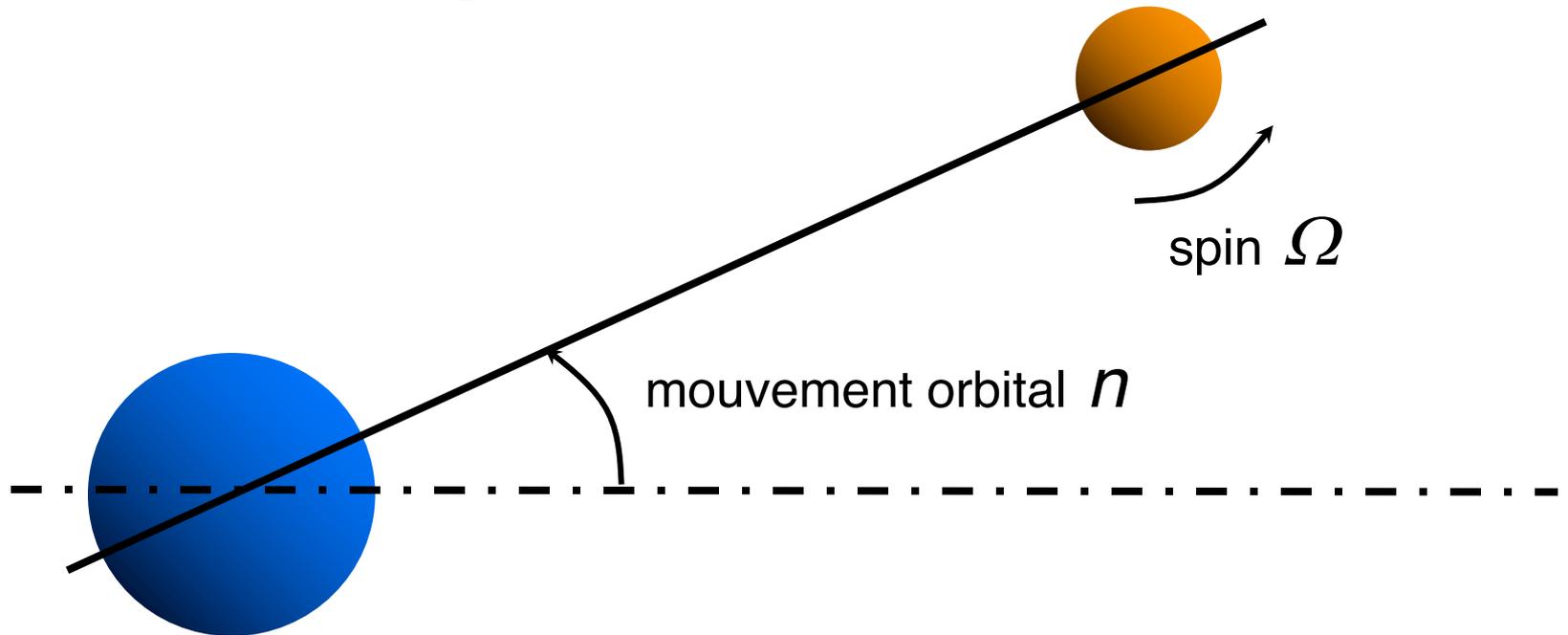
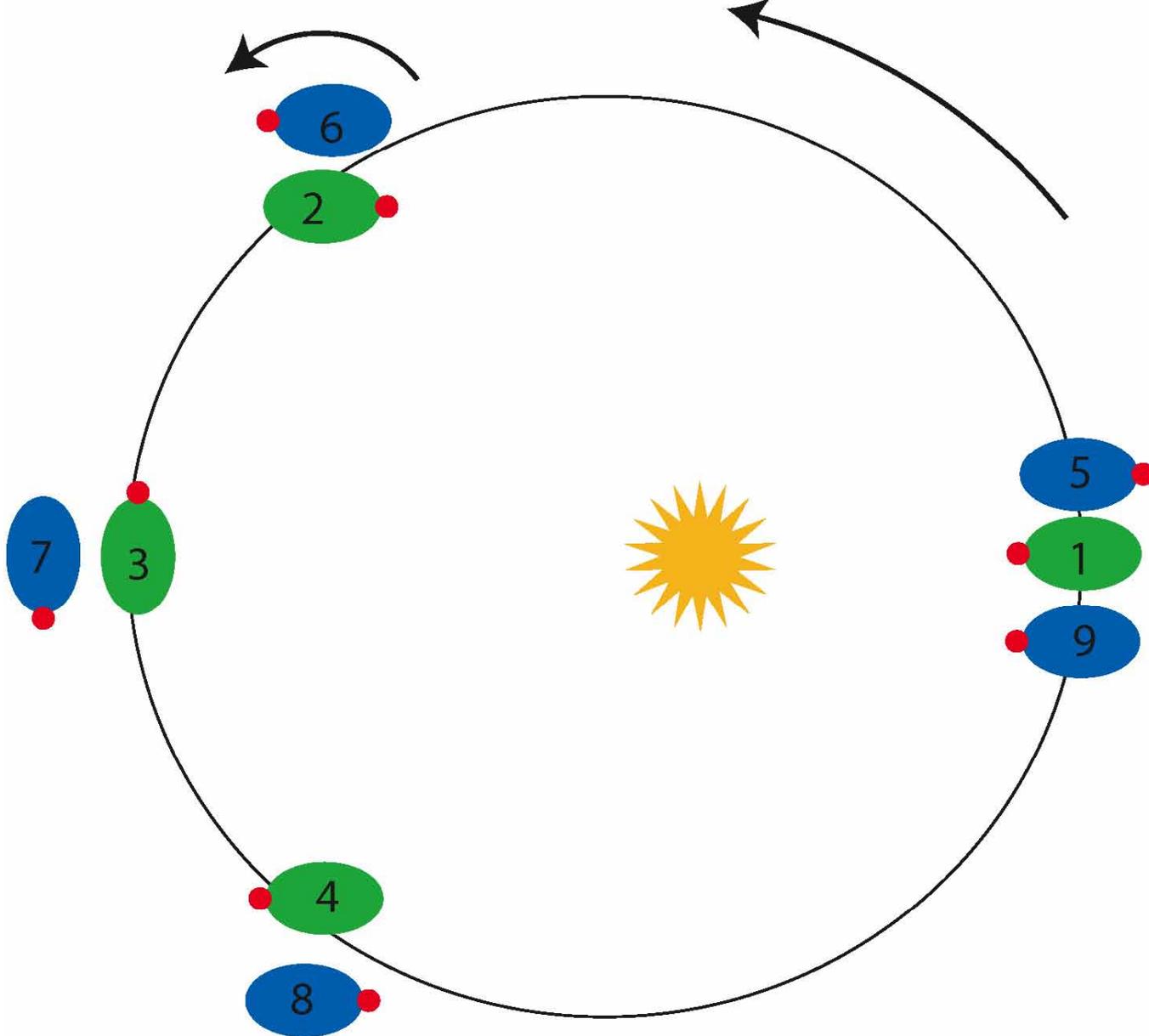


les résonances spin-orbite

relation du type: $\frac{\Omega}{n} \approx \frac{p}{q}$ où p et q sont entiers



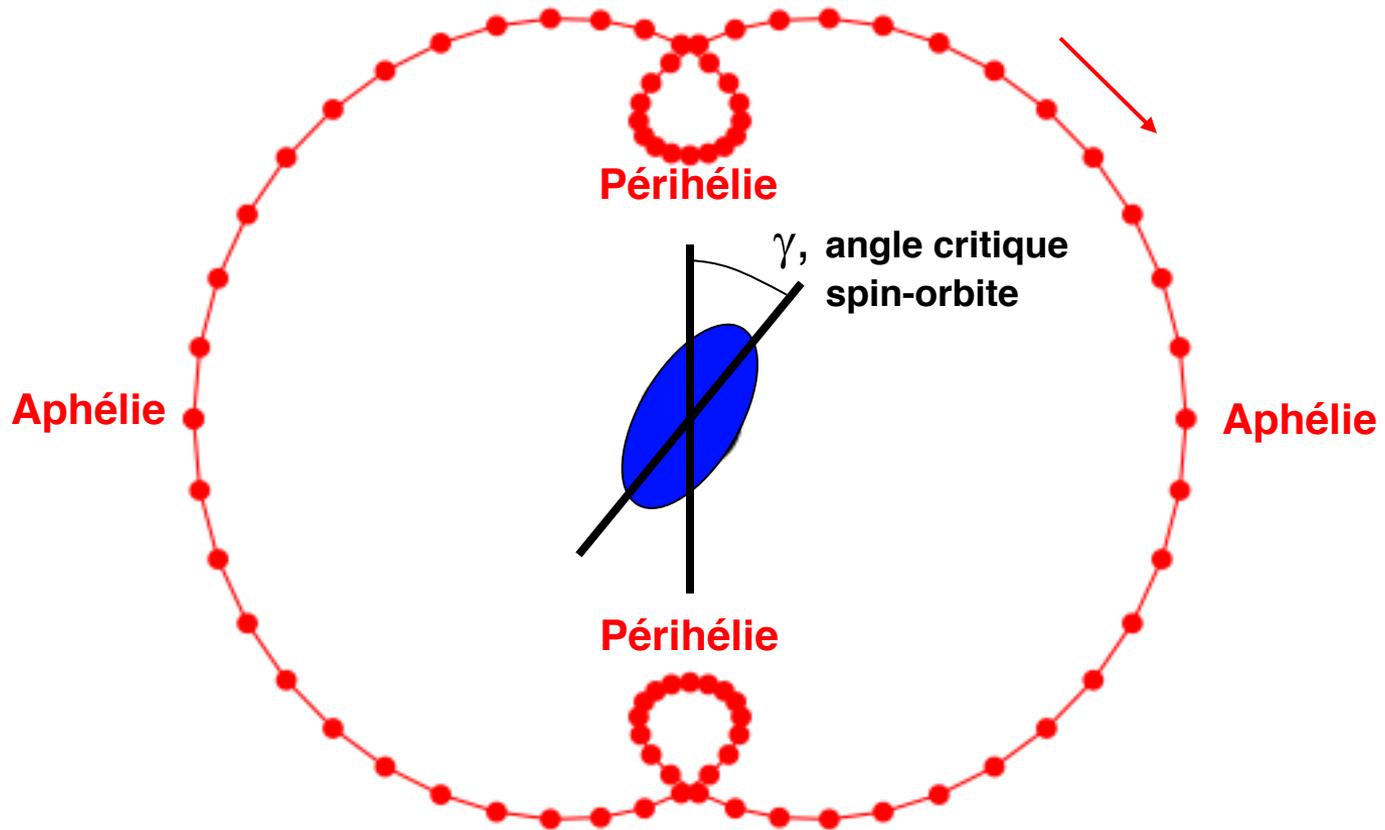
$\Omega = n$, rotation *synchrone* (nombreux satellites, étoiles, etc...)
 $2\Omega = 3n$, résonance spin-orbite de Mercure



cf. Correia & Laskar
Nature 24 juin 2004 &
Nouvelles OP juillet 2004

 orbit 1
 orbit 2

$e = 0.3$



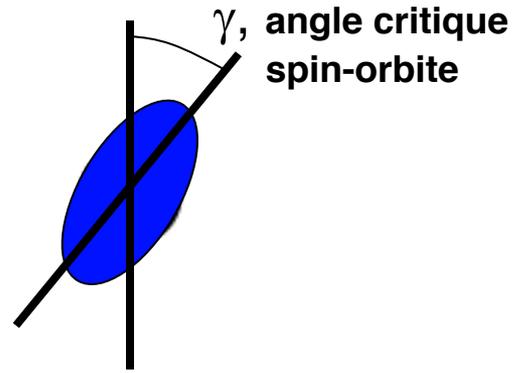
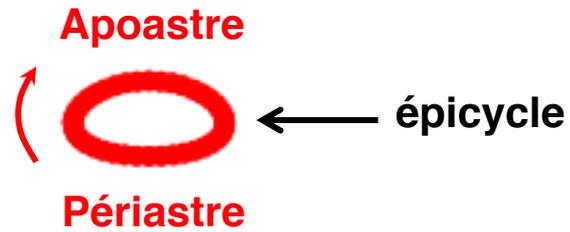
le mouvement du Soleil vu du sol de Mercure
A: aphélie, P: périhélie

Viewing from Mercury Long: 90° 20' 00" Lat: 0° 14' 42"
2005/11/12 01:39:23 UT (UT)

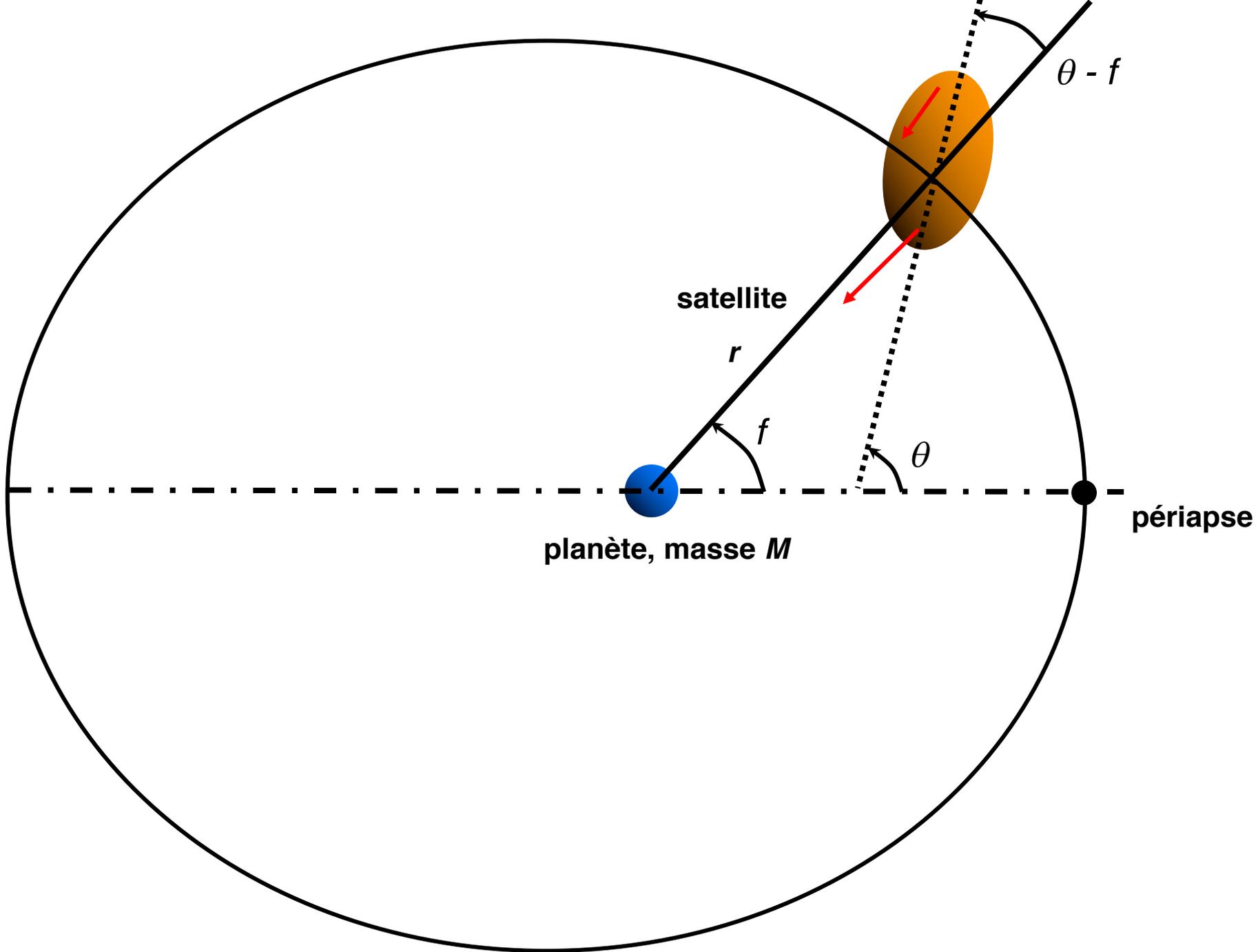


W

$$e = 0.1$$



le mouvement de la Terre vu du sol de la Lune
(orbite *synchrone*), A: apogée, P: périgée



couple des forces (en rouge) exercé par la planète sur le satellite:

$$T = -\varepsilon \frac{GM}{2r^3} C \cdot \sin[2(\theta - f)]$$

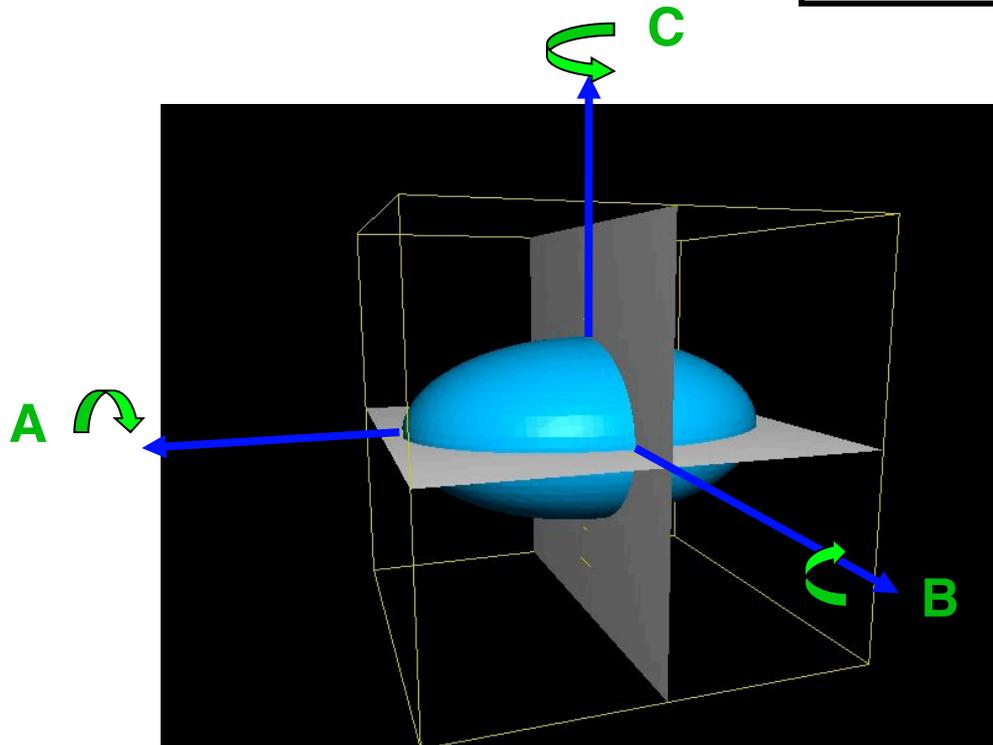
où:

C = moment d'inertie du satellite /t à Oz

ε = mesure de la **déformation** du corps, où

$$\varepsilon = \frac{3(B - A)}{C}$$

A, B, C:
moments d'inertie



remarques:

$$T = -\varepsilon \frac{GM}{2r^3} C \cdot \sin[2(\theta - f)]$$

déformation du corps (pointing to ε)

r^3 : effet différentiel (pointing to $2r^3$)

symétrie d'ordre deux (pointing to $\sin[2(\theta - f)]$)

anomalie vrais (pointing to f)

orientation dans repère inertiel (pointing to θ)

p.f.d.:

$$\ddot{\theta} = -\varepsilon \frac{GM}{2r(t)^3} \cdot \sin\{2[\theta - f(t)]\}$$

cf. par exemple Wisdom, Peal & Mignard, Icarus 58, 137-152 (1984)

$$\ddot{\theta} = -\varepsilon \frac{GM}{2r(t)^3} \cdot \sin\{2[\theta - f(t)]\}$$

: équation du pendule, mais compliqué en général car r dépend du temps et f dépend du temps de manière non linéaire

si orbite **circulaire**: $f = nt$, en posant: $\gamma = \theta - nt$

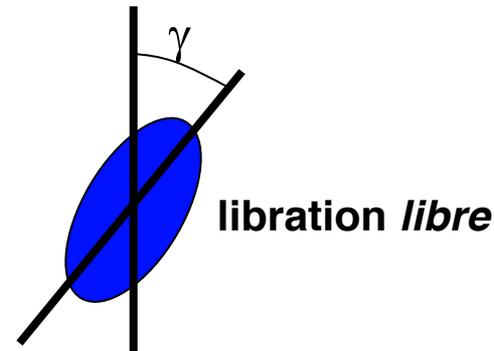
(angle critique de résonance spin-orbit), l'équation devient **intégrable**:

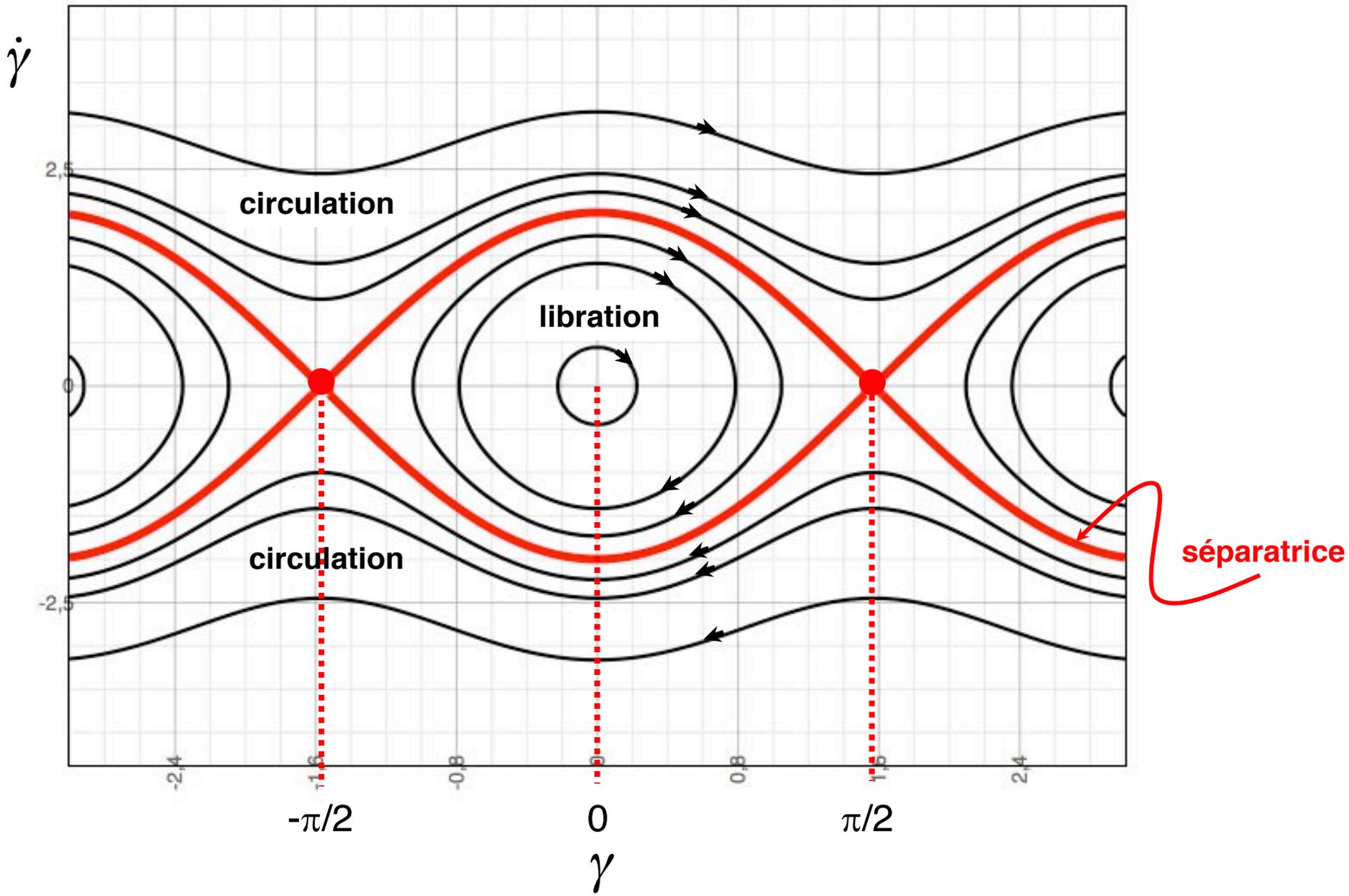
$$\ddot{\gamma} = -\varepsilon \frac{GM}{2r^3} \cdot \sin[2\gamma]$$

, pendule simple:



position apparente de la planète





repreons l'équation:

$$\ddot{\theta} = -\varepsilon \frac{GM}{2r(t)^3} \cdot \sin\{2[\theta - f(t)]\}$$

si on se limite au premier ordre en excentricité e , et en supposant que le satellite est au périastre et à l'origine des longitudes à $t = 0$:

$$r = a \cdot [1 - e \cdot \cos(M)] + O(e^2)$$

$$f = M + 2e \cdot \sin(M) + O(e^2)$$

où $M = nt$, avec $n =$ mouvement moyen du satellite

alors:

résonance 1:1 (synchrone)

$$\ddot{\theta} = -\varepsilon n^2 \cdot \left\{ \begin{aligned} &\sin[2(\theta - nt)] \\ &-\frac{e}{2} \cdot \sin[2(\theta - nt/2)] \\ &+\frac{7}{2} \cdot e \sin[2(\theta - 3nt/2)] \end{aligned} \right\} + O(e^2)$$

résonance 1:2

résonance 3:2

par exemple, près de la résonance 3:2,

$$\ddot{\gamma} \approx -\frac{7}{2} \varepsilon e n^2 \cdot \sin[2\gamma] \quad \text{où: } \gamma = \theta - 3nt/2 \quad \text{angle critique de résonance}$$

par exemple, près de la résonance 1:1,

$$\ddot{\gamma} \approx -\varepsilon n^2 \cdot \sin[2\gamma] \quad \text{où: } \gamma = \theta - nt \quad \text{angle critique de résonance spin-orbite 1:1}$$

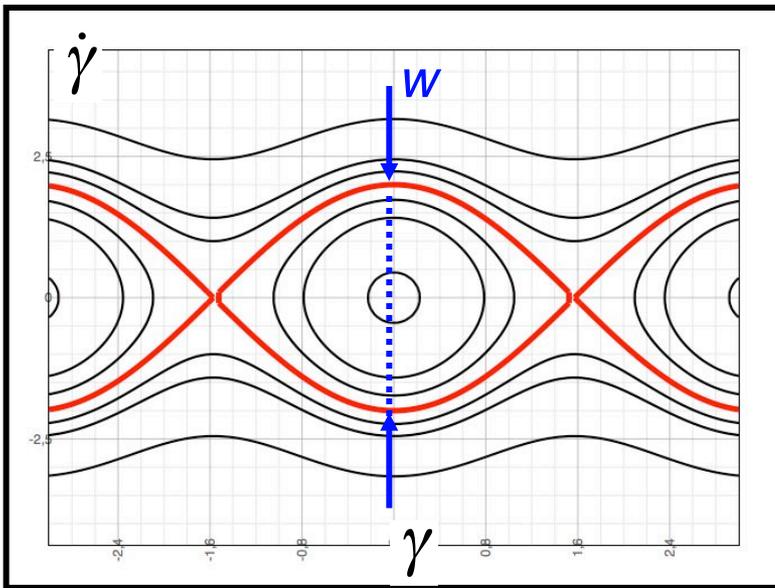
$$\dot{\gamma}^2 - \varepsilon n^2 \cdot \cos[2\gamma] = \text{cste (énergie du pendule)} \quad (1)$$

de même, près de la résonance 3:2,

$$\ddot{\gamma} \approx -\frac{7}{2}\varepsilon n^2 \cdot \sin[2\gamma] \quad \text{où: } \gamma = \theta - 3nt/2 \quad \text{angle critique de résonance spin-orbite 3:2}$$

$$\dot{\gamma}^2 - \frac{7}{2}\varepsilon n^2 \cdot \cos[2\gamma] = \text{cste} \quad (2)$$

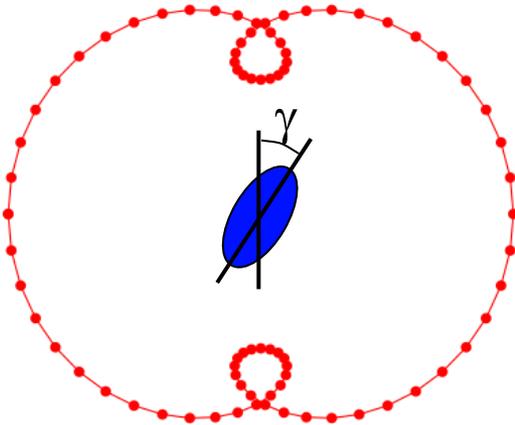
vérifier facteur 2 dans coeffs



des équations (1) et (2) précédentes,
on déduit les largeurs W des résonances
dans l'espace des phases:

$$W_{1/1} = \sqrt{8\varepsilon} \cdot n$$

$$W_{3/2} = \sqrt{28e\varepsilon} \cdot n = \sqrt{7e/2} \cdot W_{1/1}$$



par exemple, Mercure, $e \sim 0.2$, donc
 $W_{3/2} \sim 0.85 \cdot W_{1/1} \rightarrow$ la résonance 3:2
presque aussi forte que la résonance 1:1

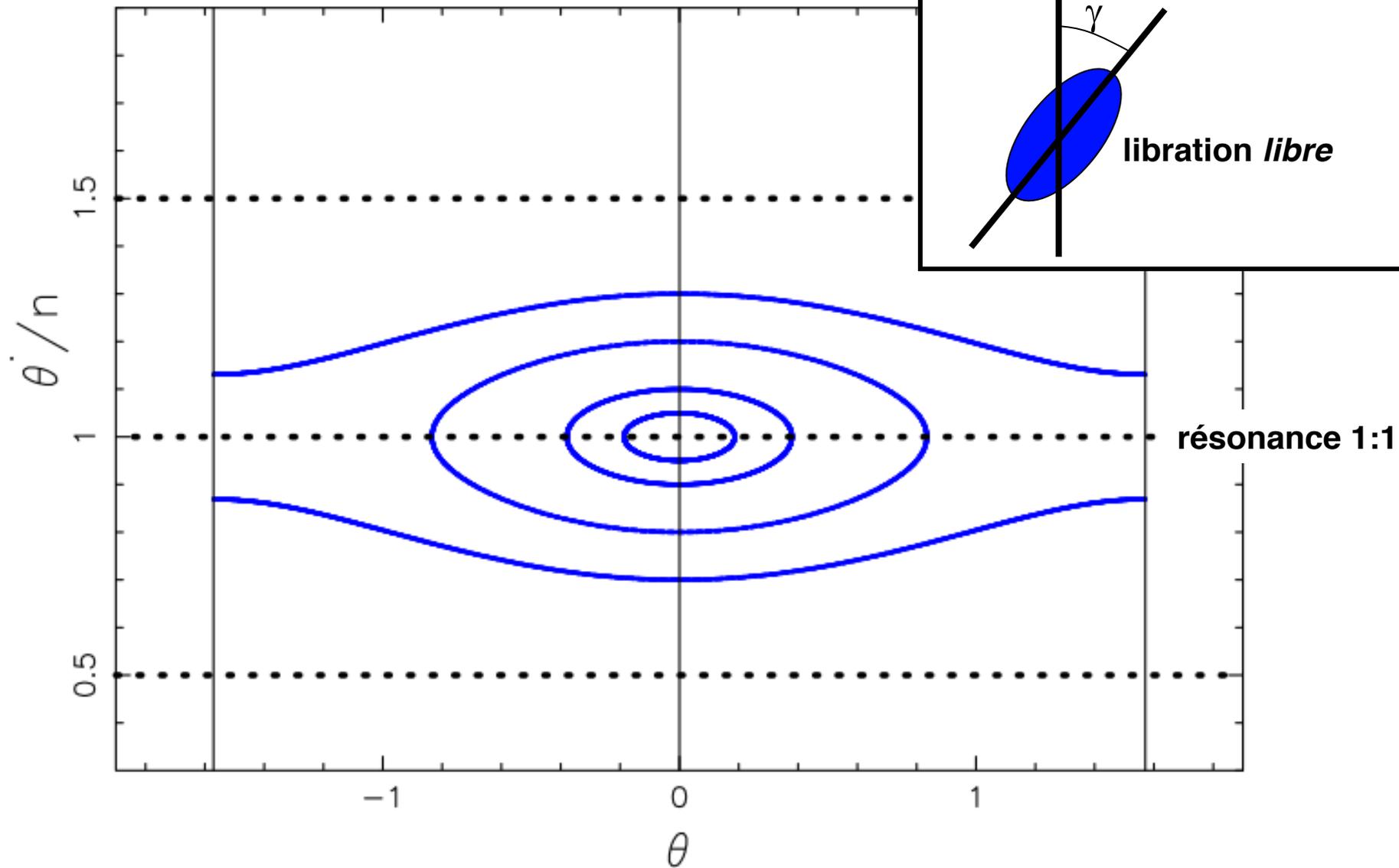
NB. la résonance 3:2 ne peut exister que
si l'orbite est elliptique, comme le montre
la figure ci-contre

cas général:
$$\ddot{\theta} = -\varepsilon \frac{GM}{2r(t)^3} \cdot \sin\{2[\theta - f(t)]\}$$

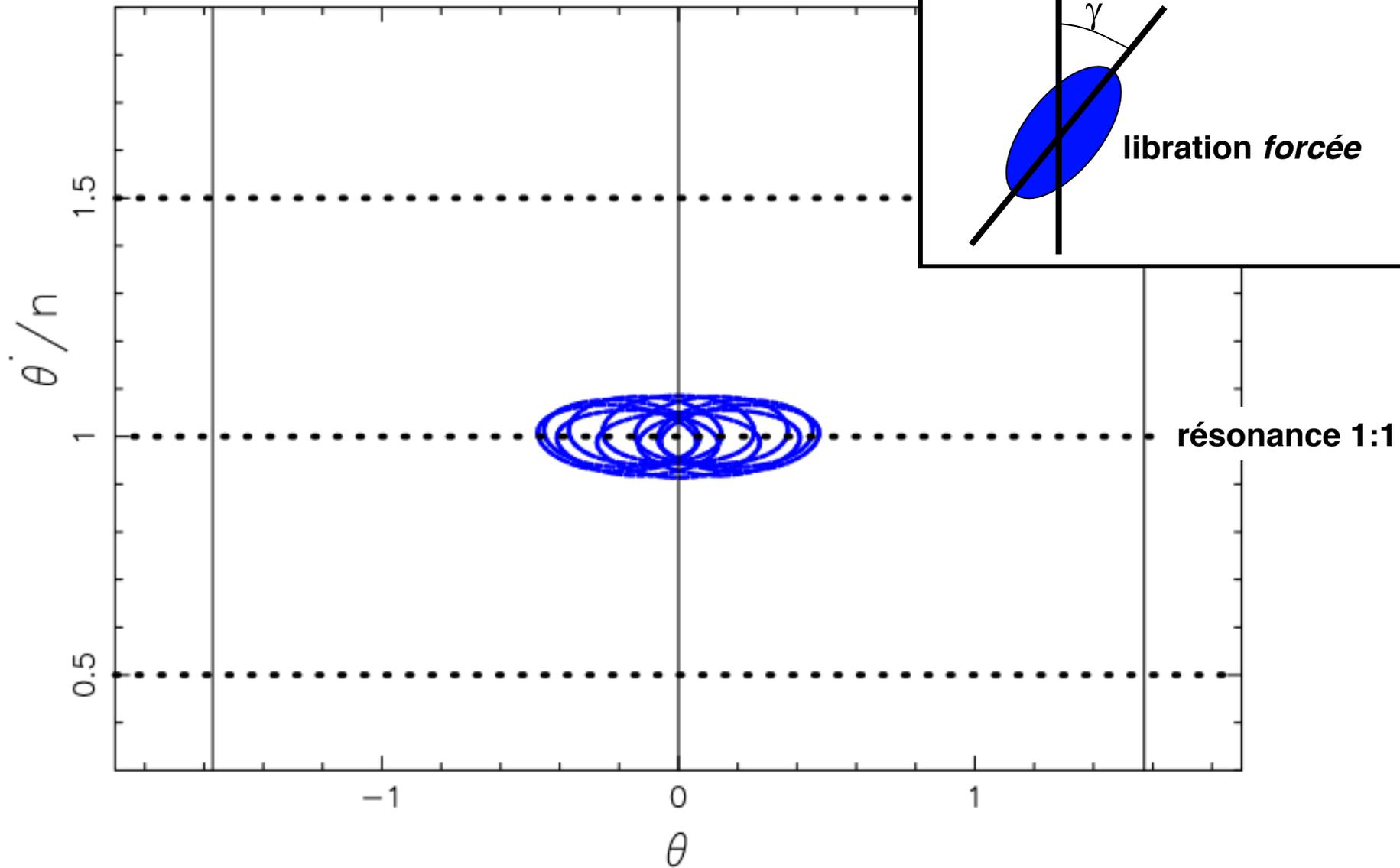
comme r et f sont $2\pi/n$ - périodiques, on peut porter θ et $\dot{\theta}$ uniquement pour $t = k.(2\pi/n)$ (surface de section).

avantage: permet d'obtenir simultanément le portrait de phase de *toutes* les résonances

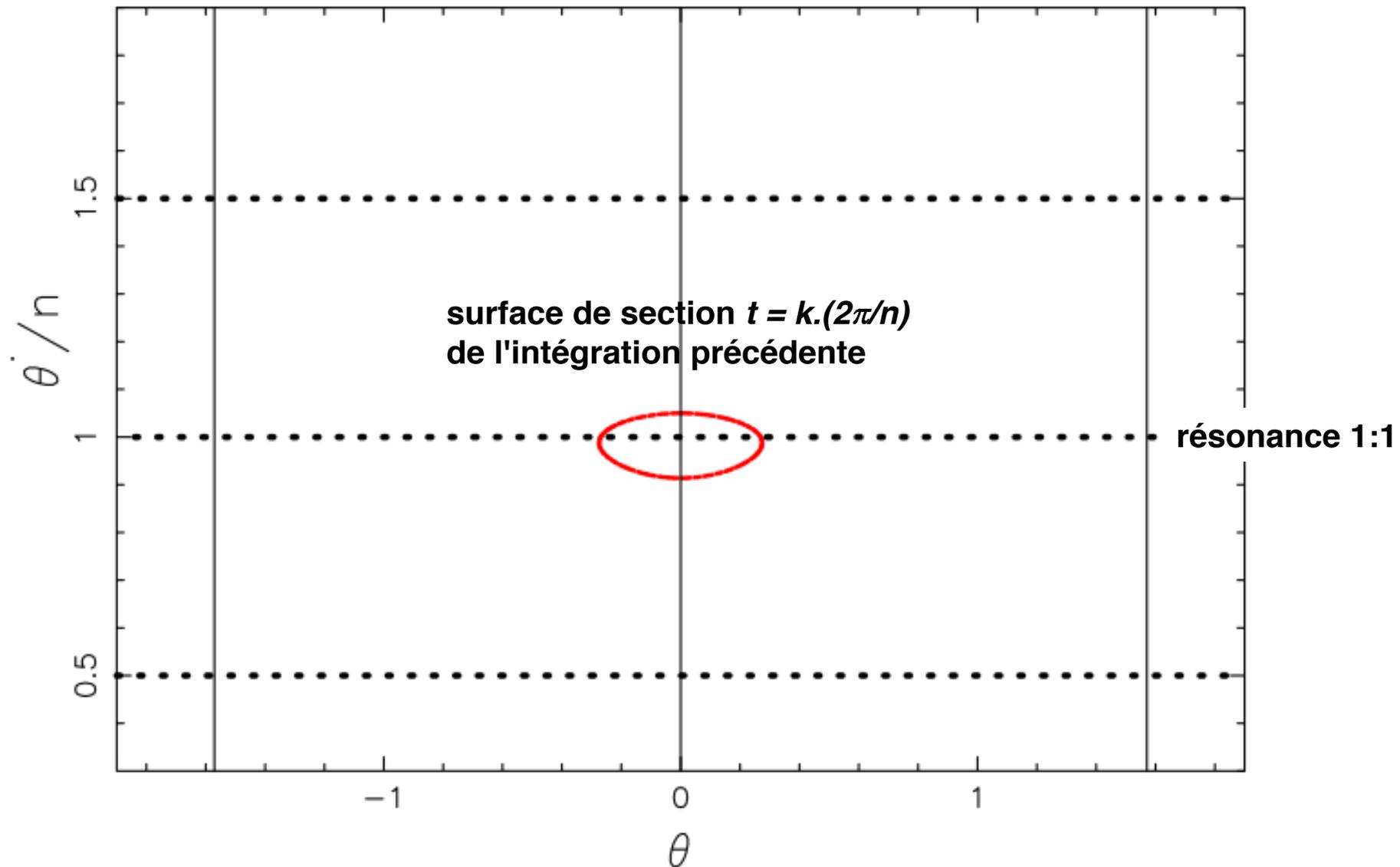
$$\varepsilon = (0.27)^2, e = 0$$



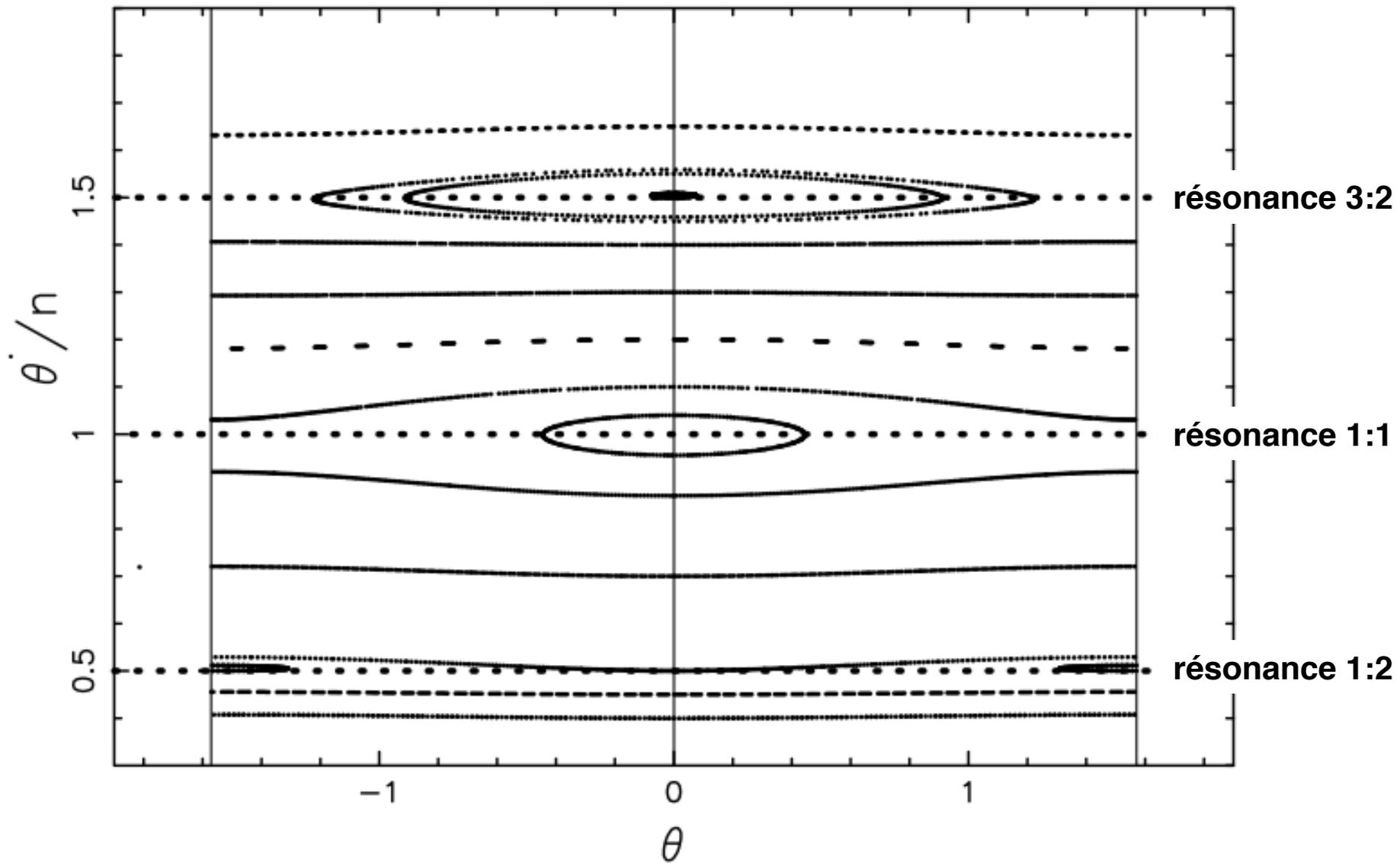
$$\varepsilon = (0.27)^2, e = 0.1$$



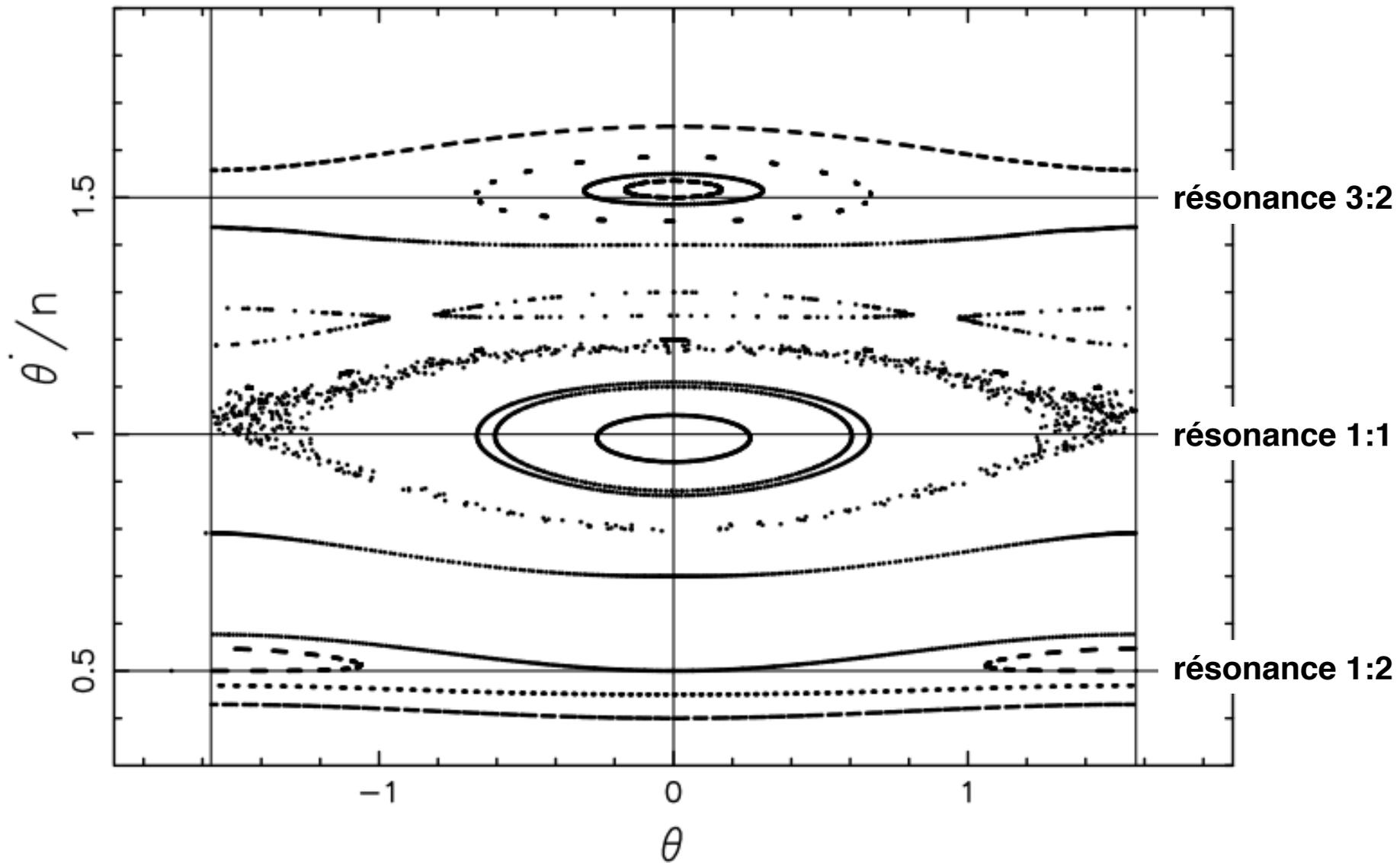
$$\varepsilon = (0.27)^2, e = 0.1$$



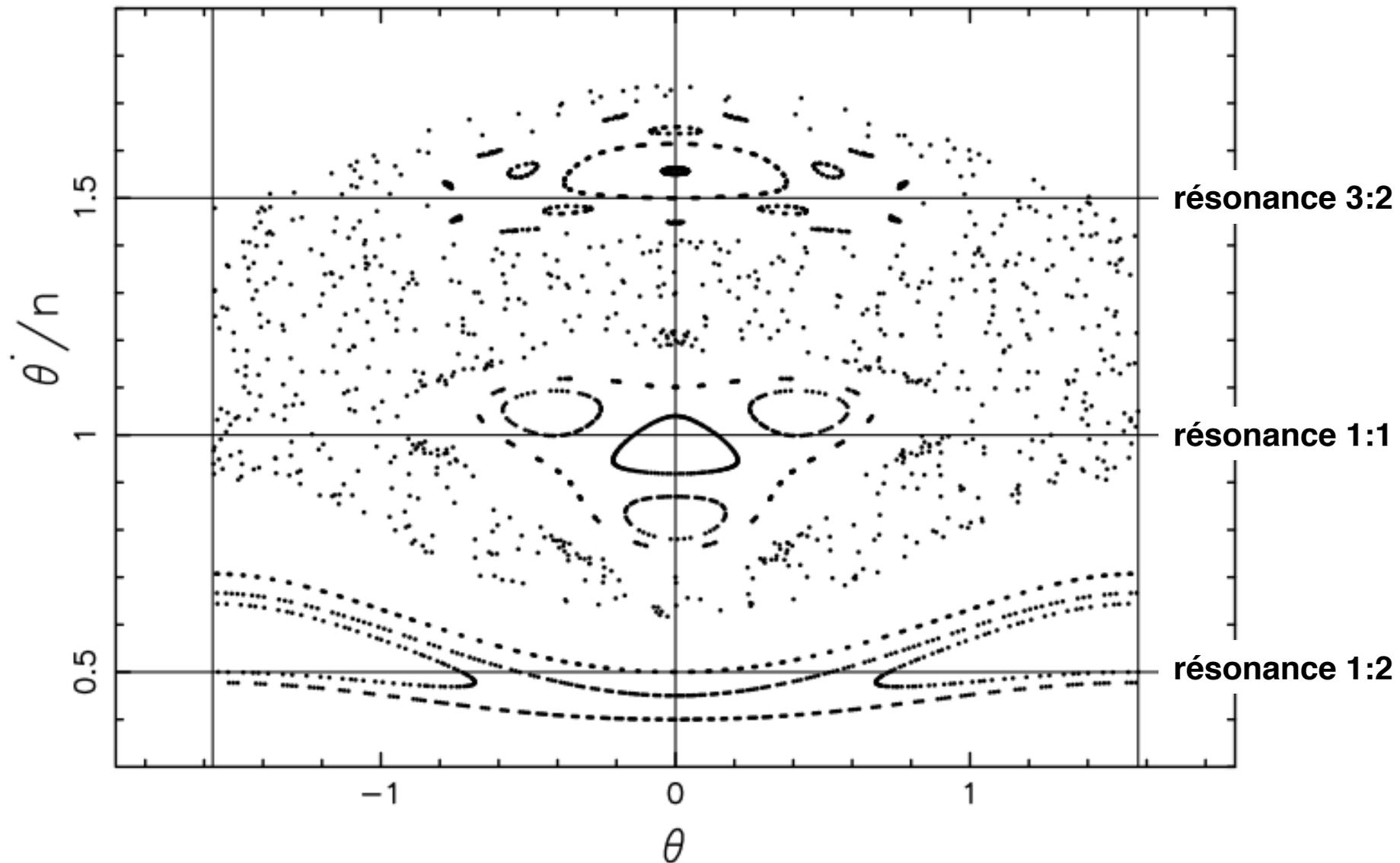
$$\varepsilon = (0.1)^2, e = 0.1$$



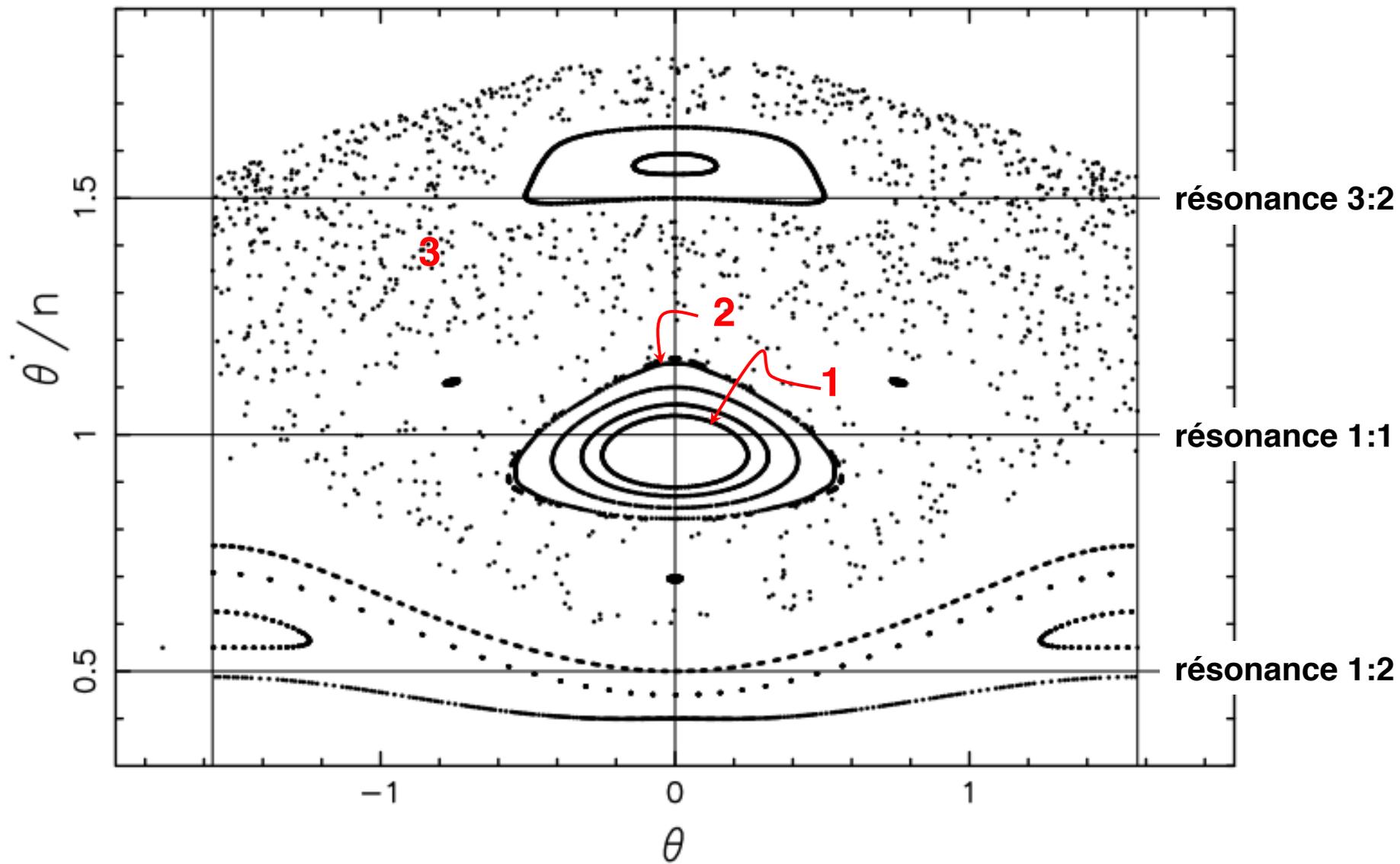
$$\varepsilon = (0.2)^2, e = 0.1$$

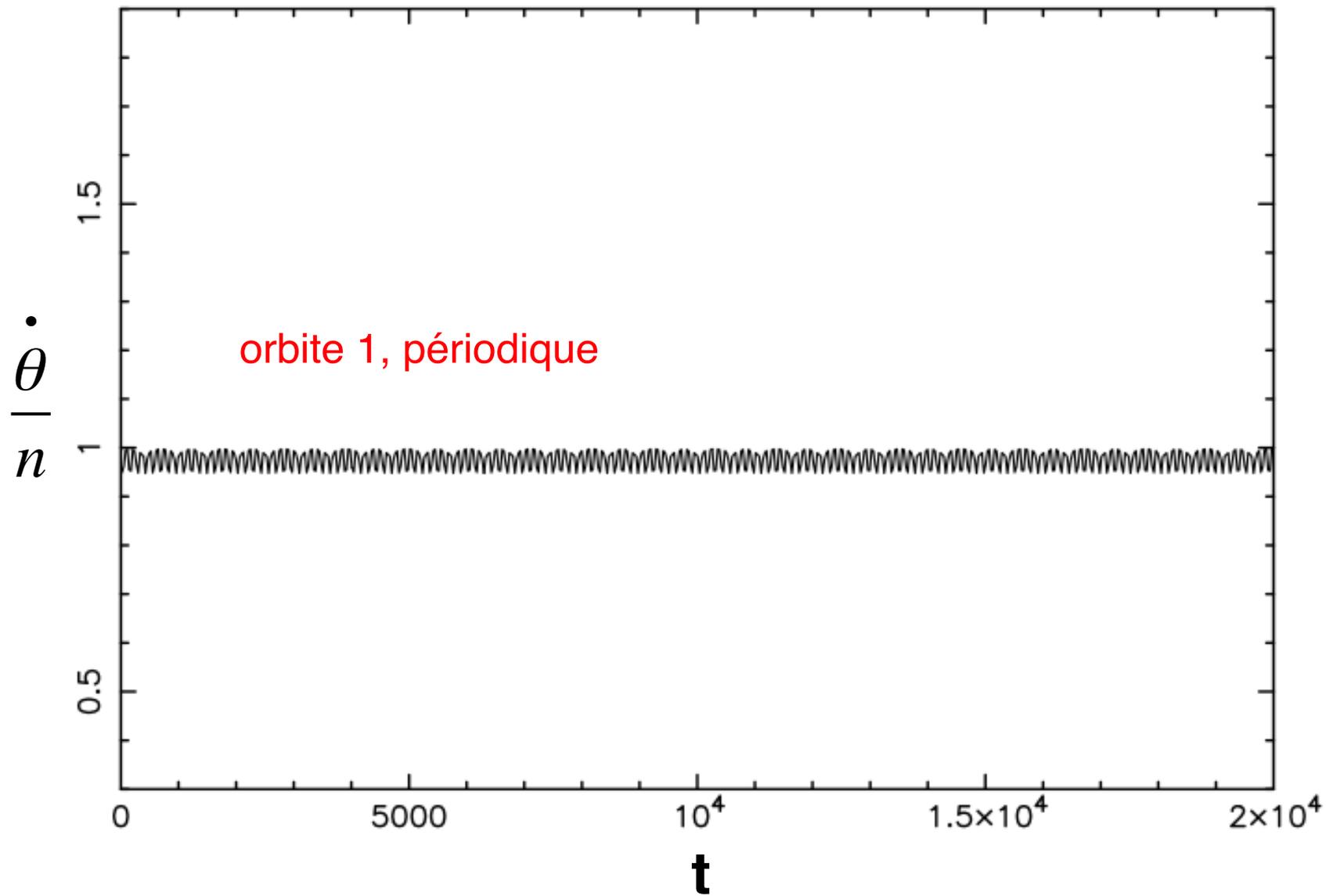


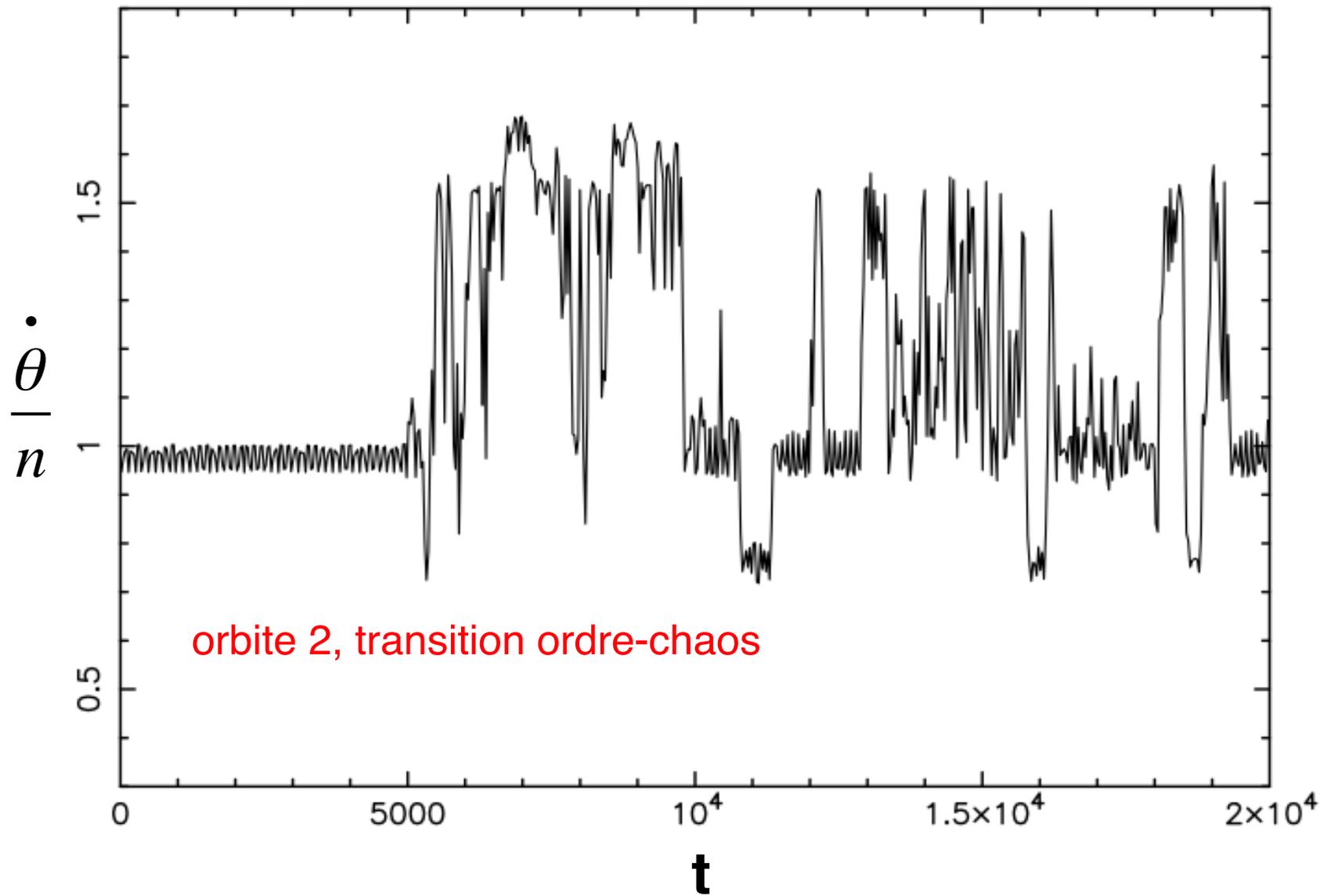
$$\varepsilon = (0.35)^2, e = 0.1$$

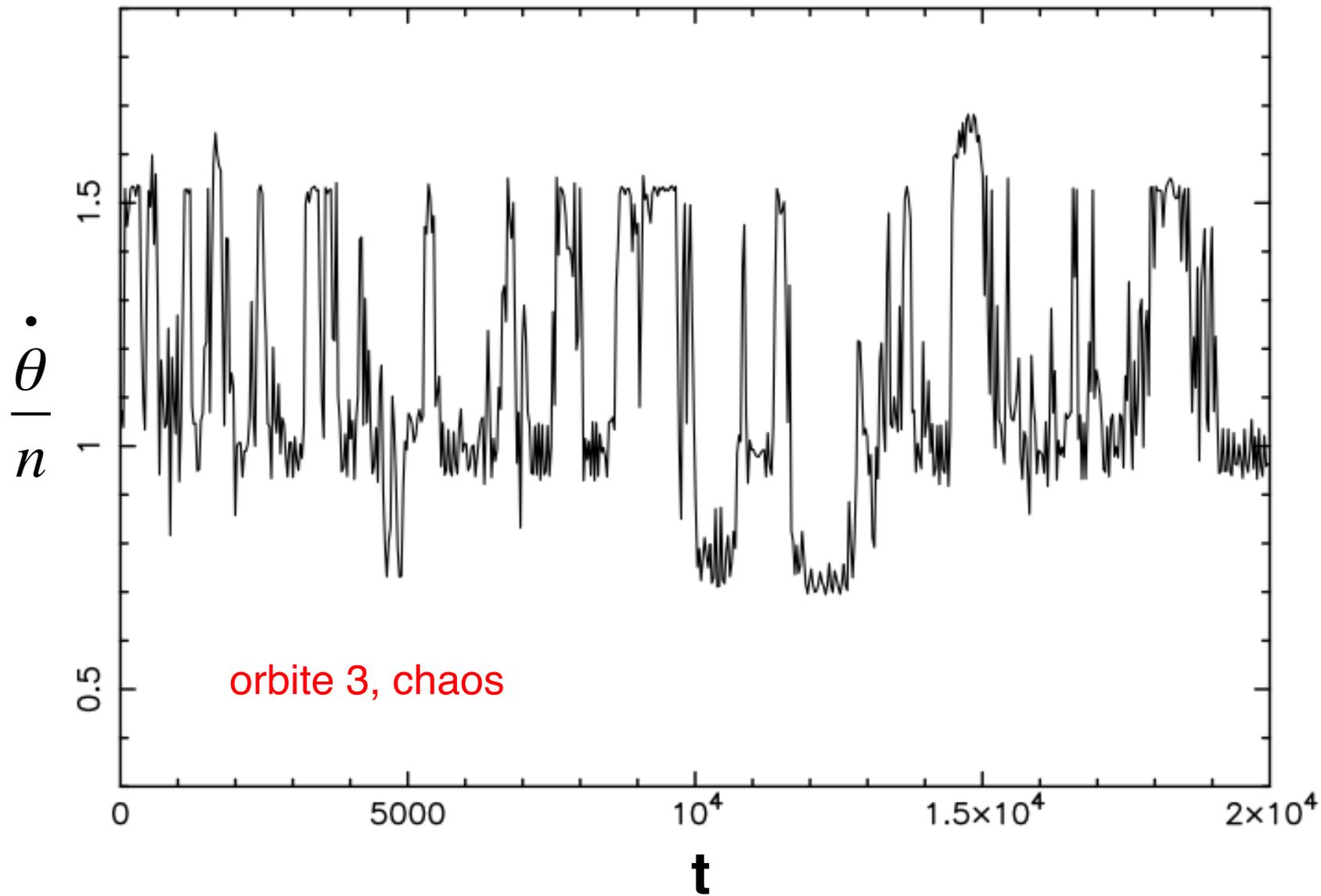


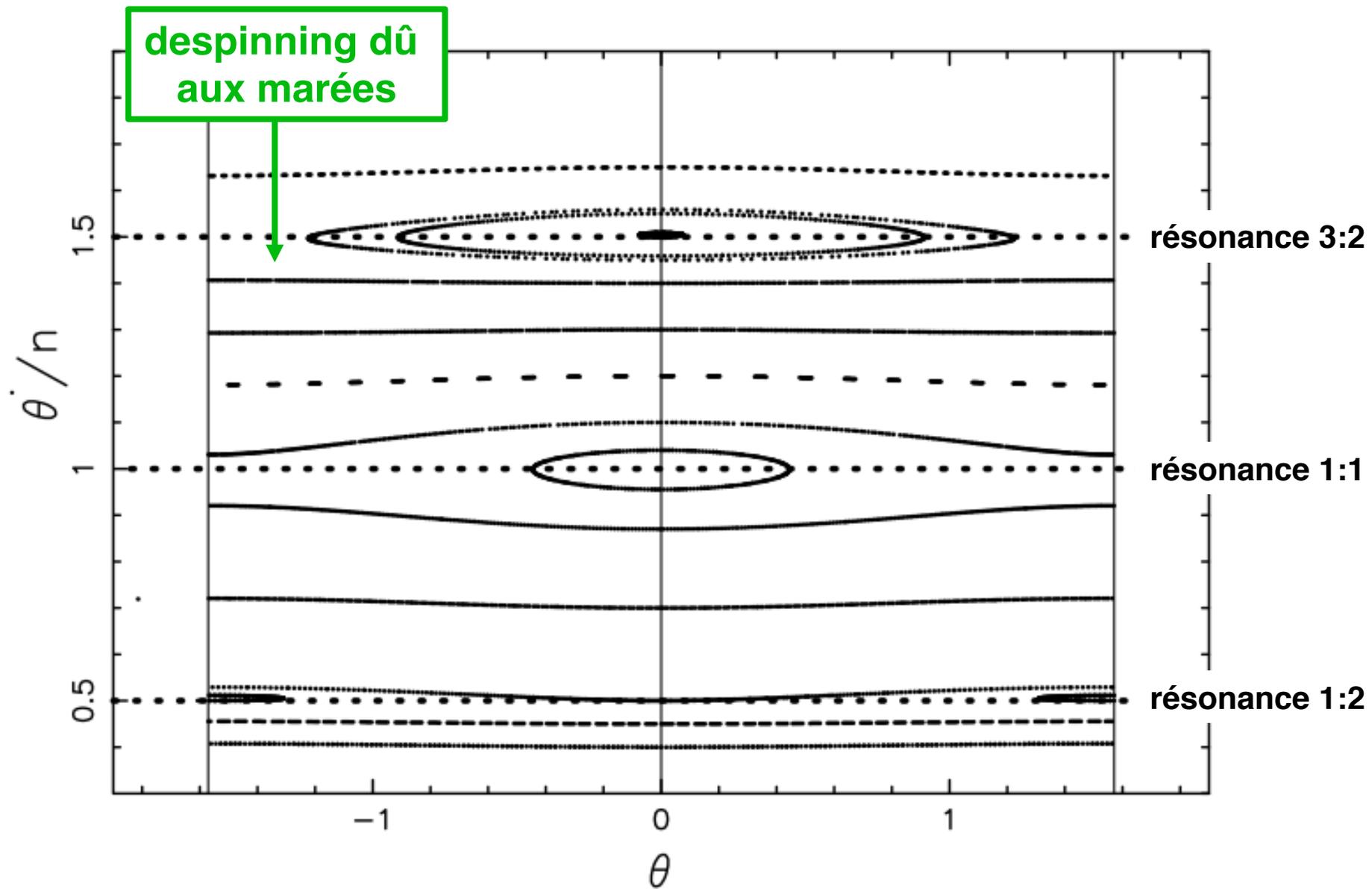
$$\varepsilon = (0.39)^2, e = 0.1$$

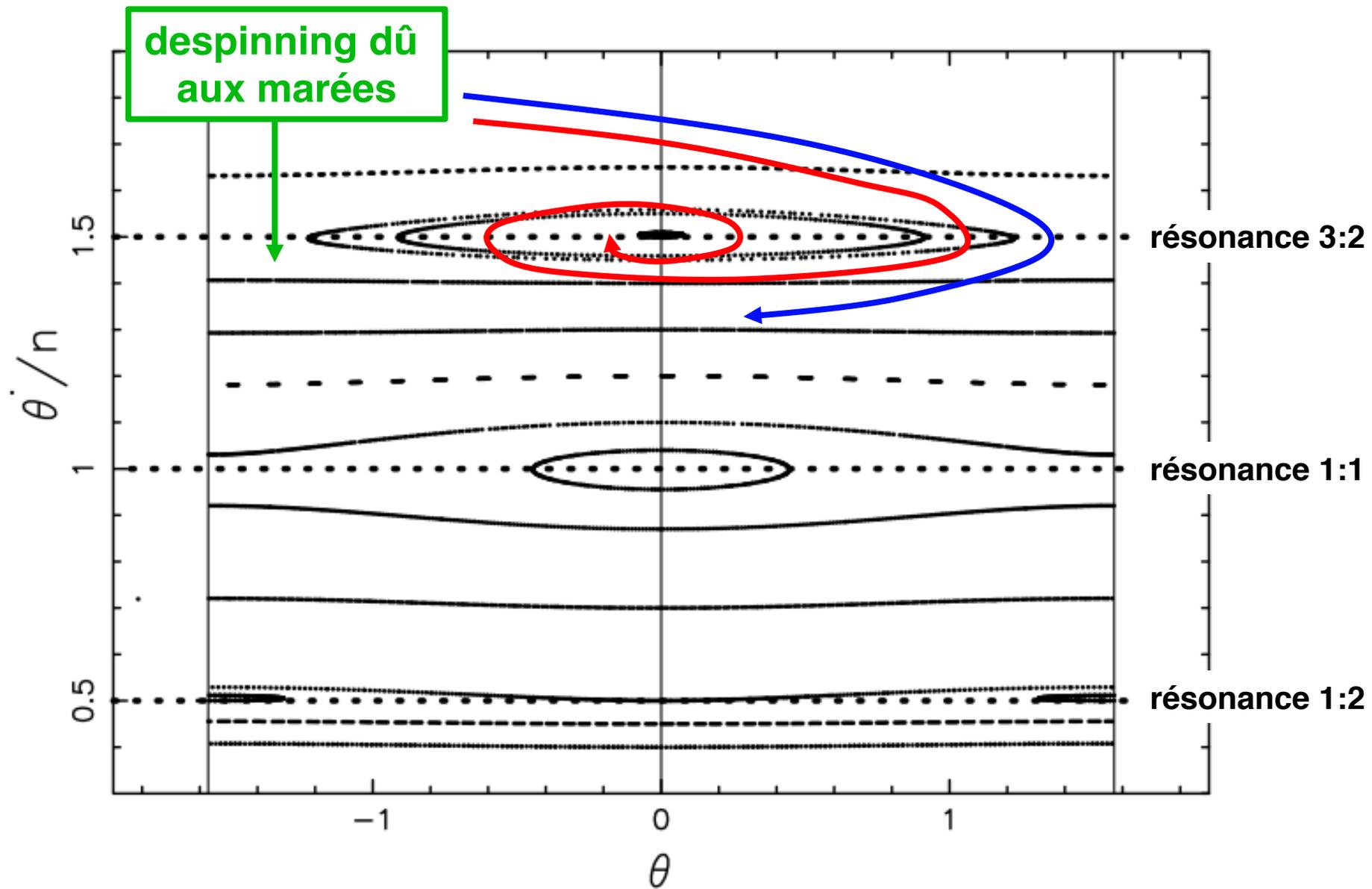


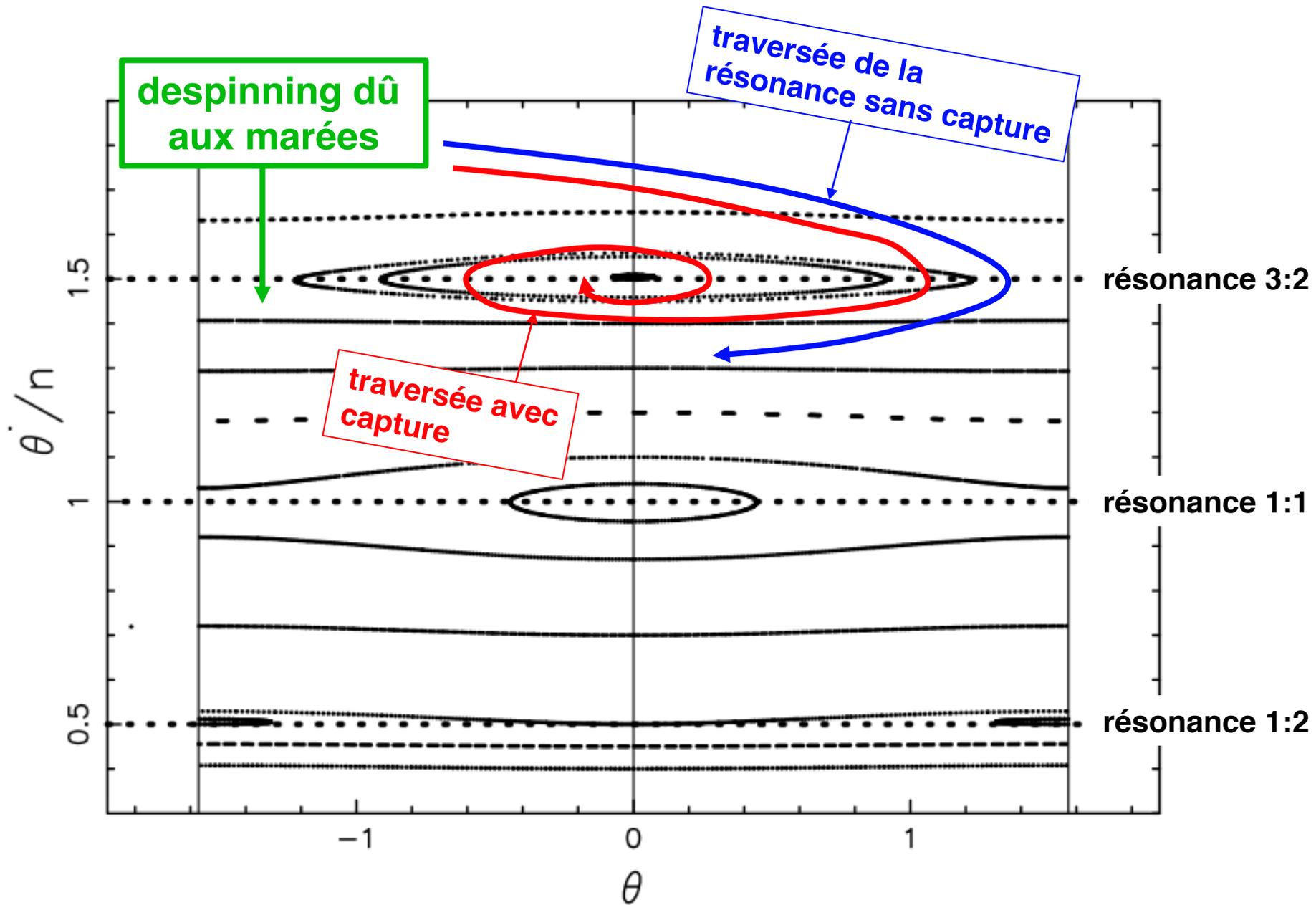




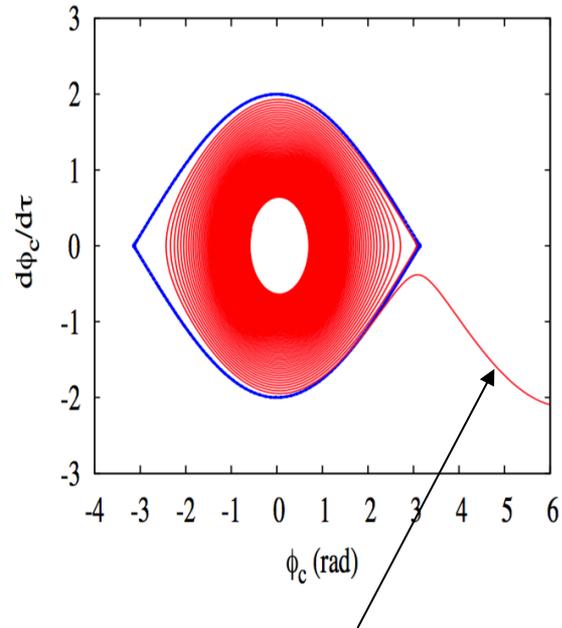




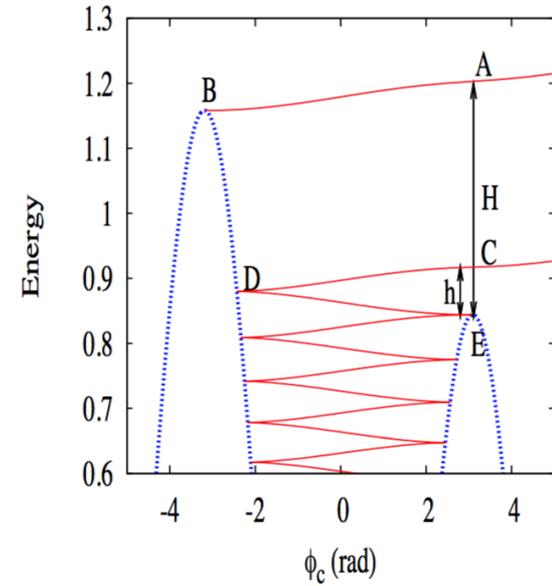
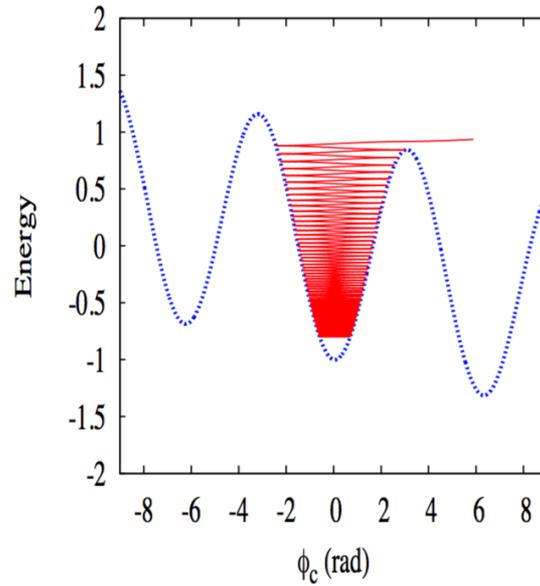




Problématique de la capture en résonance spin-orbite



évolution du spin causée
par les effets de marée



$$\text{probabilité} = h/H$$

résonance 1:1 (synchrone)
existe même si $e=0$

$$\ddot{\theta} = -\varepsilon n^2 \cdot \left\{ \begin{aligned} &\sin[2(\theta - nt)] \\ &-\frac{e}{2} \cdot \sin[2(\theta - nt / 2)] \\ &+\frac{7}{2} \cdot e \sin[2(\theta - 3nt / 2)] \end{aligned} \right\} + O(e^2)$$

résonance 3:2
n'existe que si $e \neq 0$