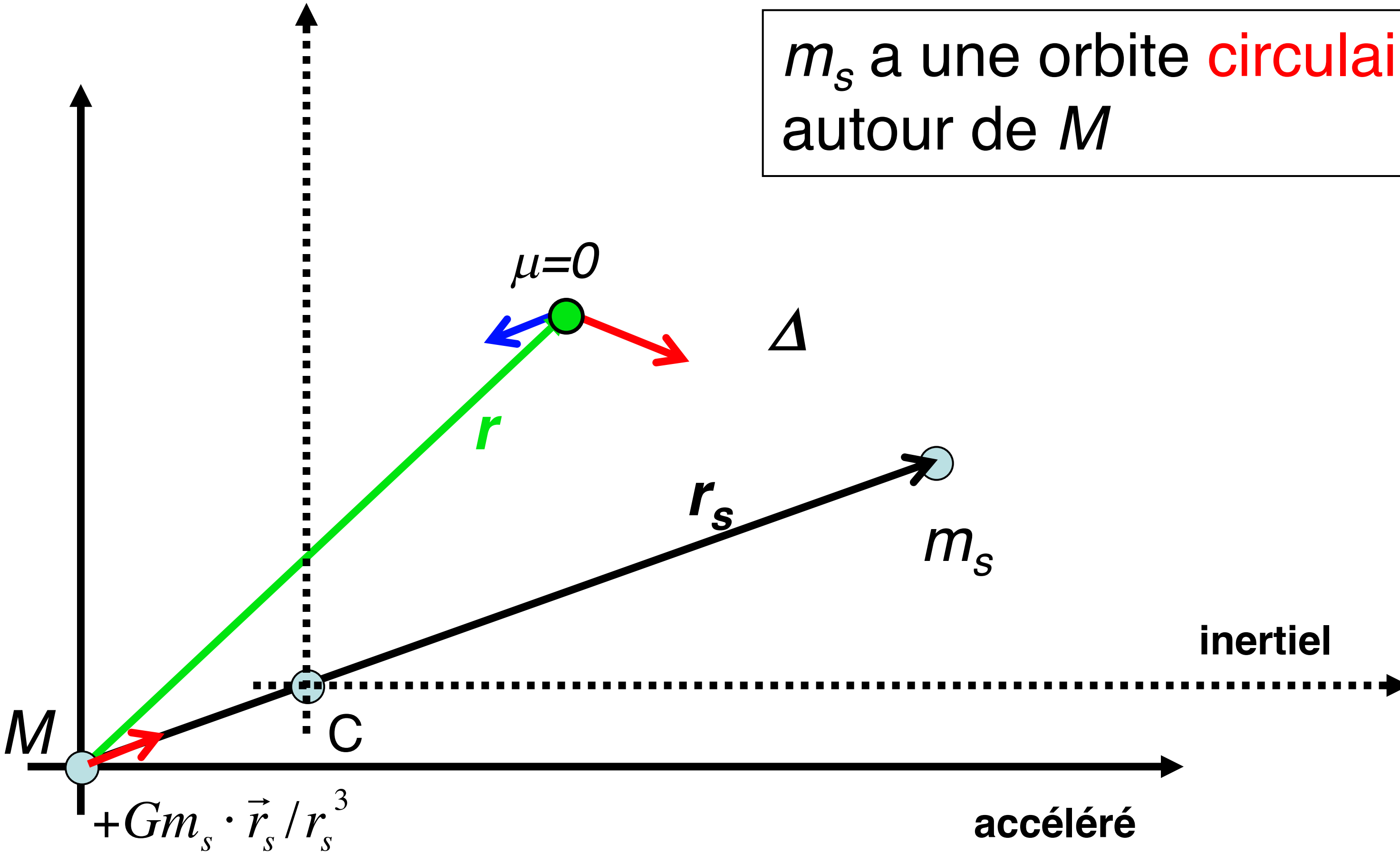
résonances de moyen mouvement:

cas restreint, plan, circulaire

traitement hamiltonien

m_s a une orbite circulaire autour de M



$$U = U_P + U_s = \boxed{-\frac{GM}{r}} \boxed{-Gm_s\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_s}{r_s^{\,3}}\right)}$$

non perturbé **perturbé**

$$U + U_s = \boxed{-\frac{GM}{r} - \ldots} + \boxed{e \cdot \frac{Gm_s}{a_s} A^{(m)}(\alpha).\cos(\Psi_L) + \ldots}$$

où: $\boxed{\Psi_L = (m+1)\lambda_s - m\lambda - \varpi}$ (angle critique de résonance de *Lindblad*)

$$U_{res} = e \cdot \varepsilon_s \cdot (a_s n_s)^2 A^{(m)}(\alpha).\cos(\Psi_L) \text{ où } \varepsilon_s = \frac{m_s}{M}$$

$A^{(m)}(\alpha)$ combinaison de coefficients de Laplace en $\alpha = \dfrac{a}{a_s}$

$$\boxed{\text{NB. } A^{(m)}(\alpha) \approx +0.8m \text{ pour } |m| \text{ grand}}$$

posons:

$$\boxed{\begin{cases} h = e \cdot \cos(\Psi_L) \\ k = e \cdot \sin(\Psi_L) \end{cases}}$$

que nous appellerons *vecteur excentricité.* Ce dernier contient toute l'information sur *l'amplitude* (e) et la *phase* (Ψ_L) de la réponse au forçage résonant

donc la question est: quel est l'effet de la résonance sur *(h,k)?*

près d'une résonance:

$$\dot{\Psi}_L = (m+1)n_s - mn - \dot{\varpi} \approx 0$$

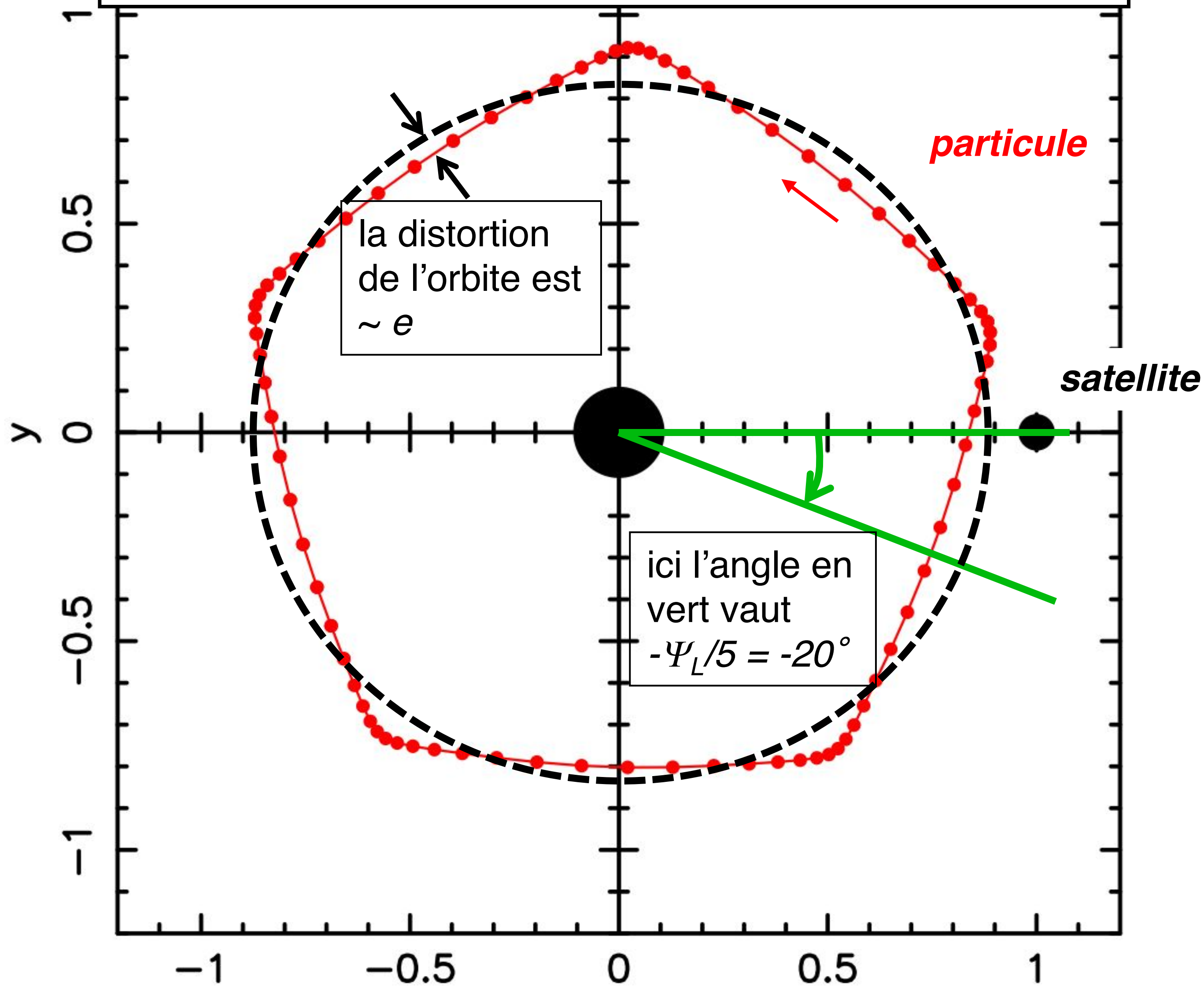
définissons:

$$\Delta n = (m+1)n_s - mn - \dot{\varpi} \approx (m+1)n_s - mn$$

comme la *distance* (en fréquence) à la résonance exacte

$$\Psi_L = (m+q)\lambda_s - m\lambda - q\varpi$$

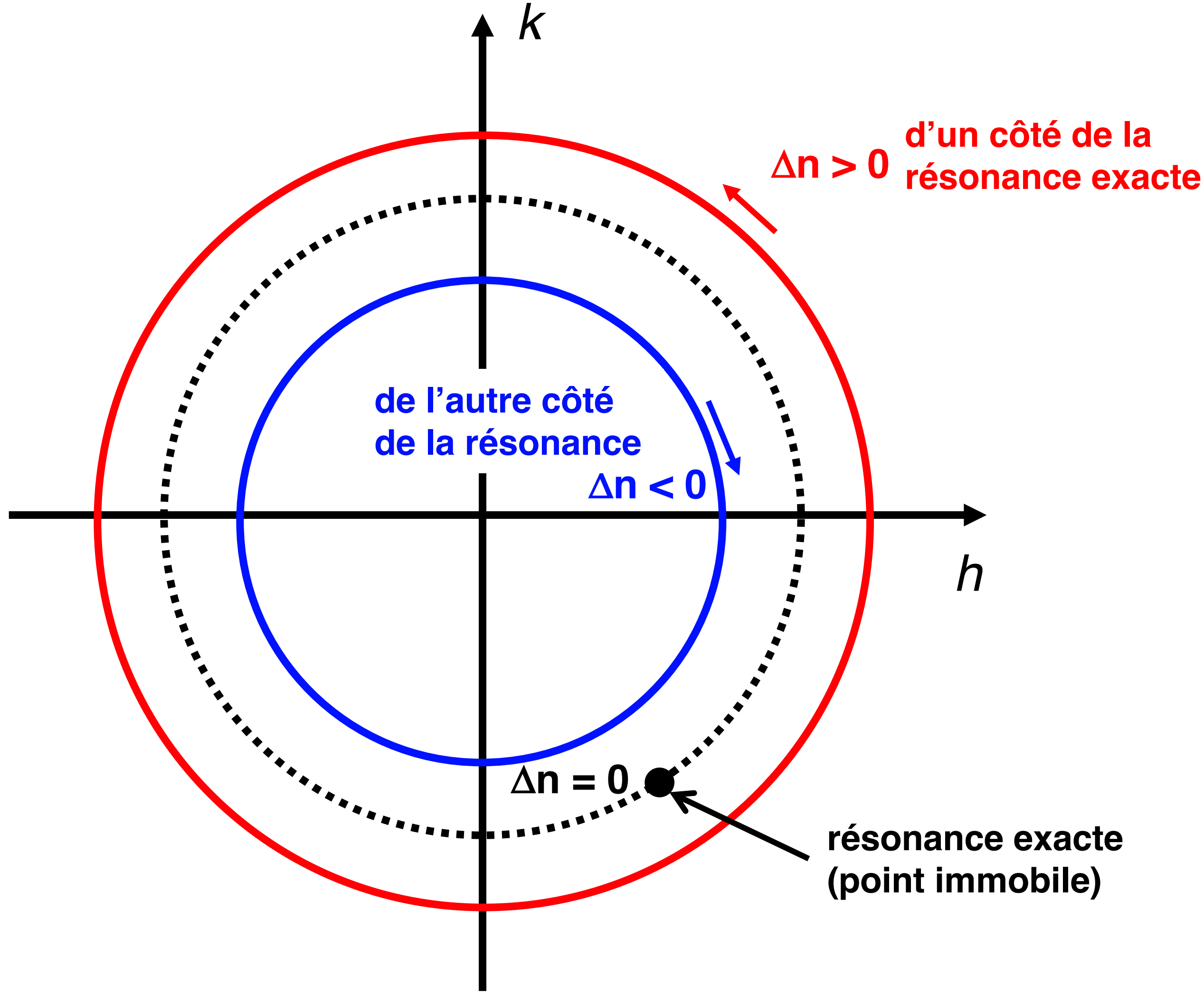
ici m = 4, q = 1, ϖ *= -100°* → Ψ_L *= +100°*



interprétation de l'angle critique de résonance de Lindblad

Ainsi, *en l'absence* de toute perturbation résonante ($m_s = 0$):
$e = cste$ et:

$$\begin{cases} \dot{h} = -\Delta n \cdot k \\ \dot{k} = +\Delta n \cdot h \end{cases}$$



on suppose (ou plutôt on espère) que près d'une résonance, seul le terme résonant est important…

différentes méthodes peuvent être utilisée,

dont le *formalisme hamiltonien*.

petit rappel sur la formalisme hamiltonien $\rightarrow$ voir

http://www.lesia.obspm.fr/perso/bruno-sicardy/ensei/m2_obs/

Hamiltonien $\mathcal{H}(p;q)$ dépendant de deux variables p et q dites "conjuguées"

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{q} &= +\frac{\partial H}{\partial p}\\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned}}$$

<u>exemple:</u>

$q = x$ (position); $p = mv$ (impulsion) →

$\mathcal{H} = U(x) + p^2/2m$

(NB. E= la valeur de la fonction $\mathcal{H}$ = énergie mécanique totale du système est une intégrale du mouvement)

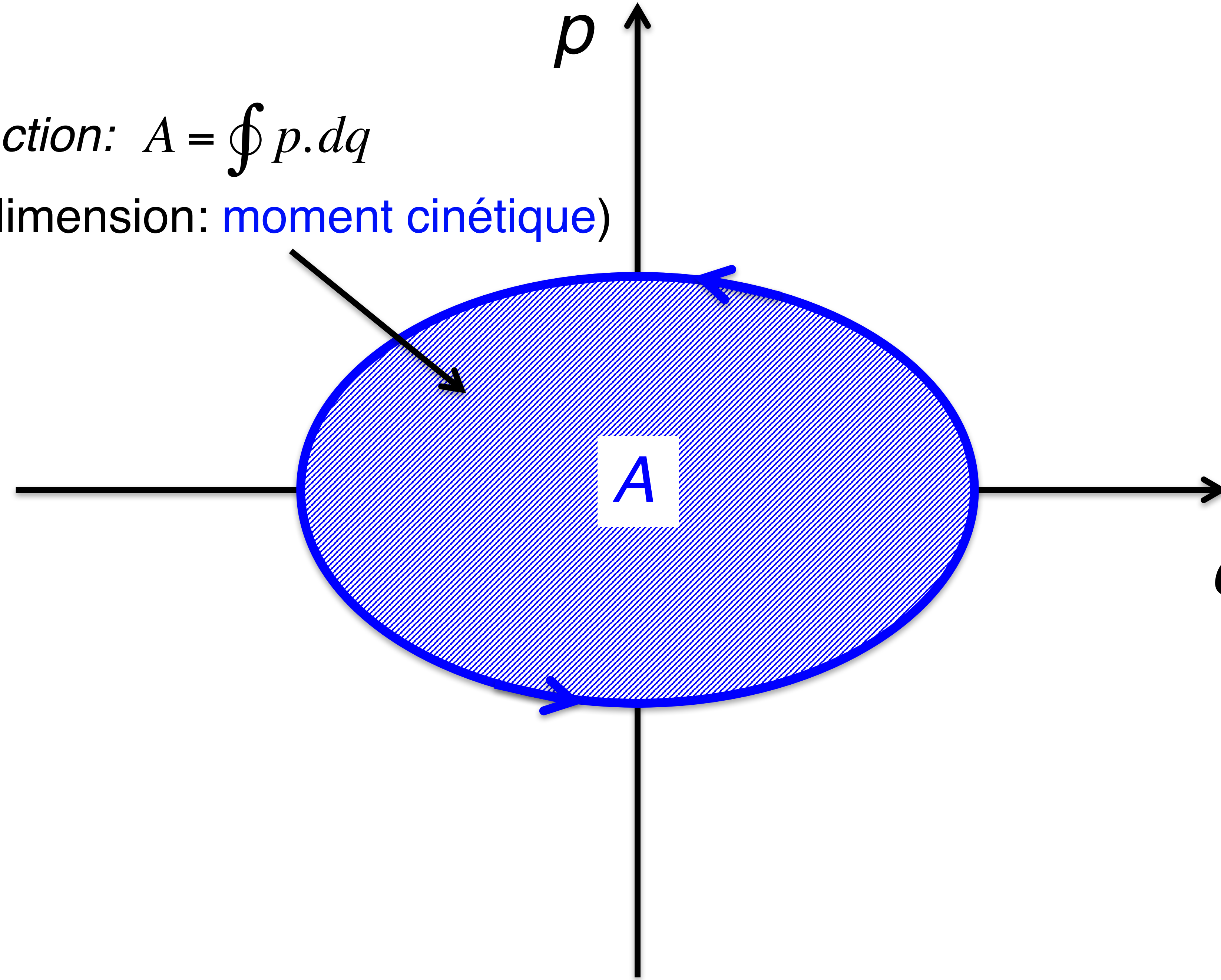
<u>autre exemple:</u>

$q = \theta$ (*angle*) ; $p = mr^2\, d\theta/dt$ (moment cinétique, une *action*) →

$\mathcal{H} = U(\theta) + J^2/2mr^2$

Action: $A = \oint p.dq$

(dimension: moment cinétique)



nombre de degrés de liberté d'un système hamiltonien =

nombre n de couples (q_i , p_i) décrivant le système:

$\mathcal{H}(q_1, q_2,\ldots q_n; p_1, p_2,\ldots p_n)$

si $\mathcal{H}(q;p)$ ne dépend pas explicitement du temps: on dit que le système hamiltonien est autonome, alors $\mathcal{H}$ = cste (conservation de l'énergie E)

si $\mathcal{H}(q;p, t)$ dépend explicitement du temps, l'énergie n'est pas conservée au cours du temps → système à $n+1/2$ degrés de liberté

théorème de Liouville: si le nombre d'intégrales premières indépendantes est égal au nombre de degrés de liberté du système →
le système est intégrable par quadrature

Donc: un système hamiltonien à un degré de liberté est toujours intégrable car nombre degré de liberté = nombre d'intégrale du mouvement (E)

Système hamiltonien à deux degrés de liberté: en général non intégrable, mais les surfaces de section de Poincaré permettent d'avoir une bonne idée de la topologie des solutions (portrait de phase):

→séparatrices, zones chaotiques, points fixes stables (elliptiques), instable (hyperboliques), résonances secondaires, etc…

par exemple: pour $\mathcal{H}(q_1, q_2; p_1, p_2)$ →
on porte (q_1, p_1) chaque fois que $p_2 = 0$, pour une valeur $\mathcal{H} = E$ *prescrite.*

(exercice: montrer que (q_1, p_1) définit alors une orbite unique)

Système hamiltonien à trois degrés de liberté: cela devient difficile…

Idée générale: essayer de ramener un système résonant à un seul degrés de liberté (intégrable) ou à défaut, à deux degrés de liberté (puis surface de section)

$\mathcal{H}(x,y,z;vx,vy,vz)$, ou mieux, $\mathcal{H}(a,e,i\,;M,\omega,\Omega)$

variables *actions* variables *angles*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} L = \sqrt{\mu a} & \leftrightarrow & M \\ G = \sqrt{\mu a(1-e^2)} & \leftrightarrow & \omega \\ H = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos(i) & \leftrightarrow & \Omega \end{array}}$$

variables de Delaunay
où $\mu=\mathcal{G}\mathcal{M}=a^3n^2$, $\mathcal{M}$ masse centrale
attention! ne pas confondre ω et ϖ

NB. si A est une variable d'action et ϕ est une variable d'angle, alors les équations du mouvement par le hamiltonien $\mathcal{H}(A;\phi)$ sont:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{A} = -\dfrac{\partial H}{\partial \phi} \\ \dot{\phi} = +\dfrac{\partial H}{\partial A} \end{cases}}$$

Noter que G et H sont respectivement le module et la composante verticale du moment cinétique de la particule.

Exercice: que représente L ?

exercice: montrer que si A et ϕ sont des variables action-angle conjuguées, alors X et Y:

$$X = \sqrt{2A} \cdot \cos(\phi)$$
$$Y = \sqrt{2A} \cdot \sin(\phi)$$

sont aussi des variables conjuguées, avec:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\dfrac{\partial H}{\partial Y} \\ \dot{Y} = +\dfrac{\partial H}{\partial X} \end{cases}$$

par le même hamiltonien $\mathcal{H}(X;Y)$, où A et ϕ sont remplacés par leurs valeurs correspondantes en X et Y dans $\mathcal{H}(A;\phi)$

ici, en prenant: $\mathcal{H} = -\dfrac{\mu}{2a}$ comme hamiltonien du système (énergie de la particule)

alors: $\mathcal{H} = -\dfrac{\mu^2}{2L^2}$ et: $n = \dot{M} = +\dfrac{\partial H}{\partial L} = \dfrac{\mu^2}{2L^3} = \dfrac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$

soit: $n^2 a^3 = GM$ on retrouve bien la 3ème loi de Kepler, tant mieux…

et aussi:

$$\dot{L} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M} = 0$$ (*a* constant)

$$\dot{G} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} = 0$$ (*e* constant)

$$\dot{H} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Omega} = 0$$ (*i* constant)

plus:

$$\dot{\omega} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} = 0$$ (ω constant)

$$\dot{\Omega} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} = 0$$ (Ω constant)

ceci paraît laborieux pour un résultat déjà connu depuis longtemps…

NB. on peut choisir d'autres couples de variables action-angle plus adaptés. Une condition suffisante pour qu'elles soit conjuguées (ie que la transformation soit canonique) étant:

$$\boxed{A d\alpha + B d\beta + C d\gamma = L dM + G d\omega + H d\Omega}$$

par exemple, les *variables de Poincaré:*

$$\boxed{\begin{array}{lcc} \Lambda = \sqrt{\mu a} & \leftrightarrow & \lambda = M + \varpi \\ \Gamma = \sqrt{\mu a}\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right) & \leftrightarrow & -\varpi \\ Z = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}\left[1 - \cos(i)\right] & \leftrightarrow & -\Omega \end{array}}$$

… bien adaptées au cas où *e* et *i* sont petits

Considérons le problème général (non restreint) à trois corps plan (un corps central, deux satellites de masse μ et μ') :

$$\mathcal{H} = -\frac{GM\mu}{2a} - \frac{GM\mu'}{2a'} + G\mu\mu' A e \cos(\Psi_L) + G\mu\mu' A' e' \cos(\Psi_c)$$

où les deux angles critiques de résonances sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Psi_L = &\quad (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi \\ \Psi_c = &\quad (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi' \end{aligned}$$

Utilisons les variables de Poincaré :

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \longleftrightarrow & \Lambda = \mu\sqrt{GMa} \\ -\varpi & \longleftrightarrow & \Gamma = \mu\sqrt{GMa}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) \\ \lambda' & \longleftrightarrow & \Lambda' = \mu'\sqrt{GMa} \\ -\varpi' & \longleftrightarrow & \Gamma' = \mu'\sqrt{GMa}\left(1-\sqrt{1-e'^2}\right) \end{array}$$

Soit un système à quatre degrés de liberté. Noter la symétrie du problème vis-à-vis de μ et μ' (et donc de Ψ_L, Ψ_c)

alors :

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^3(GM)^2}{2\Lambda^2} - \frac{\mu'^3(GM)^2}{2\Lambda'^2} + G\mu\mu' Ae\cos(\Psi_L) + G\mu\mu' A'e'\cos(\Psi_c)$$

$$\dot{\Lambda}' = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda'} \quad \text{et donc} \quad \mu'\frac{d}{dt}\left(\sqrt{GMa'}\right) = \mu\mu'...$$

$$\dot{\Gamma}' = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varpi'} \quad \text{et donc} \quad \mu'\frac{d}{dt} = \left(\sqrt{GMa'\left(1-\sqrt{1-e'^2}\right)}\right)\mu\mu'...$$

Considérons le problème restreint ($\mu = 0$)

Alors $a' =$ cste, $e' =$ cste, soit $\Lambda' =$ cste, $\Gamma' =$ cste, normal...

et on peut ignorer le terme constant (en bleu) dans le hamiltonien $\mathcal{H}$

On peut également renormaliser $\mathcal{H}$ en le divisant par μ, et en divisant également Λ et Γ par μ, soit ...

$$\mathcal{H} = -\frac{(GM)^2}{2\Lambda^2} + G\mu' A e \cos(\Psi_L) + G\mu' A' e' \cos(\Psi_c)$$

Noter l'asymétrie du problème, Ψ_L (résonance de Lindblad) et Ψ_c (résonance de corotation) ont des rôles différents.

Utilisons les variables de Poincaré :

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \longleftrightarrow & \Lambda = \sqrt{GMa} \\ -\varpi & \longleftrightarrow & \Gamma = \Lambda\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) \sim e^2\Lambda/2 \ (\text{pour } e \ll 1) \end{array}$$

soit un système à deux degrés de liberté

on a alors envie de prendre comme variables Ψ_L et Ψ_c
(plus adaptées que λ, ϖ, λ' et ϖ')

Il reste un problème : $\mathcal{H}$ n'est pas autonome, car λ' et ϖ' dépendent linéairement du temps (ce sont en fait des mesures du temps)

Simplifions le problème : prenons $e' = 0$ (problème à trois corps restreint circulaire) et purement keplerien : $d(\varpi')/dt = 0$ (pas de précession)

Alors, on obtient le Hamiltonien d'une résonance de Lindblad pure, en ajoutant le terme $n'\Lambda'$ au hamiltonien $\mathcal{H}$ ci-dessus. Ceci assure que $d\lambda'/dt = \partial\mathcal{H}/\partial\Lambda' = n'$, soit donc

$$\mathcal{H} = -\frac{(GM)^2}{2\Lambda^2} + G\mu' Ae\cos(\Psi_L) + n'\Lambda'$$

on peut poser formellement (en supposant $e \ll 1$) :

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \longleftrightarrow & \Lambda = \sqrt{GMa} \\ -\varpi & \longleftrightarrow & \Gamma = e^2\Lambda/2 \\ \lambda' & \longleftrightarrow & \Lambda' \\ -\varpi' & \longleftrightarrow & \Gamma' \end{array}$$

et en prenant comme nouvelles variables λ, λ', Ψ_L, Ψ_c...

de la condition de canonicité :

$$\Lambda d\lambda - \Gamma d\varpi + \Lambda' d\lambda' - \Gamma' d\varpi' = J d\lambda + J' d\lambda' + \Phi_L d\Psi_L + \Phi_c d\Psi_c$$

on tire

$$\begin{array}{ccc}
\lambda & \longleftrightarrow & J = \Lambda + m(\Gamma + \Gamma') \\
\lambda' & \longleftrightarrow & J' = \Lambda' - (m+1)(\Gamma + \Gamma') \\
\Psi_L & \longleftrightarrow & \Phi_L = \Gamma \\
\Psi_c & \longleftrightarrow & \Phi_c = \Gamma'
\end{array}$$

soit :

$$\Lambda = J - m(\Phi_L + \Phi_c)$$

$$\Lambda' = J + (m+1)(\Phi_L + \Phi_c)$$

$$\Gamma = \Phi_L$$

$$\Gamma' = \Phi_c$$

et finalement...

$$\mathcal{H} = -\frac{(GM)^2}{2\Lambda^2(J,\Phi_L,\Phi_c)} + G\mu' A e \cos(\Psi_L) + n' \left[J + (m+1)(\Phi_L + \Phi_c)\right]$$

mais $\Gamma \sim e^2\Lambda/2$, donc :

$$\mathcal{H} = -\frac{(GM)^2}{2\Lambda^2(J,\Phi_L,\Phi_c)} + G\mu' A \sqrt{\frac{2\Phi_L}{\Lambda}} \cos(\Psi_L) + n' \left[J + (m+1)(\Phi_L + \Phi_c)\right]$$

Ψ_L et Φ_L étant des variables angle-action conjuguées, les variables :

$$h = \sqrt{2\Phi_L}\cos(\Psi_L) \sim (GMa)^{1/4} e\cos(\Psi_L) = (a_0\sqrt{n_0}) e\cos(\Psi_L)$$

$$k = \sqrt{2\Phi_L}\sin(\Psi_L) \sim (GMa)^{1/4} e\sin(\Psi_L) = (a_0\sqrt{n_0}) e\sin(\Psi_L)$$

sont aussi conjuguées $\rightarrow$ (h,k) est appelé le vecteur excentricité,

Noter que $\Phi_L = \dfrac{h^2+k^2}{2}$ et donc...

$$\mathcal{H}[(\lambda, J); (\lambda', J'); (h, k); (\Psi_c, \Phi_c)] = \quad -\frac{(GM)^2}{2\Lambda^2(J,\Phi_L,\Phi_c)} + \left(\frac{G\mu' A}{\Lambda}\right) h +$$

$$n'\left[J + (m+1)\left(\frac{h^2+k^2}{2} + \Phi_c\right)\right]$$

système à quatre degrés de liberté

Mais $\mathcal{H}$ ne dépend pas de $\lambda, \lambda', \Phi_c \rightarrow J, J', \Phi_c =$ constantes $\rightarrow$

le système se réduit à un degré de liberté $\rightarrow$ il est intégrable !

comme les actions Φ_c et $J = \Lambda + m(\Phi_L + \Phi_c)$ sont constantes,

$$J_c = \Lambda + m\Phi_L = \Lambda + m\Gamma$$

est aussi constante. On l'appelle constante de Jacobi

Interprétation physique : la constante de Jacobi est l'énergie de la particule vue dans le repère tournant à la vitesse angulaire n' du perturbateur !

en reprenant les expressions de $\Lambda = \sqrt{GMa}$ et $\Gamma \sim e^2\Lambda/2$, et en développant autour du rayon de résonance a_0, on obtient :

$$J_c \sim \frac{a_0^2 n_0}{2}\left[2 + \frac{\Delta a}{a_0} + me^2\right] = \text{ constante}$$

où $\Delta a = a - a_0$ est l'écart de a par rapport à la résonance exacte, a_0.

On voit donc que $\Delta a/a_0 + me^2 =$ constante, et que les variations de a sont du second ordre en e :

$$\frac{\delta a}{a_0} \sim -2me\delta e$$

Comme $e \ll 1$, on peut négliger les variations de a par rapport à celles de e, et en particulier, négliger les variations de Λ par rapport à celles de (h, k), soit :

$$\mathcal{H}(h,k) = -\frac{(GM)^2}{2\Lambda^2(J, \Phi_L, \Phi_c)} + \left(\frac{G\mu' A}{\sqrt{\Lambda_0}}\right) h + n'(m+1)\left(\frac{h^2+k^2}{2}\right)$$

et...

$$\dot{h} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k}$$

$$\dot{k} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h}$$

On obtient alors (exercice !)

$$\dot{h} = -\Delta n \cdot k$$

$$\dot{k} = +\Delta n \cdot h + a_0^2 A n_0^{3/2} \left(\frac{\mu'}{M}\right)$$

où $\Delta n = (m+1)n' - mn$ est une mesure de la distance à la résonance. Comme a_0 et n_0 sont des constantes, on définit souvent le vecteur excentricité plus simplement comme :

$$h = e\cos(\Psi_L)$$

$$k = e\sin(\Psi_L) \quad \text{et...}$$

...les équations du mouvement sont alors :

$$\begin{aligned}\dot{h} = &\quad -\Delta n \cdot k \\ \dot{k} = &\quad +\Delta n \cdot h + (a_0 A) n_0 \left(\frac{\mu'}{M}\right)\end{aligned}$$

Notes :

• $(a_0 A)$ est un coefficient sans dimension, dépendant de coefficients de Laplace et de l'ordre de m.

• En utilisant la 3ème loi de Kepler, on obtient

$$\Delta n = (m+1)n' - mn = -mn\frac{3\Delta a}{2a_0}$$

Donc le terme $\Delta n \propto J_c - me^2 = J_c - m(h^2 + k^2)$ contient la non-linéarité qui fait que le système ci-dessus ne représente pas un oscillateur harmonique.

Nous avons vu que $\Delta a/a_0 + me^2 =$ constante (conservation Jacobi)

d'autre part nous avons défini $\Delta n = (m+1)n' - mn$ (distance à la résonance exacte)

en utilisant la 3ème loi de Kepler : $3\frac{\delta a}{a_0} + 2\frac{\delta n}{n_0} = 0$

on obtient

$$2\Delta n + 3m^2 n_0 e^2 = \text{ constante de Jacobi } J_c$$

(NB. même quantité que précédemment mais notation différente !)

en notant $\epsilon' = (a_0 A) n_0 (\mu'/M)$

et on obtient enfin...

$$\begin{cases} \dot{h} = & -\Delta n \cdot k \\ \dot{k} = & +\Delta n \cdot h + \epsilon' n_0 \\ \text{avec } J_c = & 2\Delta n + 3m^2 n e^2 = \text{ constante} \end{cases}$$

qui décrit un système à un degré de liberté, donc intégrable

NB. le portrait de phase des solutions est donc paramétrisé par la valeur de la constante de Jacobi J_c :

à chaque valeur, un portrait de phase différent

$\rightarrow$ comment retrouver les portaits de phase ?

On peut montrer (exercice) que le système ci-dessus admet l'intégrale :

$$K = e^4 - \frac{2J_c}{3m^2 n_0} e^2 - \frac{8\epsilon'}{3m^2} \cdot h$$

calcul des trajectoires compliqué, mais interprétation géométrique simple :

$$e^4 - \frac{2J_c}{3m^2 n_0} e^2 = K - \frac{8\epsilon'}{3m^2} \cdot h$$

dont la solution est la projection dans le plan (h, k) de deux surfaces S_1 et S_2 dans l'espace (h, k, z), où :

$$
\begin{cases}
z(h,k) = & e^4 - \frac{2J_c}{3m^2 n_0} e^2 \rightarrow \text{ surface } S_1 \\
\\
z(h,k) = & K - \frac{8\epsilon'}{3m^2} \cdot h \rightarrow \text{ surface } S_2 \\
\\
\end{cases}
$$

surface S_1 : “bol” ou “chapeau mexicain” selon signe de J_c
surface S_2 : plan parallèle à l'axe Ok

En résumé : à chaque valeur de J_c correspond une famille de solutions (un portrait de phase), chaque solution étant associée à une valeur de K.