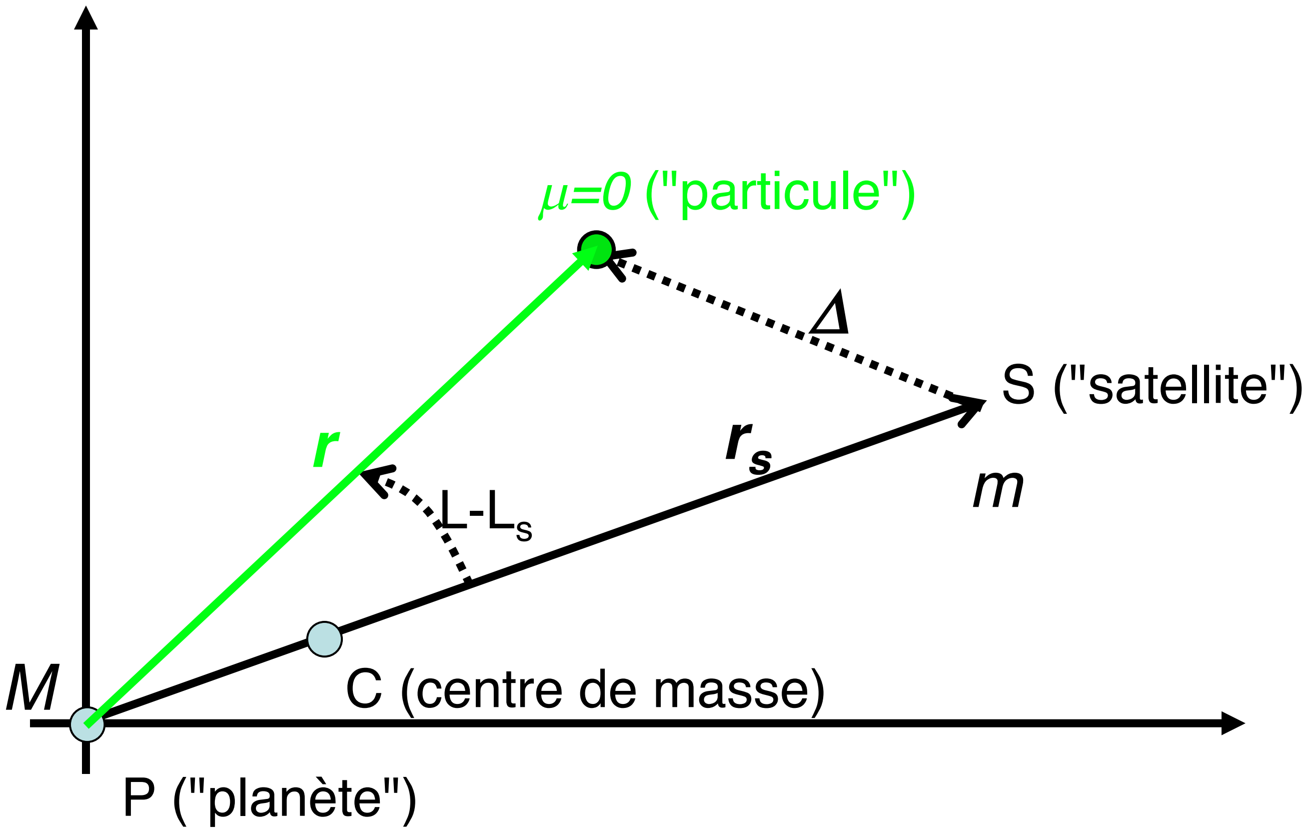
développement du potentiel perturbateur

problème képlérien (deux corps ponctuels):

tous les éléments orbitaux, $a, e, i, \omega, \Omega$ (donc sauf $M$), sont constants → plus simple que $(x,v_x)$, $(y,v_y)$, $(z,v_z)$ !

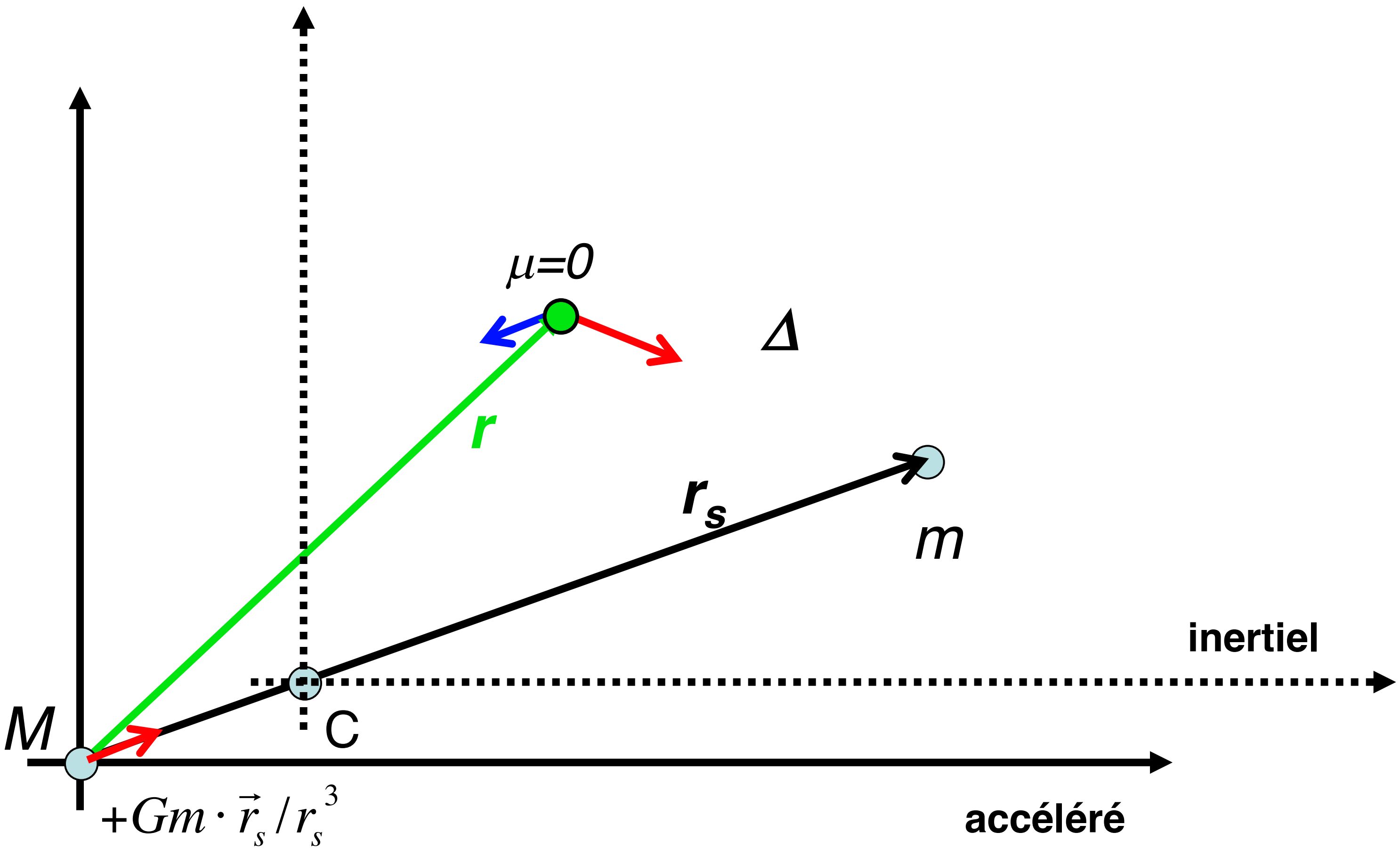
problème perturbé: exprimer la perturbation en terme des éléments orbitaux et l'injecter dans le hamiltonien du système, en particulier près d'une résonance

pour commencer: on suppose que $e$ (et/ou $i$) sont petits → on développe le potentiel perturbateur en puissances de ces petites quantités, et on espère que cela marche…




Le problème le plus simple après le problème à deux corps:
*"le problème à trois corps restreint, plan et circulaire"*

- restreint: $\mu = 0$
- plan: M, m et $\mu$ se déplacent dans le même plan
- circulaire: *m* se déplace sur une orbite circulaire




perturbation directe: $-Gm\dfrac{\vec{\Delta}}{\Delta^3}$ ; potentiel perturbateur direct: $-\dfrac{Gm}{\Delta}$

perturbation indirecte: $-Gm\dfrac{\vec{r}_s}{r_s^3}$ ; potentiel perturbateur indirect: $+Gm\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{r}_s}{r_s^3}$

**potentiel central de la planète (→ mouvement képlerien)**

**potentiel perturbateur dû au satellite**

$$U = U_P + U_s$$

$$= -\frac{GM}{r} \boxed{- Gm\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_s}{r_s^{\,3}}\right)}$$

**potentiel perturbateur direct**

**potentiel perturbateur indirect**
**(référentiel lié à *P non* galiléen)**

idée: développer $U_s$ en fonction des éléments orbitaux de la particule, $a$, $e$, $L$, $\varpi$, etc… + les éléments orbitaux du satellite.

coordonnées polaires:

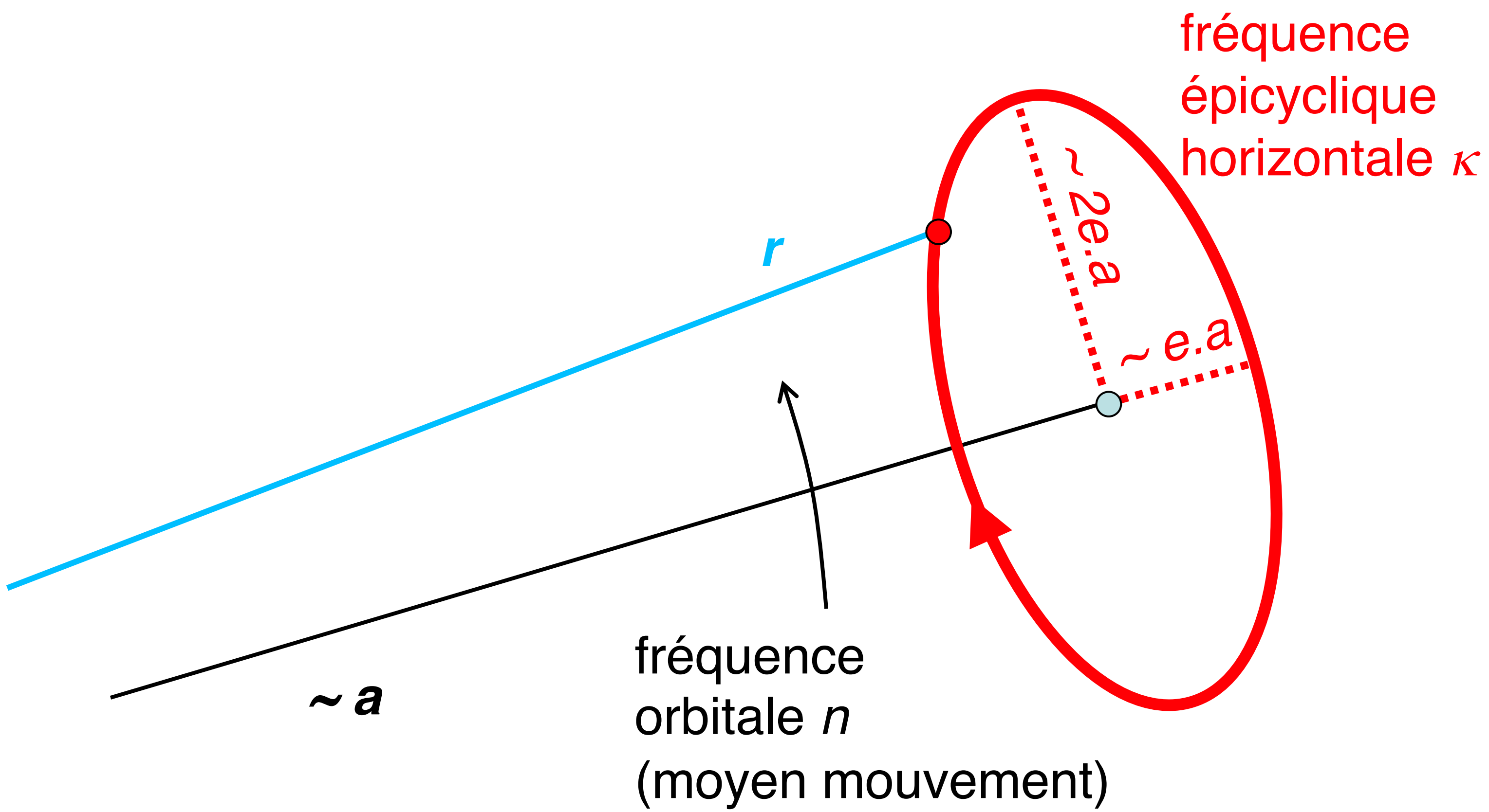
$$\vec{r}\left|\begin{array}{l} r \\ L \end{array}\right. \qquad \vec{r}_s\left|\begin{array}{l} r_s \\ L_s = \lambda_s \end{array}\right.$$ (car orbite satellite circulaire ici)

$$\Delta^{-1} = \left(r^2 + r_s{}^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}_s\right)^{-1/2}$$

au premier ordre en $e$ (mouvement épicyclique):

$$r = a\cdot\left[1 - e\cdot\cos M\right] = a\cdot\left[1 - e\cdot\cos(\lambda - \varpi)\right] + O(e^2)$$

$$L = \lambda + 2e\cdot\sin M = \lambda + 2e\cdot\sin(\lambda - \varpi) + O(e^2)$$




NB.: pour un mouvement *keplerien* (pas vrai en général), on a $n = \kappa$ (i.e. orbite fermée) après calculs…

$$r^2 + r_s^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}_s = \boxed{a^2 + a_s^2 - 2a\cdot a_s\cos(\lambda-\lambda_s)}$$

$$-e\cdot\left[2a^2\cos(\lambda-\varpi) + a\cdot a_s\cos(2\lambda-\lambda_s-\varpi) - 3a\cdot a_s\cos(\lambda_s-\varpi)\right]$$

soit:

$$\boxed{\Delta_0^2 = a^2 + a_s^2 - 2a\cdot a_s\cos(\lambda-\lambda_s)}$$

à l'ordre zéro en *e:*

$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{\left[a^2 + a_s^2 - 2a\cdot a_s\cos(\lambda-\lambda_s)\right]^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{a_s\cdot\left[1+\alpha^2 - 2\alpha\cos(\lambda-\lambda_s)\right]^{1/2}}$$

on utilise la *définition* des coefficients de Laplace, $b_\gamma^{(m)}$ :

$$\boxed{\frac{1}{\left[1+\alpha^2-2\alpha\cos(\theta)\right]^\gamma} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_\gamma^{(m)}(\alpha)\cdot\cos(m\theta)}$$

ou de manière équivalente:

$$\boxed{b_\gamma^{(m)}(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(m\theta)\cdot d\theta}{\left[1+\alpha^2-2\alpha\cos(\theta)\right]^\gamma}}$$

$$b_\gamma^{(m)}(\alpha) = b_\gamma^{(-m)}(\alpha) = \left(1/\alpha^{2\gamma}\right)\cdot b_\gamma^{(m)}\left(1/\alpha\right)$$

quelques relations entre les coefficients de Laplace:

$$b_\gamma^{(m)} = \frac{\gamma\alpha}{m}\left[b_{\gamma+1}^{(m-1)} - b_{\gamma+1}^{(m+1)}\right]$$

$$\frac{db_\gamma^{(m)}}{d\alpha} = \gamma\left[b_{\gamma+1}^{(m+1)} + b_{\gamma+1}^{(m-1)} - 2\alpha\cdot b_{\gamma+1}^{(m)}\right]$$

$$b_\gamma^{(m)} = (1+\alpha^2)b_{\gamma+1}^{(m)} - \alpha\cdot\left[b_{\gamma+1}^{(m+1)} + b_{\gamma+1}^{(m-1)}\right]$$

en notant: $A_0 = 1+\alpha^2-2\alpha\cos(\lambda-\lambda_s)$ on obtient…

… au premier ordre en excentricité *e:*

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{a_s\cdot\left\{A_0-e\cdot\left[2\alpha^2\cos(\lambda-\varpi)+\alpha\cos(2\lambda-\lambda_2-\varpi)-3\alpha\cos(\lambda_S-\varpi)\right]\right\}^{1/2}}$$

$$=\frac{1}{a_s}\cdot\left\{\frac{1}{A_0^{1/2}}+\frac{e}{A_0^{3/2}}\cdot\left[\alpha^2\cos(\lambda-\varpi)+(\alpha/2)\cos(2\lambda-\lambda_s-\varpi)-(3\alpha/2)\cos(\lambda_S-\varpi)\right]\right\}$$

mais: $$\frac{1}{A_0^{\gamma}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{m=-\infty}^{+\infty}b_{\gamma}^{(m)}(\alpha)\cdot\cos\left[m\left(\lambda-\lambda_s\right)\right]$$

en linéarisant: $$2\cos(\alpha)\cos(\beta)=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$\boxed{\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{a_s}\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}b_{1/2}^{(m)}(\alpha).\cos[m(\lambda-\lambda_s)]+e\,.\sum_{m=-\infty}^{+\infty}E^{(m)}(\alpha).\cos[(m+1)\lambda_s-m\lambda-\varpi]\right\}}$$

où $E^{(m)}(\alpha)$ est une combinaison de coefficients de Laplace

$$\boxed{U(\theta, r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_m(r)\cos(m\theta) \quad \text{où} \quad \theta = L - L_s}$$

développement au 1er ordre en excentricité:

$$r = a[1 - e\cos(M)] = a[1 - e\cos(\lambda - \varpi)]$$

$$L = \lambda + 2e\sin(\lambda - \varpi)$$

$$\boxed{\begin{aligned} U(\theta, r) = & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_m(a)\cos[m(\lambda - \lambda_s)] \\ & -e \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(a)\cos[(m+1)\lambda_s - m\lambda - \varpi] \end{aligned}}$$

où $$A_m(a) = \left[2(m+1) + a\frac{d}{da}\right] U_{m+1}(a)$$

le potentiel perturbateur est de la forme:

$$-\frac{Gm}{\Delta} = -\frac{Gm}{\Delta_0} - \ldots - e \cdot \frac{Gm}{a_s} E^{(m)}(\alpha).\cos(\Psi_L) + \ldots$$

où:

$$\boxed{\Psi_L = (m+1)\lambda_s - m\lambda - \varpi}$$

est l'angle critique de résonance de Lindblad (horizontal). Une résonance se produit autour de la configuration où:

$$\dot{\Psi}_L \approx 0$$

conduisant au problème d'un petit diviseur lors de l'intégration de la perturbation:

$$\frac{\sin(\Psi_L)}{\dot{\Psi}_L}$$

donc:

$$-\frac{Gm}{\Delta} = -\frac{Gm}{\Delta_0} - \ldots \boxed{+ e \cdot \frac{Gm}{a_s} E^{(m)}(\alpha).\cos(\Psi_L)} + \ldots$$

on *admet* que seul ce terme est important dans le potentiel, i.e. que les autres termes varient suffisamment rapidement pour que leur moyenne s'annule.

Ceci n'est pas toujours vrai (problème de superposition de résonances proches) interprétation physique de: $\dot{\Psi}_L \approx 0$

$$(m+1)n_s - mn - \dot{\varpi} \approx 0$$

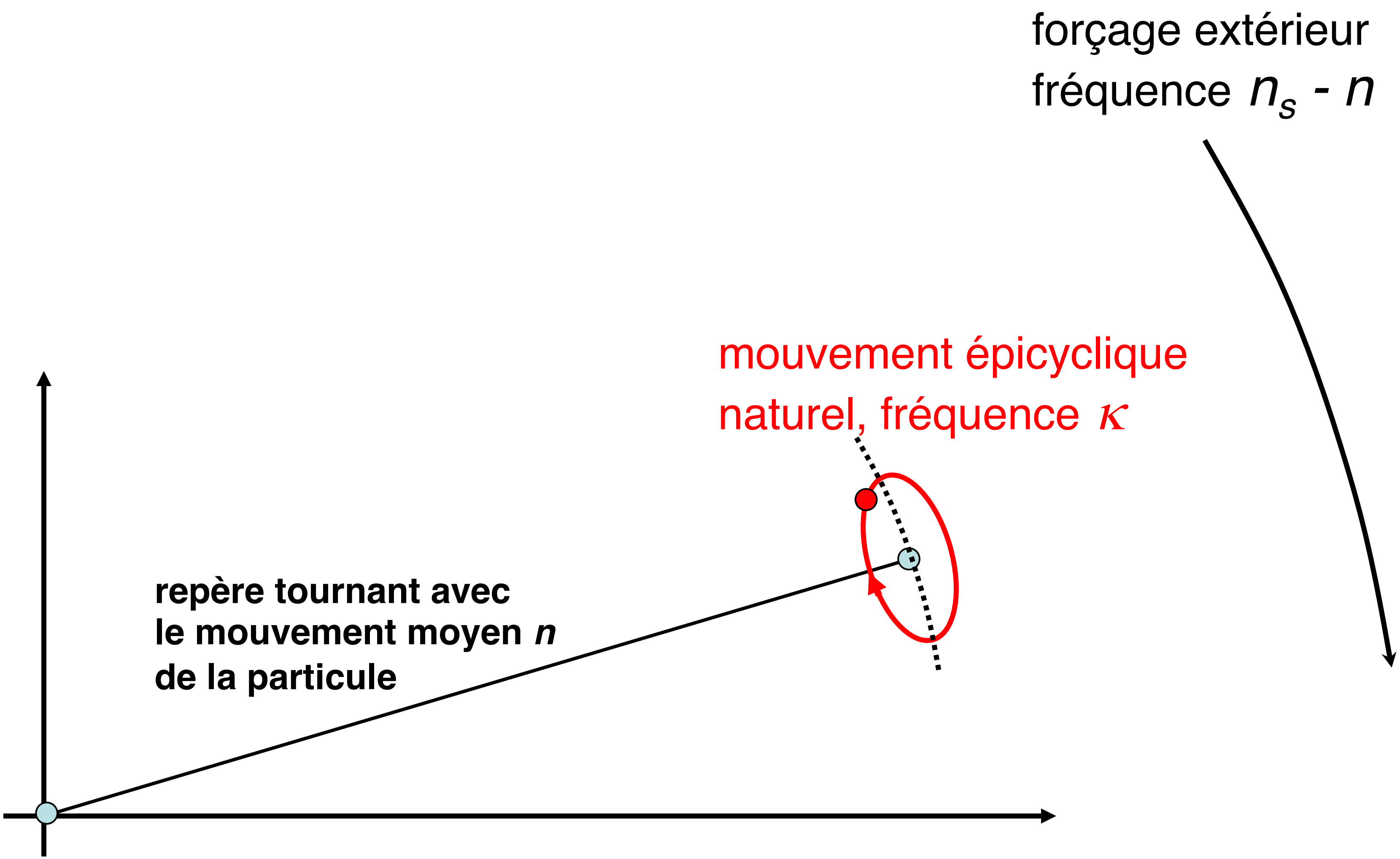
mais: $\dot{\varpi} \approx n - \kappa$ soit: $\kappa \approx (m+1)(n - n_s)$

de la forme: $\boxed{\kappa \approx p \cdot (n_s - n)}$ NB. *p entier* > 0 ou < 0

fréquence propre (horizontale) de la particule

l'une des harmoniques de la fréquence de forçage extérieure

la condition écrite ci-dessus définit les résonances dites "de Lindblad"




perturbation $\propto \sum_{-\infty}^{+\infty} \exp[ip(n_s - n)t]$

résonance: $\boxed{\kappa = p(n_s - n)}$

comme $\kappa \sim n$ (spécifique au mouvement keplerien, dégénéré)

$$\kappa = p(n_s - n)$$

où $p$ entier >0 ou <0

est équivalent à:

$$n = \frac{p}{p+1} n_s, \quad n = \frac{p}{p-1} n_s, \quad n = \frac{p+1}{p} n_s, \quad n = \frac{p-1}{p} n_s$$

selon que $\left|\frac{p}{p+1}\right|$ > 1 ou <1, résonance interne ou externe

## Les règles de d'Alembert

les termes que nous venons de voir sont plus généralement de la forme:

$$e^{|q|} \cdot \cos\left[(m+q)\lambda_s - m\lambda - q\varpi\right]$$

excentricité de la particule

*|q|* : ordre de la résonance

ceci assure:

✓ l'invariance par rotation du problème: *m+q-m-q=0*

✓ la décroissance exponentielle de l'intensité de la résonance avec l'ordre *|q|*

de manière encore plus générale,quand on autorise une excentricité orbitale pour le perturbateur (problème *non* circulaire) les termes sont de la forme:

$$e^{|q|}e_s^{|q'|}\cdot\cos\left[(m+q+q')\lambda_s-m\lambda-q\varpi-q'\varpi_s\right]$$

de même, au plus bas ordre en $i$ et $i_s$:

$$-\frac{Gm}{\Delta} = -\frac{Gm}{\Delta_0} - \ldots$$

$$-i^2 \cdot \frac{Gm}{a_s} I_{PV}{}^{(m)}(\alpha).\cos\{2[(m+1)\lambda_s - m\lambda - \Omega]\}$$

$$-ii_s \cdot \frac{Gm}{a_s} I_{LV}{}^{(m)}(\alpha).\cos\{2[(m+1)\lambda_s - m\lambda] - \Omega - \Omega_s\}$$

$$-i_s{}^2 \cdot \frac{Gm}{a_s} I_{CV}{}^{(m)}(\alpha).\cos\{2[(m+1)\lambda_s - m\lambda - \Omega_s]\}..$$

exercice: pourquoi les résonances liées aux inclinaisons sont-elles d'ordre pair?

où on note:

$$\Psi_{PV} = 2[(m+1)\lambda_s - m\lambda - \Omega]$$ résonance paramétrique verticale

$$\Psi_{LV} = 2[(m+1)\lambda_s - m\lambda] - \Omega - \Omega_s$$ résonance de Lindblad verticale

$$\Psi_{CV} = 2[(m+1)\lambda_s - m\lambda - \Omega_s]$$ résonance de corotation verticale

par ex.:

$$\dot{\Psi}_{LV} \approx 0 \Leftrightarrow \nu \approx (m+1)(n - n_s) + \dot{\Omega}_s$$

i.e. la fréquence propre verticale de la particule est proche de l'une des fréquences verticales causées par le perturbateur

Jean le Rond d'Alembert
(1717-1783)