le mouvement képlérien

but général de ce chapitre

- décrire les orbites képlériennes avec des paramètres adaptés aux équations perturbatives qui seront ultérieurement utilisées pour les résonances (entre autres)

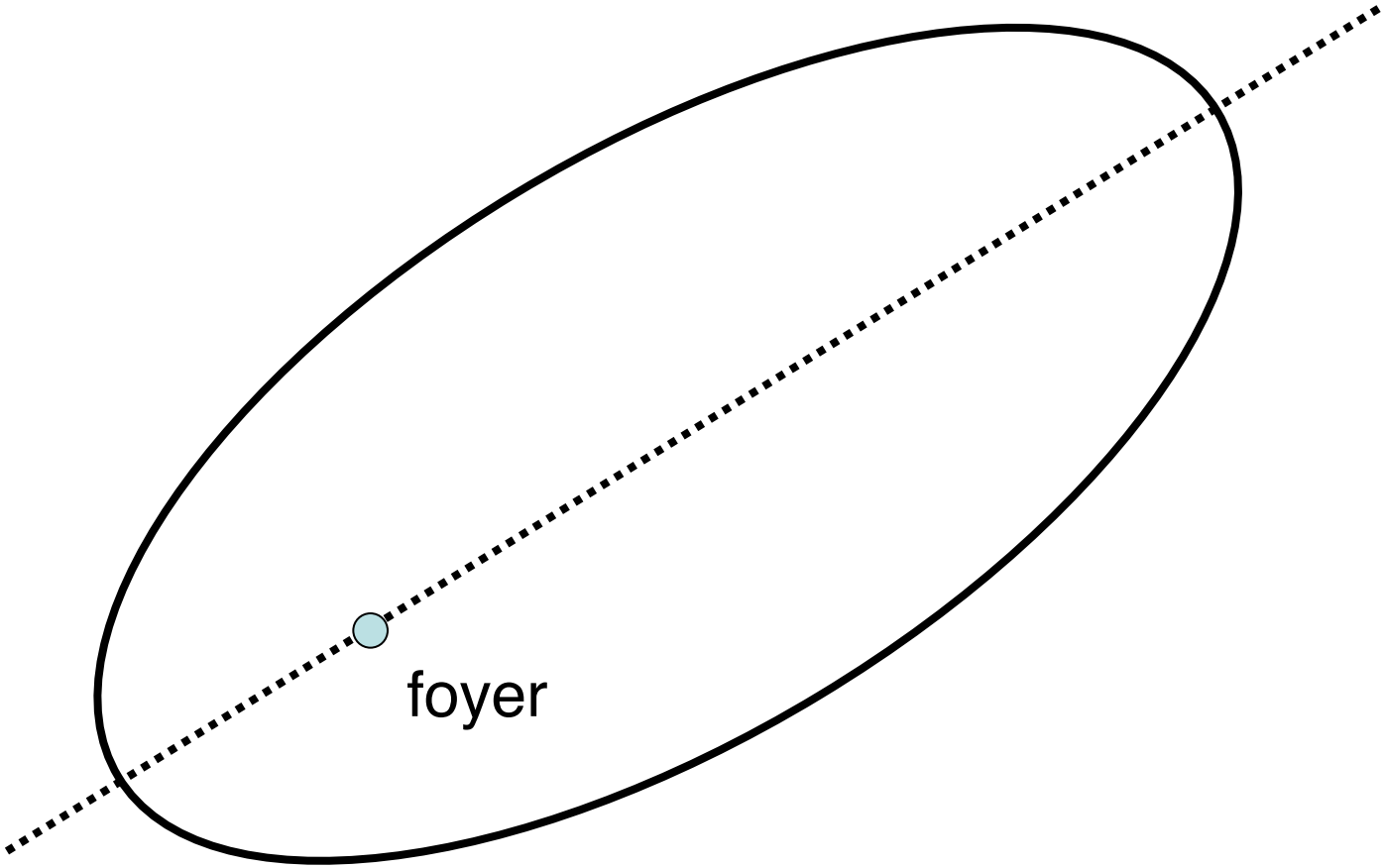
- cas le plus simple: pb restreint à deux corps → un corps central massif et immobile autour duquel orbite un corps de masse nulle →

trois degrés de liberté associés à (x,y,z) et décrits par trois paires de variables (x,v_x), (y,v_y), (z,v_z).

Ou mieux, par trois paires de variables *action-angle* adaptées à un traitement hamiltonien, qui révèle mieux les mécanismes de résonances.

le paradoxe du mouvement képlérien

Une seule fréquence semble présente dans le mouvement képlérien! → la fréquence orbitale

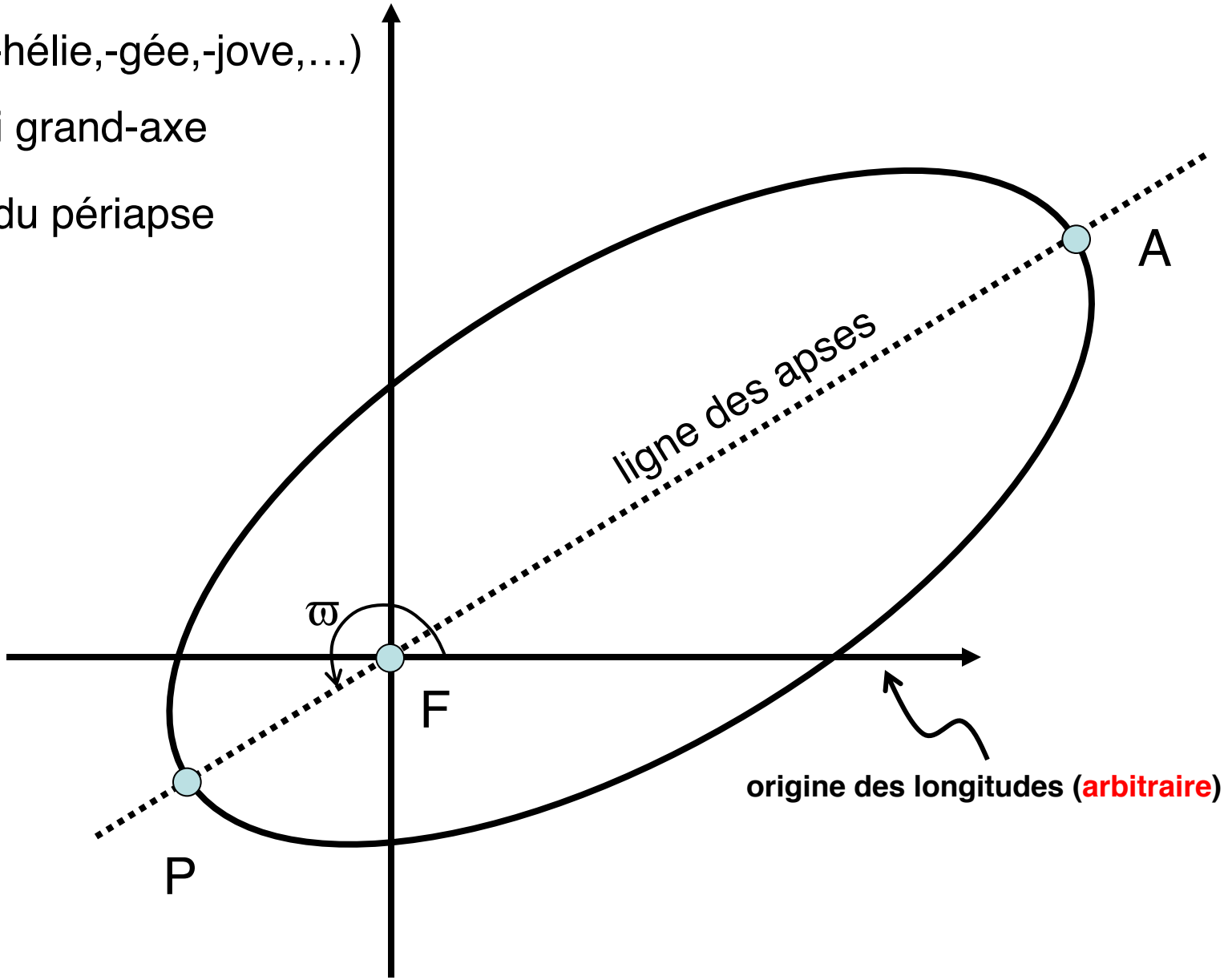


P: périapse (-hélie,-gée,-jove,…)

A: apoapse (-hélie,-gée,-jove,…)

AP/2=a: demi grand-axe

ϖ: longitude du périapse



γ : nœud (ascendant)

i : inclinaison

Ω : longitude du nœud ascendant

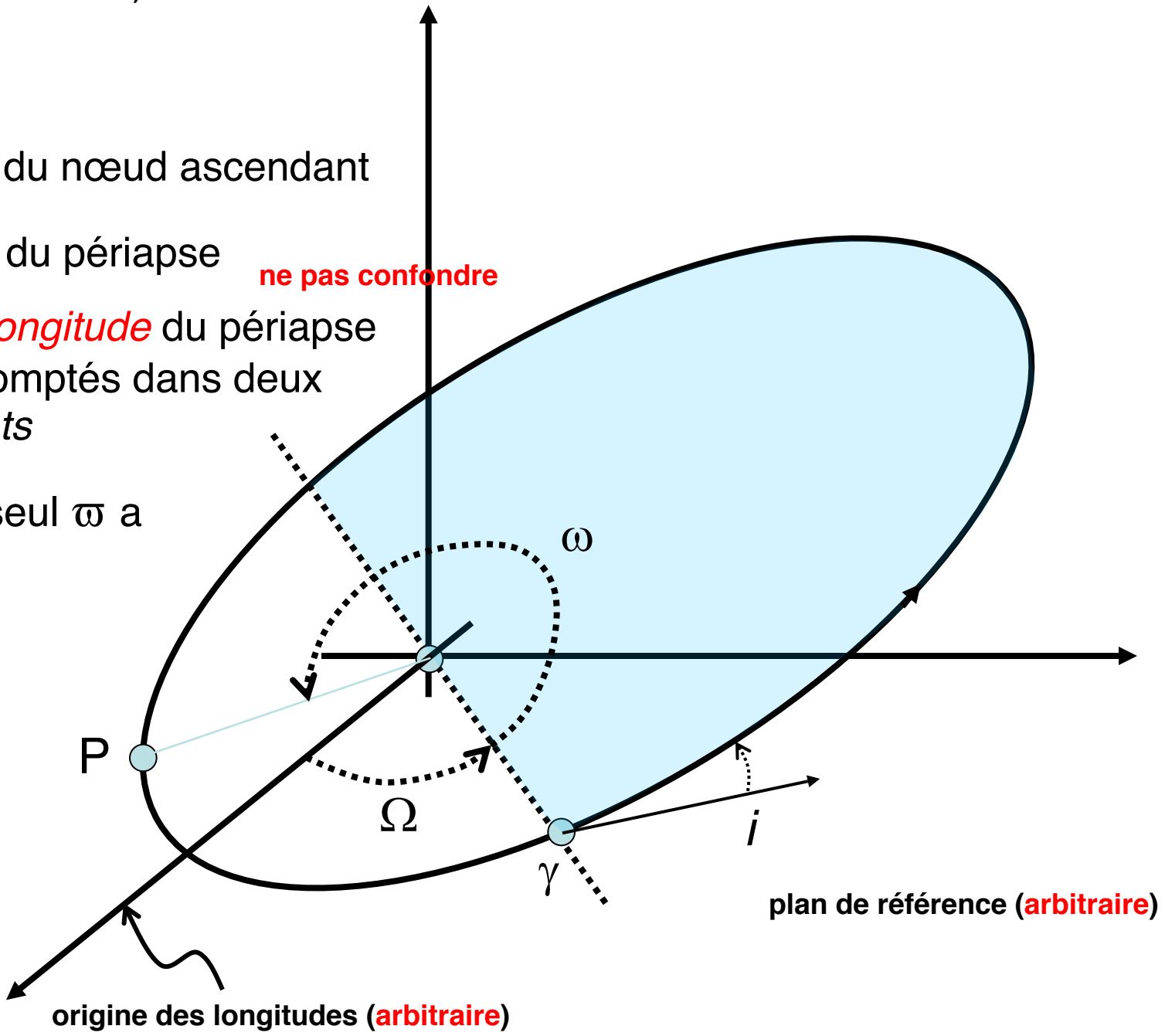
ω : *argument* du périapse

ne pas confondre

$\varpi = \Omega + \omega$: *longitude* du périapse

NB. angles comptés dans deux plans *différents*

NB'. si $i = 0$, seul ϖ a un sens



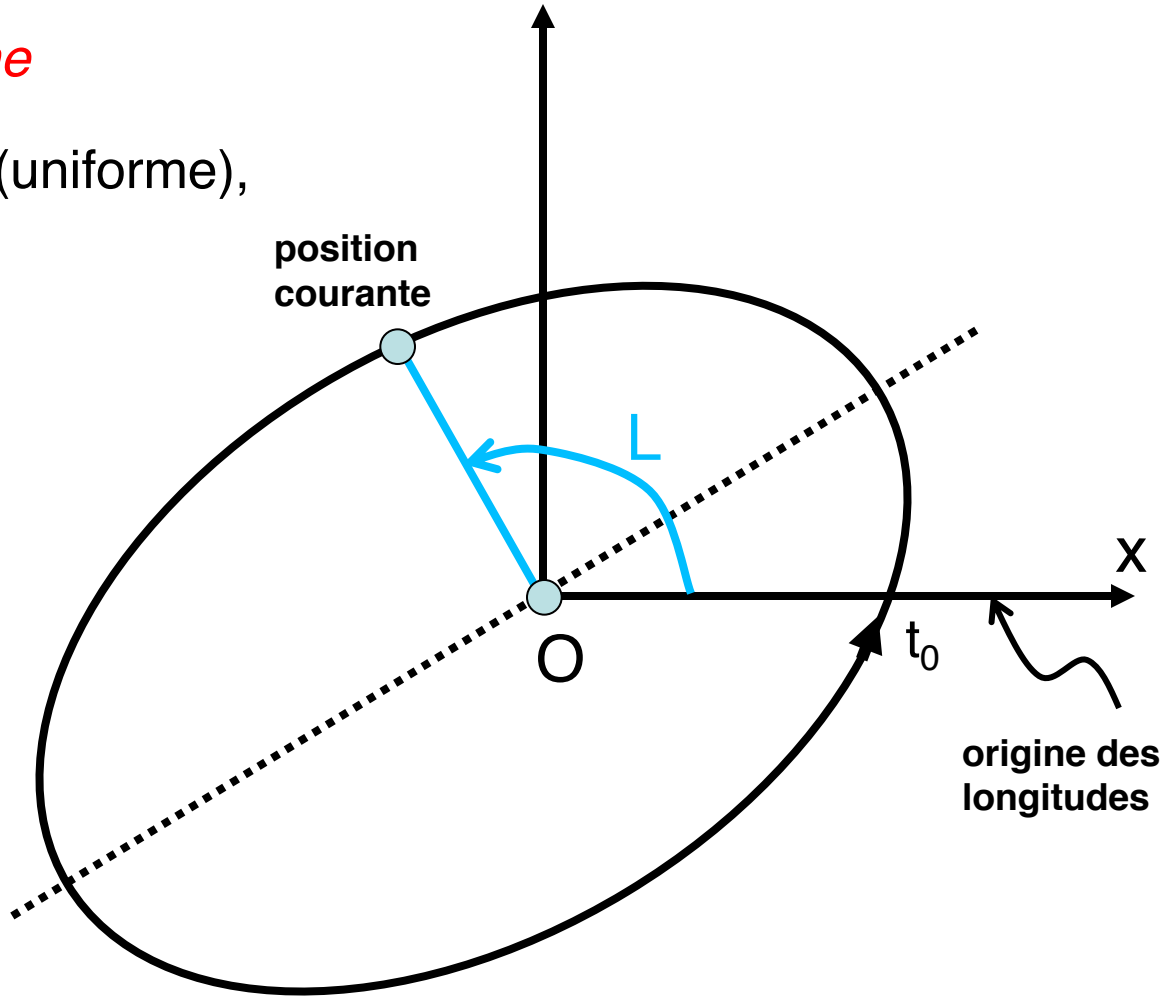
T: période orbitale, $n = 2\pi/T$: moyen mouvement

t_0: instant de passage à l'origine des longitudes

L: longitude *vraie*

$\lambda = n(t - t_0)$: longitude *moyenne*

NB: si mouvement *circulaire* (uniforme), alors $L = \lambda$



soit t_ϖ : instant de passage au périapse

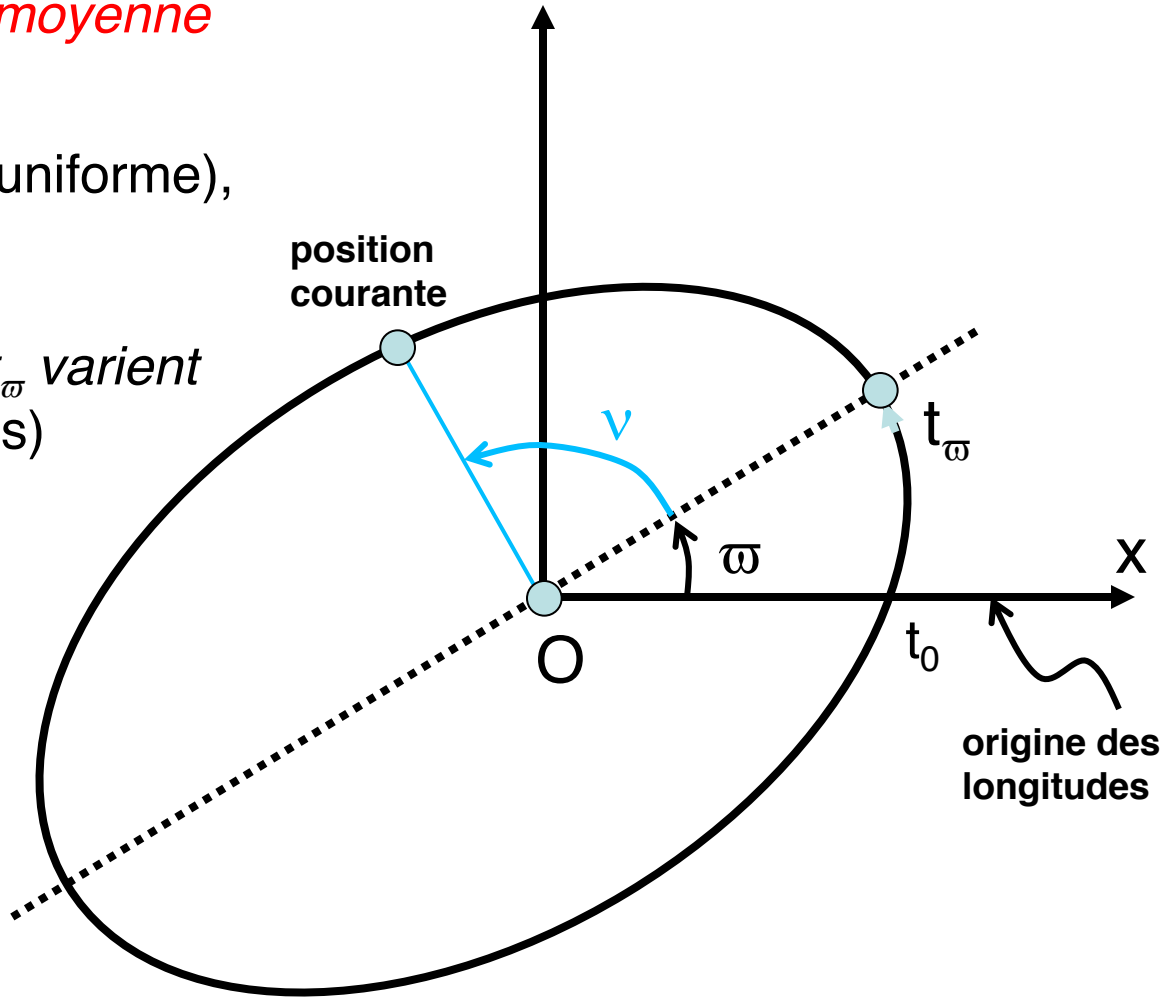
alors on peut définir aussi:

$\nu = L - \varpi$: anomalie *vraie*

$M = n(t-t_\varpi) = \lambda - \varpi$: anomalie *moyenne*

NB: si mouvement *circulaire* (uniforme), alors $\nu = M$

NB': si orbite perturbée, ϖ et t_ϖ *varient* (alors que *Ox* et t_0 restent fixes)



en résumé

L : longitude *vraie*

λ : $= n(t-t_0)$ = longitude *moyenne*

Ω : longitude du nœud (ascendant)

ω : *argument* du périapse

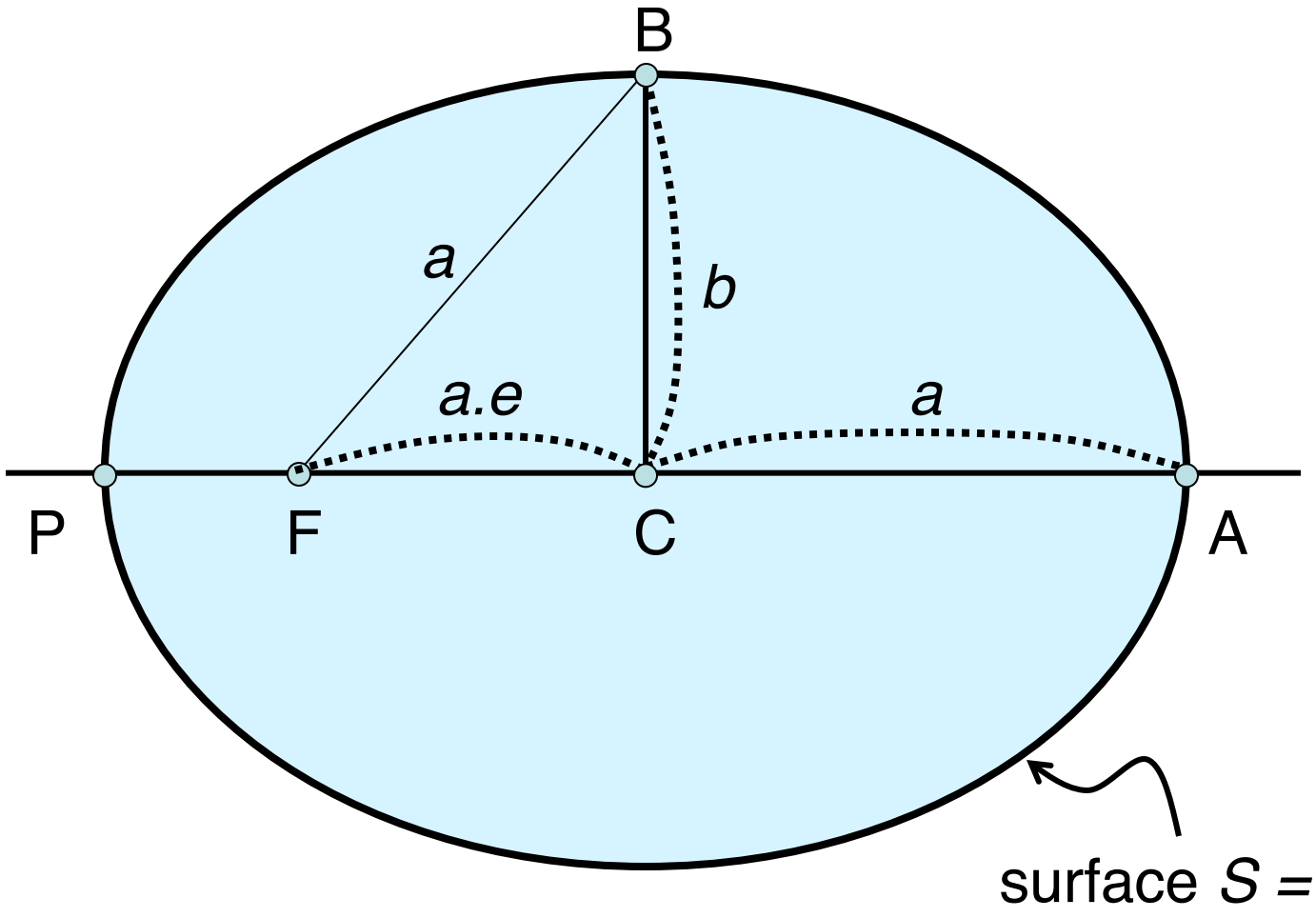
ϖ : $= \omega+\Omega$: *longitude* du périapse

ν : $= L - \varpi$: anomalie *vraie*

M : $= n(t-t_\varpi) = \lambda - \varpi$: anomalie *moyenne*

NB: si mouvement *circulaire* (uniforme), alors

$$L = \lambda$$
$$\nu = M$$



C: centre de l'ellipse

a: demi grand-axe

b: demi petit-axe = $a.\sqrt{(1-e^2)}$

NB. $a-b \sim ae^2/2$ à l'orde le plus bas → l'ellipse ressemble à un cercle même si *e* grand (par ex. ici $e \sim 0.46$, alors que $(a-b)/a \sim 0.11$

les six éléments orbitaux

a : demi grand-axe ; M : anomalie moyenne

e : eccentricité ; ω : *argument* du périapse

i : inclinaison ; Ω : longitude du nœud (ascendant)

NB. dans le mouvement keplerien, tous ces éléments sont constants, sauf λ, qui varie linéairement avec *t.*

NB'. relation univoque entre position-vitesse et élements orbitaux

$$\begin{pmatrix} a \\ e \\ i \\ M \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

si mouvement perturbé (*e.g.* par un 3ème corps): les éléments varient. Notion d'éléments osculateurs*:* éléments qu'aurait la particule si la perturbation était instantanément supprimée

a, e, i ne sont pas les meilleures variables → *

$$
\begin{array}{lcl}
L = \sqrt{\mu a} & \longleftrightarrow & M \\
G = \sqrt{\mu a(1-e^2)} & \longleftrightarrow & \omega \\
H = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos(i) & \longleftrightarrow & \Omega
\end{array}
$$

L, G, H sont les variables de Delaunay de type action
M, ω et *Ω* sont les variable de Delaunay de type angles
→ variables conjuguées du hamiltonien (cf. plus tard)

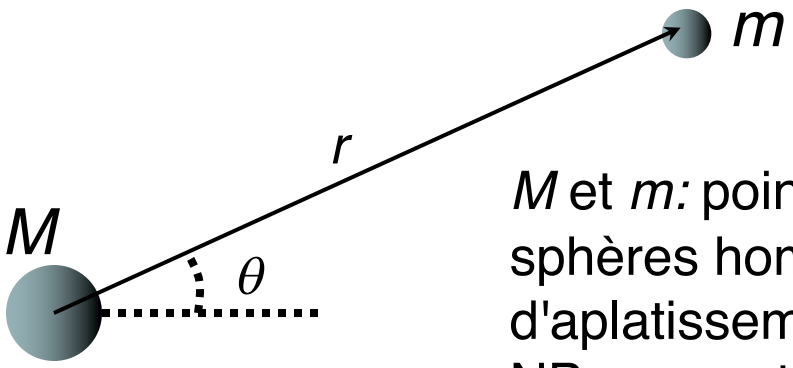
NB1. (cf. diapo suivante)

L ∝ énergie orbitale/fréquence orbitale *n*
G = module du moment cinétique
H = projection du moment cinétique sur *Oz*

NB2. trois féquences apparaissent → $(\dot{M} = n, \dot{\omega}, \dot{\Omega})$

* où $\mu = \mathcal{GM} =$ constante de gravitation × masse du corps central

propriétés dynamiques du mouvement keplerien



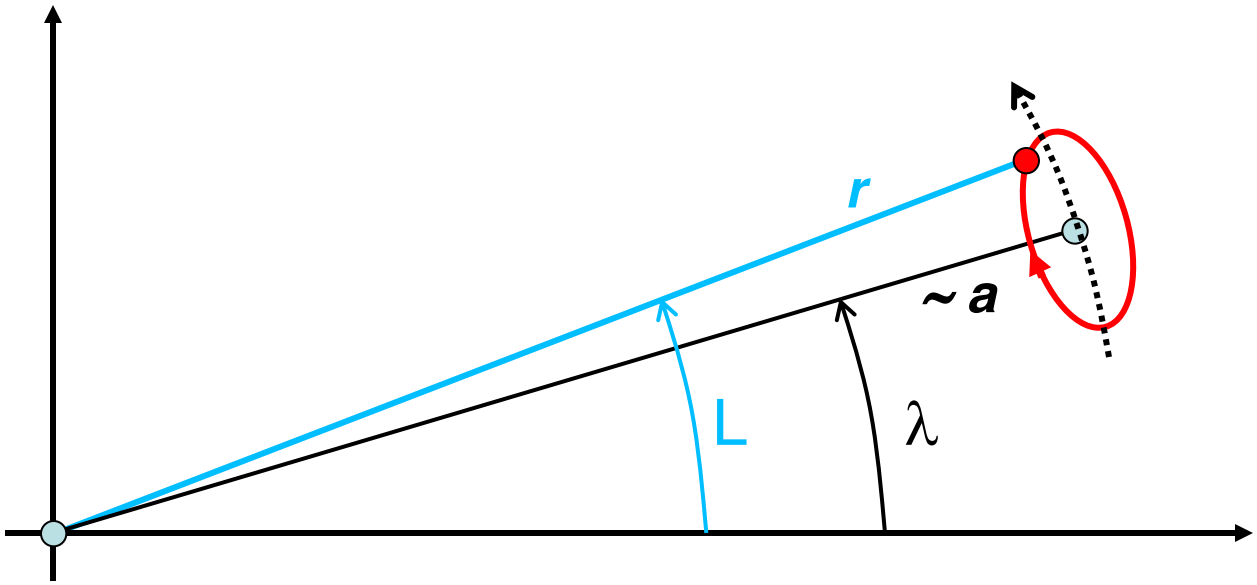
M et *m:* points matériels ou sphères homogènes (pas d'aplatissement, perturbateurs,…)
NB. on peut avoir *m = 0* (problème *restreint*)

deux intégrales du mouvements:

énergie (spécifique): $E(a) = v^2 / 2 - GM / r = -GM / 2a$

moment cinétique (spécifique): $H(a) = r^2 \dot{\theta} = \sqrt{GMa(1-e^2)}$

description *épicyclique*



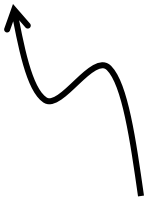
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos(\nu)} = \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos(L-\varpi)}$$

$$r^2 \dot{L} = cste$$

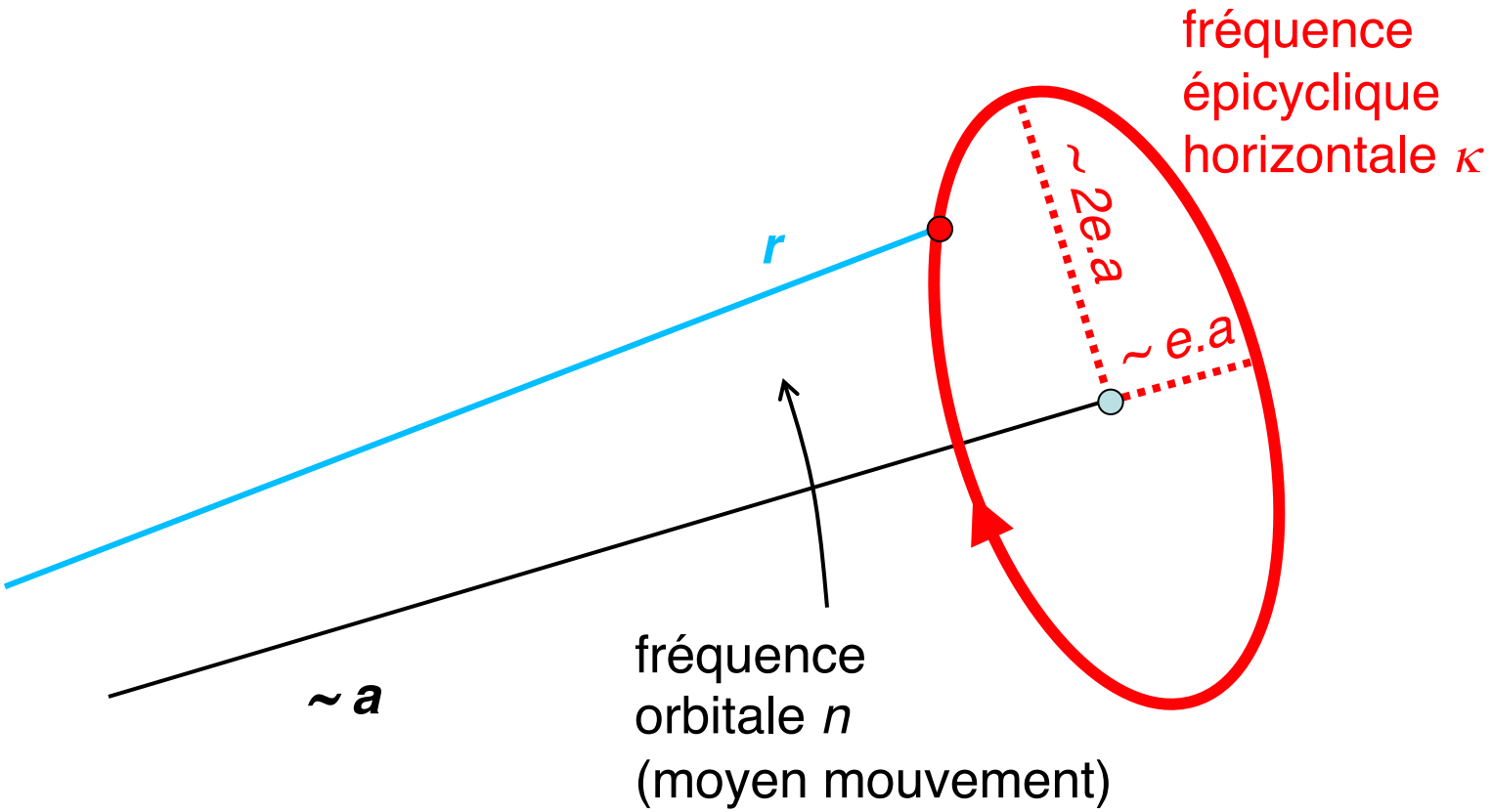
alors…

$$r \approx a[1 - e.\cos(\lambda - \varpi)] = a[1 - e.\cos(M)] + O(e^2)$$

$$L \approx \lambda + 2e.\sin(\lambda - \varpi) = \lambda + 2e.\sin(M) + O(e^2)$$



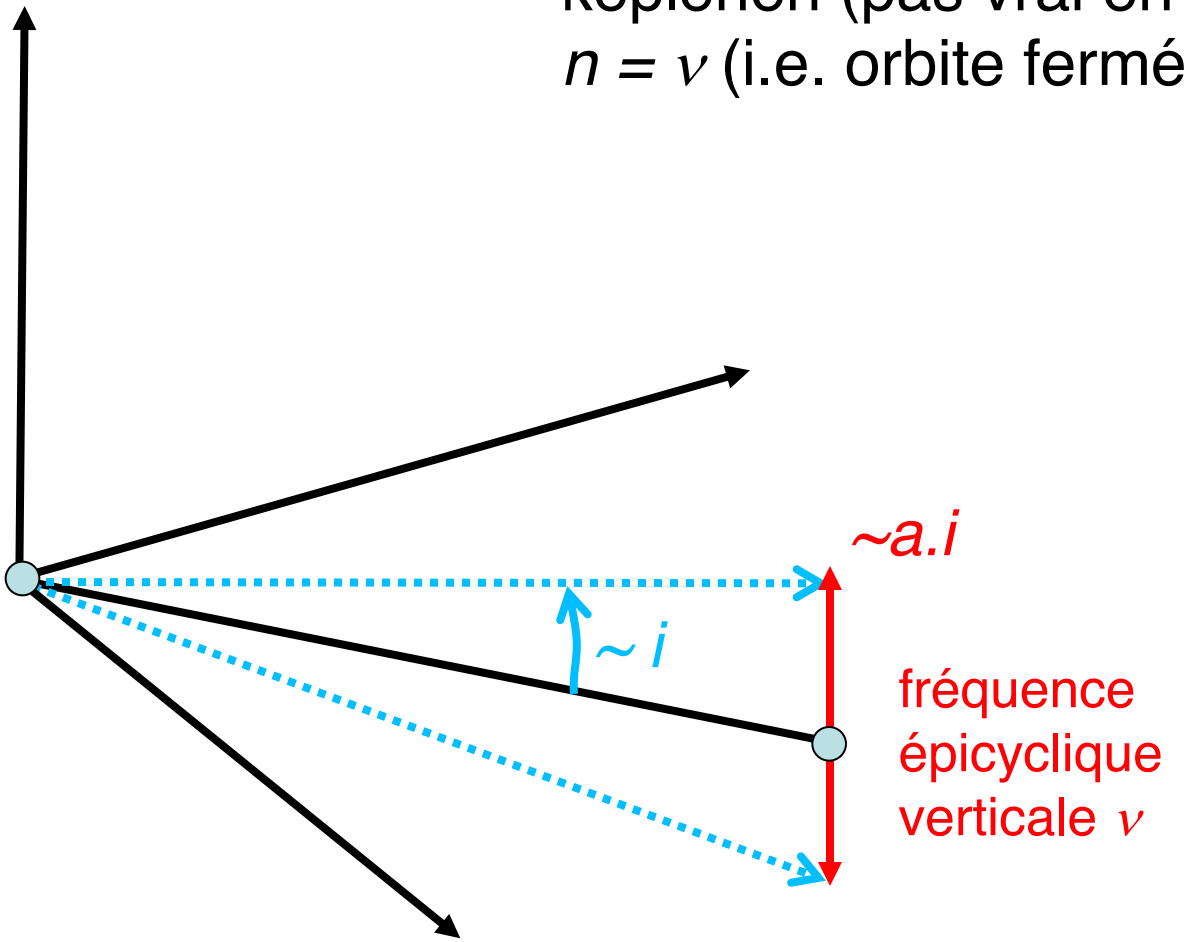
montrer que le "2" vient de $r^2\dot{L}$= cste (conservation du moment cinétique)



NB.: pour un mouvement *keplerien* (pas vrai en général), on a $n = \kappa$ (i.e. orbite fermée)

de même:

NB. dans le cas du mouvement keplerien (pas vrai en général) on a $n = \nu$ (i.e. orbite fermée)



remarque:

la force de gravitation entre masses ponctuelles, $F = GMm/r^2$, autorise deux autres intégrales du mouvements:

ϖ et Ω

$\rightarrow$ le mouvement képlérien est "dégénéré": $n = \kappa = \nu$

mais en général: aplatissement, bulbe galactique, perturbation due à un 3ème corps, etc…:

$$n \neq \kappa \neq \nu$$

en général:

$$n^2 = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{z=0}$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{r^3}\frac{d(r^2 n)^2}{dr}$$

$$\nu^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_{z=0}$$

équation de Laplace (valide à l'extérieur du corps, où ρ=0)

$$\Delta\Phi = 0 \longrightarrow \kappa^2 + \nu^2 = 2n^2 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

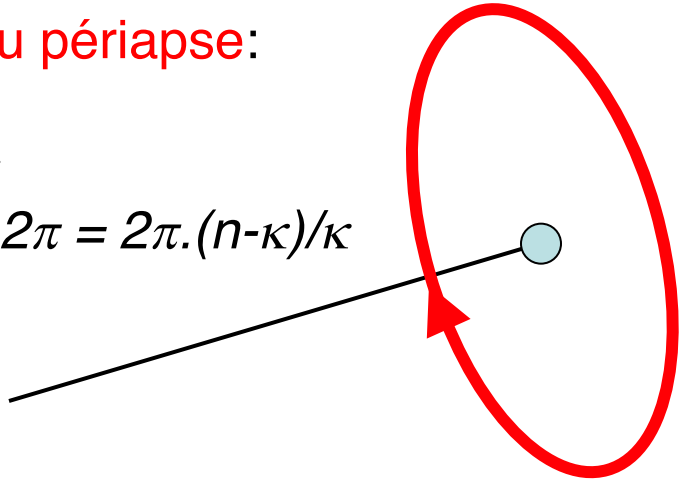
par exemple:

intervalle entre deux passages au périapse:

$\Delta T_p = 2\pi/\kappa$

longitude parcourue: $\Delta\theta = n.2\pi/\kappa$

"avance" du périapse: $\Delta\varpi = \Delta\theta - 2\pi = 2\pi.(n-\kappa)/\kappa$



taux de précession: $\dot{\varpi} = \Delta\varpi/\Delta T_p = n - \kappa$

d'où:

$$\dot{\varpi} = n - \kappa$$

de même:

$$\dot{\Omega} = n - \nu$$

NB comme: $\kappa^2 + \nu^2 = 2n^2$

→ si le périapse *progresse*, la ligne des nœuds *régresse*

il y a donc *trois* fréquences naturelles fondamentales du mouvement: n, κ et ν

qui se combinent sous forme d'harmoniques:

$f = m.n + p.\kappa + q.\nu$ avec m, p, q entiers

le corps perturbateur (eg un satellite)produit lui-même des fréquences

$f_s = m_s.n_s + p_s.\kappa_s + q_s.\nu_s$

et une résonance se produit lorsque

$$f = f_s$$

en général compliqué: non-linéaire, 2 degrés de liberté

ou plus… → non intégrable