M2 Astronomie Astrophysique (ET14)

Examen– 1er mars 2017 - durée: 2 heures
Résonances dans le système solaire et dans les disques
Calculatrices sans documents autorisées

On considère une particule de masse nulle orbitant autour d'une planète de masse M_p, et perturbée par un satellite de masse m_s. On note λ, ϖ, a, e, n la longitude moyenne de la particule, la longitude du péricentre, le demi-grand axe de son orbite et son excentricité, et son moyen mouvement, respectivement. Des notations similaires, λ_s et ϖ_s, a_s, e_s, n_s s'appliquent au satellite.

1- (a) Qu'appelle-t-on "anomalie moyenne" M de la particule? Comment est-elle reliée à λ et ϖ?

(b) Quelle est la différence entre "longitude moyenne" et "longitude vraie"?

Résonances de moyen mouvement

2- Parmi les angles suivants:

$\Psi_1 = (m+1)\lambda_s - m\lambda - \varpi_s$,
$\Psi_2 = (m+1)\lambda_s - m\lambda - \varpi$,
$\Psi_3 = (m+2)\lambda_s - m\lambda - \varpi$,
$\Psi_4 = (m+2)\lambda_s - m\lambda - \varpi - \varpi_s$,
où m est entier.

Lesquels décrivent correctement un angle critique de résonance ?

3- On considère les potentiels perturbateurs suivants:

$U_1 = \mathcal{A}_1 e \cdot \cos[(m+1)\lambda_s - m\lambda - \varpi]$,
$U_2 = \mathcal{A}_2 e \cdot \cos[(m+1)\lambda_s - m\lambda - \varpi_s]$,
$U_3 = \mathcal{A}_3 e e_s \cdot \cos[m\lambda_s - (m-2)\lambda - \varpi - \varpi_s]$,
$U_4 = \mathcal{A}_4 e^2 \cdot \cos[m\lambda_s - (m-2)\lambda - 2\varpi]$,

où m est entier, et où les facteurs multiplicatifs $\mathcal{A}_i$ ont pour dimension une énergie, et dépendent de la masse du satellite m_s ainsi que de coefficients de Laplace sans dimension dont on ne discutera pas les valeurs ici.

Lesquels de ces termes décrivent correctement un potentiel perturbateur de résonance ?

4- De manière générique, le potentiel perturbateur associé à une résonance s'écrit

$$U = \mathcal{A} e^q e_s^{q_s} \cdot \cos[m\lambda + m_s\lambda_s + p\varpi + p_s\varpi_s],$$

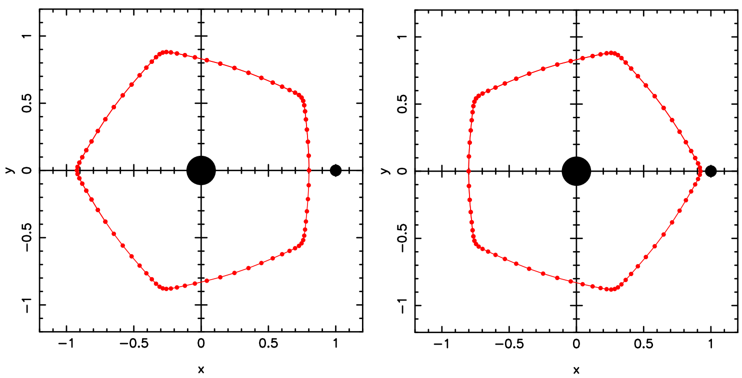

Figure 1: Mouvement d'une particule (rouge) à des instants équidistants, vu d'un repère centré sur la planète (disque noir au centre) et tournant avac le satellite (petit disque noir à droite).

(a) Enoncer les deux règles de d'Alembert qui contraignent les valeurs des entiers q, q_s, m, m_s, p, p_s.

(b) Quelle est l'origine physique de la relation qui existe entre m, m_s, p et p_s?

5- On considère le mouvement d'une particule dans une repère tournant avec un satellite dont l'orbite autour de la planète est supposée circulaire (Fig. 1).

(a) ces diagrammes décrivent une résonance de moyen mouvement de type $n/n_s = p/q$. Donner les entiers p et q considérés ici.

(b) Quel est l'ordre de cette résonance?

(c) Quelle est la valeur (en degrés) de l'angle critique de résonance correspondant au diagramme de gauche? Celui de droite?

6- *Cet exercice est plus difficile.* Un satellite de Saturne, Mimas, excite une résonance de moyen mouvement 5:3 dans les anneaux.

L'un des termes résonants du potentiel perturbateur dû à cette résonance est de la forme:

$$U_{5:3} = \mathcal{A}ee_s \cdot \cos[5\lambda_s - 3\lambda - \varpi - \varpi_s]$$

(a) Donner la forme des deux autres termes $U'_{5:3}$ et $U''_{5:3}$ associés à cette même résonance.

(b) Expliquer qualitativement pourquoi les trois rayons orbitaux $a_{5:3}$, $a'_{5:3}$ et $a''_{5:3}$ où ces résonances s'appliquent sont séparés les uns des autres.

(c) On considère de nouveau le potentiel $U_{5:3}$. Il excite dans les anneaux un motif spiral. Comme la masse de l'anneau impliquée dans cette résonances est négligeable par rapport à m_s (problème restreint), Mimas n'est pas perturbé par les anneaux et son excentrictés orbitale e_s reste constante.

Montrer alors que la résonance associée à $U_{5:3}$ cause l'apparition de **4** bras spiraux au niveau de $a_{5:3}$.

Résonances spin-orbite

7- On considère un satellite rigide de forme triaxiale ellipsoïdale, qui tourne autour d'une planète sur une orbite elliptique, avec une période T_{orb}. On suppose que le satellite tourne autour de son plus petit axe, et que ce dernier est perpendiculaire au plan orbital du satellite (obliquité nulle).

On note θ l'angle qui repère dans l'espace inertiel l'orientation du grand axe de l'ellipsoïde, et f l'anomalie vraie du satellite le long de son orbite. On peut alors montrer que θ est régi par l'équation différentielle suivante:

$$\ddot{\theta} = -\epsilon \frac{GM_p}{2r^3} \cdot \sin[2(\theta - f)]$$

où G est la constante de gravitation et ϵ est un coefficient sans dimension qui mesure l'élongation du satellite (les points indiquant ici les dérivées par rapport au temps).

(a) faire un croquis de la situation, en reportant en particulier les angles θ et f.

(b) Expliquer l'origine physique des termes ϵ, $1/r^3$ et $2(\theta - f)$ dans cette équation. Donner l'interprétation géométrique de l'angle $\gamma = \theta - f$.

(c) On suppose que le satellite tourne autour de la planète sur une orbite circulaire. Donner alors la période T_{lib} des oscillations (appelées librations) de γ pour des valeurs proches de zéro.

(d) On exprimera T_{lib} en fonction de T_{orb} et ϵ uniquement. Application numérique à la Lune, pour laquelle on a $T_{\mathsf{orb}} \sim 27$ jours et $\epsilon \sim 2.3 \times 10^{-4}$.

8- (a) Indiquer succintement pourquoi la plupart des satellites naturels ont des orbites dites "synchrones".

(b) Donner un exemple de corps dans le système solaire qui est capturé dans une résonance spin-orbite, mais qui n'est *pas* synchrone.

9- (a) Expliquer pourquoi le fait de porter l'évolution du système dans un diagramme $(\theta, \dot{\theta})$ uniquement pour des valeurs de temps multiples de la période orbitale T_{orb} permet de clarifier la dynamique du problème.

(b) Comment appelle-t-on cette technique de représentation des solutions d'une équation différentielle?