

M2 Astronomie Astrophysique (ET14)

Examen– 28 février 2018 - durée: 2h30
Résonances dans le système solaire et dans les disques
Calculatrices autorisées (sans documents)

On considère une particule de masse nulle orbitant autour d'une planète de masse M_{pla} , perturbée par un satellite de masse m_{sat} , et orbitant dans le même plan que le satellite.

1- Comment appelle-t-on ce problème en Mécanique Céleste?

On note par la suite λ , ϖ , a , e , n la longitude moyenne de la particule, la longitude du péricentre, le demi-grand axe de son orbite et son excentricité, et son moyen mouvement, respectivement. Des notations similaires, λ_s et ϖ_s , a_s , e_s , n_s s'appliquent au satellite.

2- De manière générique, le terme du potentiel perturbateur associé à une résonance donnée s'écrit

$$U = \mathcal{A}e^q e_s^{q_s} \cdot \cos(m\lambda + m_s\lambda_s + p\varpi + p_s\varpi_s),$$

(a) Énoncer les deux règles de d'Alembert qui contraignent les valeurs des entiers q , q_s , m , m_s , p , p_s .

(b) De quoi découle la relation qui existe entre m , m_s , p et p_s ?

3- On considère maintenant un satellite d'orbite circulaire et le terme résonant du potentiel perturbateur:

$$U = \mathcal{A}e^{|q|} \cdot \cos[(m + q)\lambda - m\lambda_s - q\varpi].$$

Quel est l'ordre de cette résonance?

4- On considère le mouvement d'une particule dans un repère tournant avec un satellite dont l'orbite autour de la planète est supposée circulaire (Fig. 1).

(a) Ces diagrammes illustrent une résonance $n/n_s = 3/2$. Quel est l'ordre de cette résonance? Comment appelle-t-on ce type de résonances?

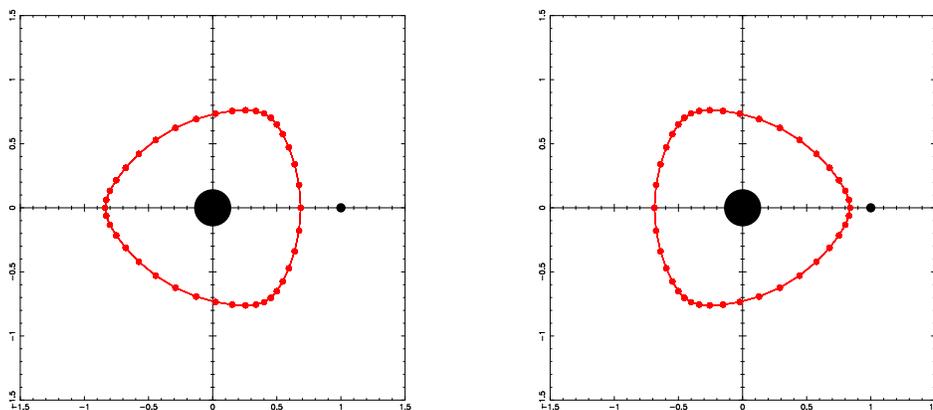


Figure 1: Orbite d'une particule (en rouge) observée d'un repère centré sur la planète (disque noir au centre) et tournant avec le satellite (point noir à droite), dans deux configurations différentes. Les points rouges sont les positions de la particule portées à des instants régulièrement espacés.

(b) Ecrire l'angle critique de résonance associé à cette résonance. Quelle est sa valeur dans l'exemple montré à gauche? A droite? (Justifier le calcul).

5- La Fig. 2 illustre le cas de la résonance $n/n_s = 5/3$. Mêmes questions que précédemment:

(a) Quel est l'ordre de cette résonance?

(b) Expression de l'angle critique correspondant? Valeurs de cet angle critique? (justifier!).

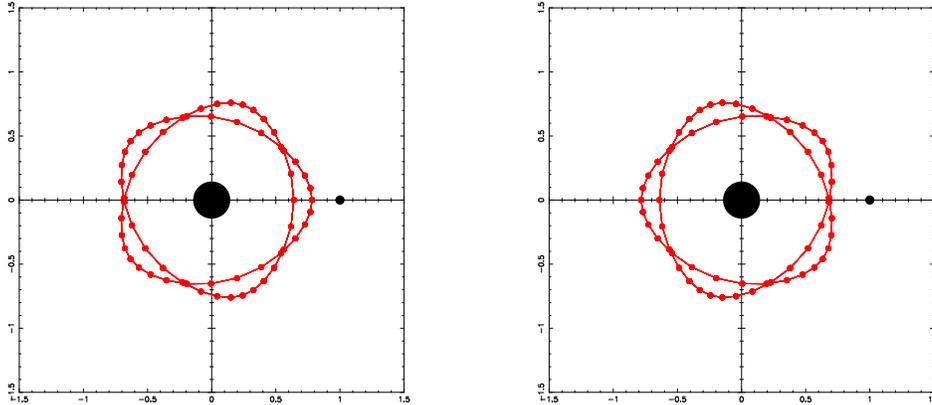


Figure 2: Même chose que la Fig. 1, mais pour la résonance 5/3.

6- On considère une particule en résonance de moyen mouvement exacte avec le satellite, $n/n_s = m/(m - q)$, où m est un entier positif ou négatif, et q est un entier toujours positif. L'angle critique de résonance associé:

$$\Psi = m\lambda_s - (m - q)\lambda - q\varpi$$

est donc par définition constant au cours du mouvement de la particule. On suppose enfin que m et q sont premiers entre eux. Montrer que la trajectoire de la particule observée dans un repère lié au satellite perturbateur possède q "brins".

Résonances spin-orbite

7- On considère un satellite rigide de forme triaxiale ellipsoïdale, qui orbite autour d'une planète sur une orbite elliptique, avec une période T_{orb} . On suppose que le satellite tourne sur lui-même autour de son plus petit axe, et que ce dernier est perpendiculaire au plan orbital du satellite (obliquité nulle).

On note θ l'angle qui repère, dans l'espace inertiel, l'orientation du grand axe de l'ellipsoïde, f l'anomalie vraie du satellite le long de son orbite, et r la distance du satellite au centre de la planète à un instant donné t . On peut alors montrer que l'évolution de θ est décrite par l'équation différentielle:

$$\ddot{\theta} = -\epsilon \frac{GM_{pla}}{2r^3(t)} \cdot \sin \{2[\theta - f(t)]\}$$

où G est la constante de gravitation et ϵ est un coefficient sans dimension qui mesure l'élongation du satellite (les points indiquant ici les dérivées par rapport au temps).

On suppose d'abord que le satellite a une orbite circulaire.

(a) Montrer que l'on peut ramener l'équation ci-dessus, qui dépend du temps, à une équation autonome, indépendante du temps.

(b) Quel type de système physique cette équation décrit-elle?

(c) Quelle est la solution d'équilibre stable de ce système?

(d) Donner un exemple dans le système solaire.

8- On peut écrire une version approximative de l'équation ci-dessus sous la forme (qu'on ne demande pas de recalculer):

$$\ddot{\theta} \approx -\epsilon n^2 \cdot \left\{ \sin[2(\theta - nt)] - \frac{e}{2} \sin[2(\theta - nt/2)] + \frac{7e}{2} \sin[2(\theta - 3nt/2)] \right\}$$

où n est le mouvement moyen du satellite. Quelle est l'approximation qui est faite pour obtenir cette expression?

(a) Dans quels cas peut-on résoudre cette équation de manière approximative en écrivant

$$\ddot{\theta} \approx -\epsilon n^2 \cdot \sin[2(\theta - nt)] \text{ ou bien}$$

$$\ddot{\theta} \approx +\epsilon n^2 (e/2) \cdot \sin[2(\theta - nt/2)] \text{ ou bien}$$

$$\ddot{\theta} \approx -\epsilon n^2 (7e/2) \cdot \sin[2(\theta - 3nt/2)]?$$

(b) Donner deux arguments physiques qui expliquent pourquoi Mercure a pu être capturé en résonance spin-orbite 3/2, et non pas en résonance synchrone 1/1 comme la plupart des gros satellites planétaires.

(c) Donner l'expression de l'angle critique de résonance spin-orbite 3/2. Montrer qu'il peut osciller de manière stable autour de 0° , avec une période de libration T_{lib} que l'on exprimera en fonction de la période orbitale de Mercure, T_{orb} , et des paramètres du problème.

Résonances de corotation

9- (a) Donner un exemple de terme du potentiel perturbateur décrivant une résonance de moyen mouvement de type corotation.

(b) Pourquoi emploie-t-on le terme "corotation" ?