quad Z = \mu\sqrt{GMa(1-e^2)}(1-\cos I) \end{cases}$$

appelés variables de Poincaré. Ces variables sont bien adaptées aux cas (fréquents) où les excentricités et inclinaisons sont faibles. Alors $\Gamma \approx \mu\sqrt{GMa} \cdot e^2/2$ et $Z \approx 2\mu\sqrt{GMa} \cdot \sin^2(I/2)$.

- L'énergie du système est $E = -\frac{GM\mu}{2a}$, et donc le hamiltonien est donné par :

$$H = -\frac{\mu^3(GM)^2}{2L^2} = -\frac{\mu^3(GM)^2}{2\Lambda^2}$$

- On retrouve bien :

$$n = \dot{\Lambda} = \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{\mu^3(GM)^2}{L^3} = \frac{GM^{1/2}}{a^{3/2}}$$

ce que l'on sait depuis longtemps puisque $n^2a^3 = GM$ (3ème loi de Kepler).

De même :

$$\begin{array}{ll} \dot{\varpi} = \dot{\Omega} = 0 & \text{car H est indépendant de } \Gamma \text{ et } Z \\ \dot{\Gamma} = \dot{Z} = 0 & \text{car H est indépendant de } \Omega \text{ et } \varpi, \end{array}$$

ce que l'on savait aussi depuis longtemps...

- Le formalisme hamiltonien est donc lourd et inutile tant que l'on se limite au problème des deux corps. Il montre en revanche toute sa richesse dans le cas des problèmes pertubés, en particulier lors de variations lentes de H au cours du temps (invariance adiabatique) et/ou près des résonances.

1.2 Invariance adiabatique de l'action

L'invariance adiabatique est tout à fait particulière, car contrairement à l'énergie H qui est *rigoureusement* conservée lors du mouvement (si H est autonome), l'action J définie ci-dessus est *presque* conservée si le hamiltonien n'est plus autonome, mais varie dependant de manière lente avec le temps.

On considère pour cela un système dont le hamiltonien dépend, outre les variables p et q, d'un paramètre λ qui varie de manière lente.