

UPMC - **LP210** - Partie : Mouvement planétaire.
2012-2013 Semestre 2
Examen (Première session)
Epreuve du jeudi 16 mai 2013.
Calculatrice autorisée. Epreuve sans document.
Ce texte est sur deux pages.

On précisera toujours les unités. Il sera tenu compte de la clarté des calculs et de la présentation finale des résultats.

A - Questions de cours

1 - Moment cinétique et mouvement planétaire

On considère une planète P en orbite képlérienne autour du Soleil S .

- Expliquer ce que signifie *orbite képlérienne* (une phrase suffit – il ne s'agit pas d'énoncer les trois lois de Kepler).
- Calculer les valeurs r_p et r_a de la distance SP au périhélie (périgée) et à l'aphélie (apogée) en fonction des caractéristiques géométriques de l'orbite.
- Donner la définition du moment cinétique \vec{C} par unité de masse.
- A l'aide de \vec{C} , démontrer que le mouvement des planètes est plan.
- A l'aide de \vec{C} , calculer le rapport V_p/V_a en fonction uniquement des caractéristiques géométriques de l'orbite (V_p est la vitesse au périhélie, V_a à l'aphélie).

2 - Loi des aires

Énoncer et démontrer la deuxième loi de Kepler (loi des aires).

B - Les comètes

On considère une comète, notée Z , en orbite elliptique (demi-grand axe a , excentricité e) dans le Système solaire. La partie 3 de l'exercice est indépendante.

1 - Figure schématique

Faire une figure schématique [*format : une page entière*] de l'orbite, où on notera le Soleil S , la comète Z , son périhélie P et son aphélie A . On prendra un repère cartésien centré sur S , l'axe $x'Sx$ portant la ligne des apsides (ASP), orienté dans le sens SP . On notera les axes $x'Sx$ et $y'Sy$ ainsi que l'angle polaire θ permettant de repérer Z dans ce repère, $\theta = (\vec{SP}, \vec{SZ})$.

2 - Angle entre les queues de la comète

A l'observation, on note que la comète a deux queues :

– une queue de gaz, due à la radiation solaire, opposée à la direction du Soleil, et dont un point central est noté Q_1 ;

– une queue de poussières, entraînée à l'arrière de la comète dans son mouvement, considérée ici comme colinéaire au vecteur vitesse de Z , et dont un point central est noté Q_2 .

On veut calculer l'angle α entre ces deux queues.

a) Compléter la figure en faisant apparaître les vecteurs unitaires des coordonnées polaires \vec{e}_r et \vec{e}_θ ainsi que le vecteur vitesse \vec{V} au point Z . Noter l'angle β entre \vec{V} et \vec{e}_r .

b) Compléter la figure en faisant apparaître les vecteurs \vec{ZQ}_1 et \vec{ZQ}_2 . Noter l'angle α .

c) Quelle est la relation (très simple) entre les angles β et α ? Donner la valeur de α pour $\theta = 0$? Par la suite, on ne considèrera que la valeur absolue de l'angle α .

d) On note le rayon vecteur $\vec{r} = \overline{SZ}$, et on rappelle :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (1)$$

En exprimant le vecteur vitesse $\dot{\vec{r}} = (d\vec{r}/dt)$ en coordonnées polaires, donner la relation qui lie α avec les coordonnées polaires r , $\dot{r} = (dr/dt)$ et θ .

Exprimer le moment cinétique par unité de masse \vec{C} en fonction de ces coordonnées polaires. On pose $C = \|\vec{C}\|$. Exprimer C .

e) On introduit la variable u , variable de Binet :

$$u = \frac{1}{r} \quad (2)$$

En écrivant $u(\theta)$, calculer $(du/d\theta)$. Calculer \dot{r} à l'aide de ces variables.

f) A l'aide des calculs précédents, exprimer α en fonction des caractéristiques de l'orbite et de θ . Calculer α en fonction de θ pour e très proche de 1.

g) Placer sur la figure les points W' et W pour lesquels l'angle polaire θ est égal, respectivement, à $(-\pi/2)$ et à $(+\pi/2)$. Calculer les distances SP , SW , SA et SW' en fonction des éléments orbitaux a et e . En notant V_p le module de la vitesse au périhélie, exprimer la vitesse en A , W et W' en fonction de V_p et de e , en considérant que e est très proche de 1.

3 - Période de la comète

a) La période de la comète Z est de 4,60 ans. Calculer le demi-grand axe a de son orbite, en UA.

b) La planète Jupiter a une orbite héliocentrique : $a_J = 5,201$ UA et $e_J = 0,048$. L'aphélie de la comète Z est à la même distance du Soleil que l'aphélie de Jupiter. Calculer l'excentricité e de la comète.

c) L'orbite du satellite Europe, autour de Jupiter, a un rayon de 670090 km. Sa période de révolution est de 3,552 jours. Quel est le rapport de la masse du Soleil sur celle de Jupiter ?