# Electromagnétisme A Particule chargée dans un champ électrique et dans un champ magnétique Sommaire

Force de Lorentz

Travail, puissance de la force de Lorentz et énergie mécanique

Application: le canon à électrons

Equations horaires du mouvement d'une charge dans un champ électrique constant

Applications: écran cathodique, expérience de Millikan de quantification de la charge

Particule chargée dans un champ magnétique: pulsation et rayon de giration

Applications: effet miroir, séparation isotopique, chambre à bulles, cyclotron, synchrotron

Equations horaires du mouvement d'une charge dans un champ magnétique constant

Application: guidage des particules en mouvement

Oscillateur harmonique dans un champ magnétique: effet Zeeman

Oscillateur harmonique excité par une onde électromagnétique: profil d'amortissement en fréquence, raies spectrales

#### Dans tout le cours, les vecteurs sont en caractères gras

# I - Force de Lorentz subie par une charge dans un champ électrique et dans un champ magnétique

Une particule de charge q mobile, de vitesse v, plongée dans un champ électrique **E** et dans un champ magnétique **B**, subit la force de Lorentz:

$$\mathbf{F} = \mathbf{q} \; (\mathbf{E} + \mathbf{v} \; \mathbf{\Lambda} \; \mathbf{B})$$

Permet de définir la nature du champ électrique **E** et du champ magnétique **B** par leur action sur une charge q

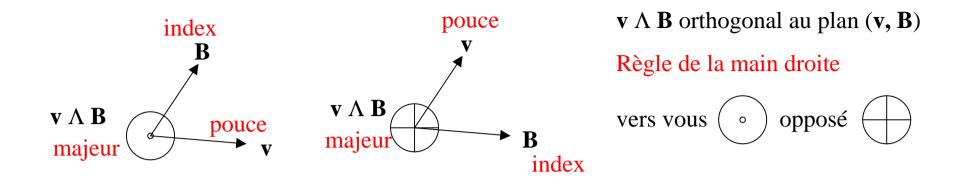
q E = force électrique, colinéaire au champ électrique (opposée ou même sens selon signe de q).

q  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \text{force magnétique}$ , orthogonale à la fois à la vitesse  $\mathbf{v}$  et au champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

Rappel sur le **produit vectoriel**:  $\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}\| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot |\sin(\mathbf{v}, \mathbf{B})|$  $\rightarrow$  Si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  ou si  $\mathbf{v} / / \mathbf{B}$ , pas de force magnétique

Unités: F en N, E en V/m; B en T; q en C; v en m/s.

Rappel: charge élémentaire  $e = 1.6 \ 10^{-19} \ C$ ; proton: charge +e, électron: charge -e.



#### II - Travail de la force de Lorentz et énergie mécanique

Le travail élémentaire d'une force F appliquée en M est le produit scalaire

dW = F.dOM (unité: Joule) où dOM est un déplacement élémentaire

La puissance de la force  $\mathbf{F}$  est  $\mathcal{P} = d\mathbf{W}/dt = \mathbf{F.v}$  avec  $\mathbf{v} = \mathbf{dOM}/\mathbf{dt}$  (vecteur vitesse)

$$\mathbf{F.v} = \mathbf{q} \ (\mathbf{E} + \mathbf{v} \ \Lambda \ \mathbf{B}).\mathbf{v}$$

comme ( $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ ). $\mathbf{v}$  est un produit mixte nul ( $\mathbf{v}$  orthogonal à  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ ), alors

La force magnétique ne travaille pas; seule la force électrique travaille.

La puissance de la force de Lorentz est

$$P = q E.v$$
 (unité: W)

Si m désigne la masse de la particule, le PFD implique:

$$m d\mathbf{v}/dt = q \mathbf{E} + q (\mathbf{v} \Lambda \mathbf{B})$$

Effectuons le produit scalaire avec v:  $d(\frac{1}{2} \text{ m } v^2)/dt = q \text{ E.v}$ 

Si  $\mathbf{E}$  dérive du potentiel électrostatique  $\mathbf{V}$  (unité: Volt), on a  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}(\mathbf{V})$ 

or dV = grad(V).dOM (par définition)

d'où  $dV/dt = -\mathbf{E.v}$ 

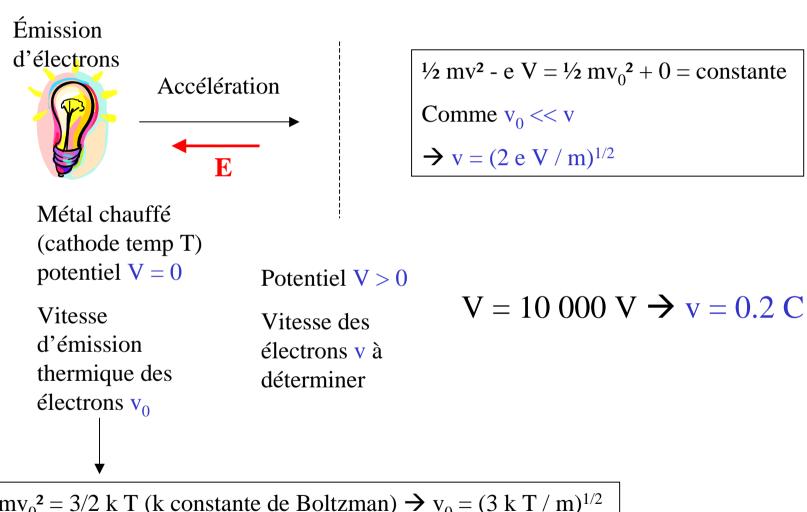
Donc la quantité  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + q V$  est <u>conservée</u>.

C'est l'énergie mécanique de la particule chargée.

 $E_c = \frac{1}{2} \text{ m } \mathbf{v}^2$  est l'énergie <u>cinétique</u> et  $E_p = q V$  est l'énergie <u>potentielle</u> (unité: Joule).

Remarque: en présence de frottements, E<sub>m</sub> n'est plus conservée et diminue.

### Application: le canon à électrons (accélération)



 $\frac{1}{2}$  mv<sub>0</sub><sup>2</sup> = 3/2 k T (k constante de Boltzman) → v<sub>0</sub> = (3 k T / m)<sup>1/2</sup>

$$T = 1000 \text{ K} \rightarrow v_0 = 0.0007 \text{ C} \rightarrow v_0 << C$$

### III - Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique constant

La particule de charge q et de masse m est soumise à la seule force électrique  $\mathbf{F} = \mathbf{q} \mathbf{E}$ , où  $\mathbf{E}$  est invariable <u>dans l'espace et dans le temps</u>.

Le PFD s'écrit:

$$m d^2OM/dt^2 = m dv/dt = F = q E$$

 $\mathbf{F} = \mathbf{q} \mathbf{E}$ mouvement
ralenti  $\mathbf{F} = \mathbf{q} \mathbf{E}$ mouvement
accéléré  $\mathbf{v_0}$ 

L'accélération est q E / m

ce qui s'intègre vectoriellement et donne les équations horaires:

$$\mathbf{v}(t) = d\mathbf{O}\mathbf{M}/dt = (\mathbf{q} \mathbf{E} / \mathbf{m}) t + \mathbf{v_0}$$

où  $\mathbf{v_0}$  est la <u>vitesse initiale</u> de la charge.

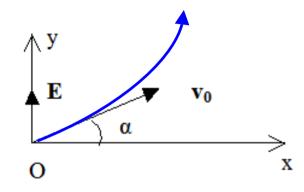
$$OM(t) = (\frac{1}{2} q E / m) t^2 + v_0 t + OM_0$$

où  $M_0$  est la <u>position initiale</u> de la charge.

Conclusion: le champ électrique accélère ou ralentit une charge dans son mouvement (dépend du sens de la force q E par rapport à  $v_0$ )

### Exemple:

la charge a pour coordonnées [x(t), y(t)] et pour vitesse [ $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ] dans le repère (xOy); en t=0, elle est au point O et possède la vitesse initiale  $\mathbf{v_0}$  [ $v_0 \cos(\alpha)$ ,  $v_0 \sin(\alpha)$ ]



$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\alpha) \\ v_y(t) = (q E/m) t + v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$$

mouvement à <u>vitesse constante</u> selon Ox mouvement <u>accéléré ou ralenti</u> selon Oy

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha) t \\ y(t) = (\frac{1}{2} q E / m) t^2 + v_0 \sin(\alpha) t \end{cases}$$

équation de la trajectoire:

$$y = (\frac{1}{2} q E / m) (x / v_0 \cos(\alpha))^2 + x \tan(\alpha)$$

Il s'agit d'une <u>parabole</u>. Si  $\alpha = 0$  (**E** orthogonal à  $\mathbf{v_0}$ ),  $y = (\frac{1}{2} \, \mathbf{q} \, \mathbf{E} \, / \, \mathbf{m} \, \mathbf{v_0^2}) \, \mathbf{x^2}$ 

Application 1 : oscilloscope à écran cathodique

**E** est créé par des plaques parallèles distantes de d, de longueur l et de différence de potentiel U

$$x = (\frac{1}{2} q E_x / m v_0^2) l^2 \text{ où } E_x = U_x/d$$

$$y = (\frac{1}{2} q E_y / m v_0^2) l^2 \text{ où } E_y = U_y/d$$

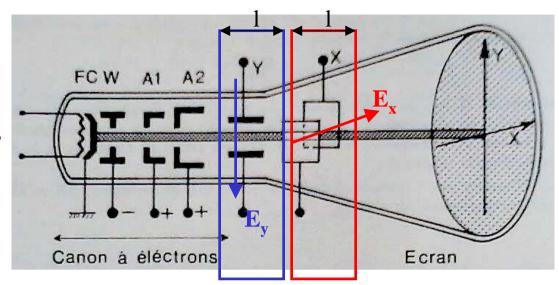
$$\Rightarrow x, y \text{ proportionnels à } U_x, U_y$$

Ci contre: variété de courbes de Lissajous obtenues en appliquant aux plaques de déflexion x et y les tension

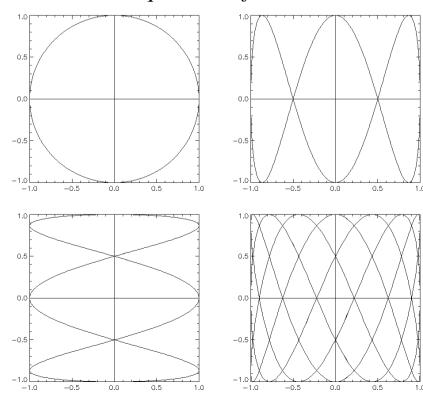
$$U_{x} = \cos(p \ t)$$

$$U_y = \sin(q t)$$

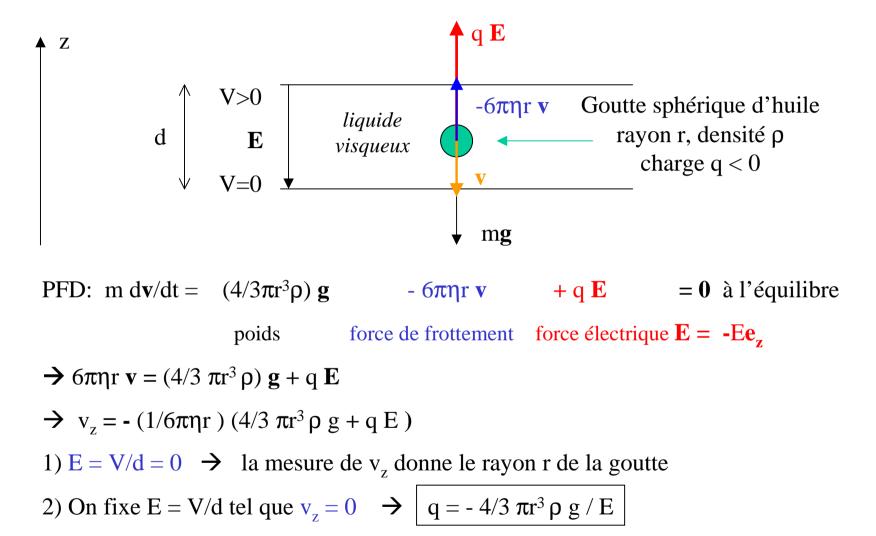
Pour p, q entiers  $(p = q donne un cercle) <math>\rightarrow$ 



Plaques de déflexion



Application 2: expérience de Millikan sur la quantification de la charge

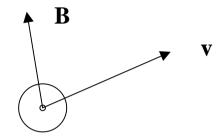


Résultat: on trouve statistiquement que la charge q est multiple d'une même quantité, la charge de l'électron –  $e = -1.6 \ 10^{-19} \ C$ 

## IV - Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique; pulsation gyromagnétique et rayon de giration

Le PFD s'écrit:

 $m d\mathbf{v}/dt = q \mathbf{v} \Lambda \mathbf{B}$ 



 $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  orthogonal au plan  $(\mathbf{v}, \mathbf{B})$ 

Le produit scalaire avec v donne  $d(\frac{1}{2} \text{ m } v^2) / dt = 0$ .

L'énergie cinétique de la particule est constante. La norme ||v|| du vecteur vitesse est invariable.

Supposons **B** invariable dans le temps.

Considérons dérivée du produit scalaire **v.B** par rapport au temps:

 $d(\mathbf{v.B})/dt = d\mathbf{v}/dt \cdot \mathbf{B} = q/m \quad (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = 0$  puisque  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}$  sont orthogonaux.

On en déduit que <u>le produit scalaire v.B est invariable dans le temps</u>.

Posons:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{//} + \mathbf{v}_{\perp}$ 

 $\mathbf{v}_{\prime\prime}$  dans la direction du champ magnétique

 $\mathbf{v}_{\perp}$  dans le plan orthogonal au champ

Conséquence pour un champ magnétique uniforme et constant

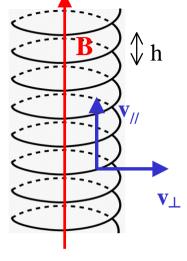
$$v_{//} B = constante$$

$$\rightarrow v_{\prime\prime} = constante$$

$$v_{//} B = constante$$
  $\rightarrow v_{//} = constante$   
 $v^2 = v_{//}^2 + v_{\perp}^2 = constante$   $\rightarrow v_{\perp} = constante$ 

$$\rightarrow v_{\perp} = constante$$

$$Si \ v_{//} = 0$$
 alors  $m \ v_{\perp}^2 / R = q \ v_{\perp} B \rightarrow v_{\perp} = \Omega R$ 



Le mouvement est <u>plan et circulaire</u> de <u>rayon de courbure</u>

$$R = |v_{\perp}/\Omega|$$

La quantité 
$$\Omega$$
 =

$$\Omega = |\mathbf{q} \; \mathbf{B} \; / \; \mathbf{m}|$$

La quantité  $|\Omega = |q|B/m$  porte le nom de <u>pulsation gyromagnétique</u>.

C'est une <u>vitesse angulaire</u> (unité: rd/s) de rotation dans un plan orthogonal au champ **B**.

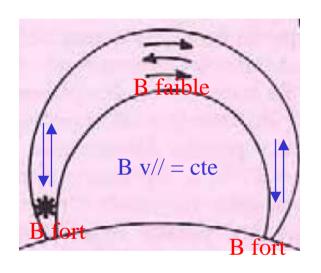
 $Si v_{\prime\prime}$  est non nul

Le mouvement est une hélice de rayon R dont l'axe est la direction du champ magnétique; son pas est  $h = v_{//} T = v_{//} (2\pi/\Omega)$ ; la <u>vitesse de dérive</u> sur l'axe de l'hélice est  $v_{//}$ 

Conclusion: les charges sont déviées et guidées par un champ magnétique. L'énergie cinétique de la particule ne varie pas.

### Applications:

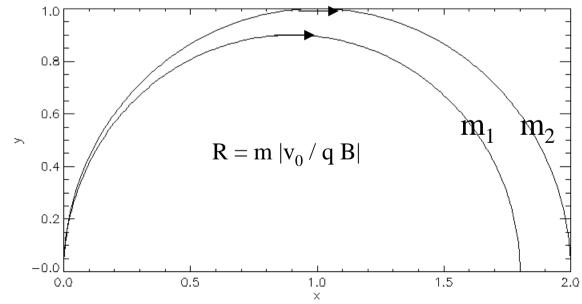
1 - le phénomène de piégeage de charges par miroir magnétique dans la couronne solaire



A la surface du Soleil, le phénomène de miroir magnétique se produit lorsqu'une particule chargée se déplace d'une zone de champ magnétique B <u>faible</u> (sommet d'une arche magnétique) vers ses pieds d'ancrage où B est <u>fort</u>. La vitesse de dérive  $v_{//}$ , maximale au sommet de l'arche, diminue vers ses pieds, peut s'annuler et s'inverser.

2 – séparation isotopique par un champ magnétique

Pour q, B, v<sub>0</sub> donnée, R proportionnel à la masse m (les isotopes diffèrent par le nombre de neutrons)



3 – la chambre à bulles en physique des particules

PFD:  $m d\mathbf{v}/dt = q (\mathbf{v} \Lambda \mathbf{B}) - k \mathbf{v}$ 

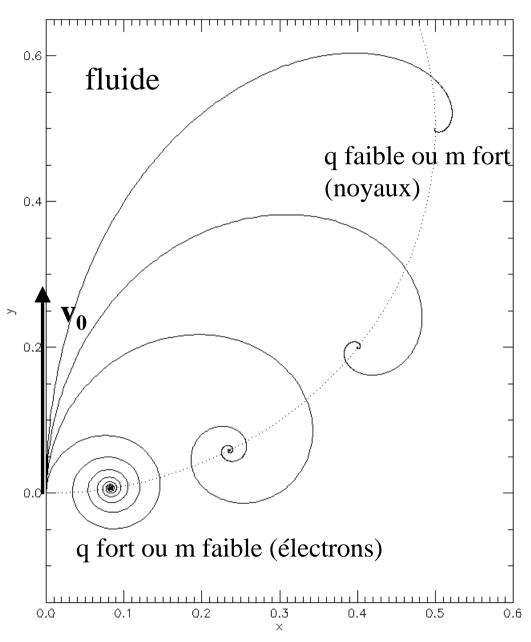
Vitesse initiale  $\mathbf{v_0}$  selon Oy

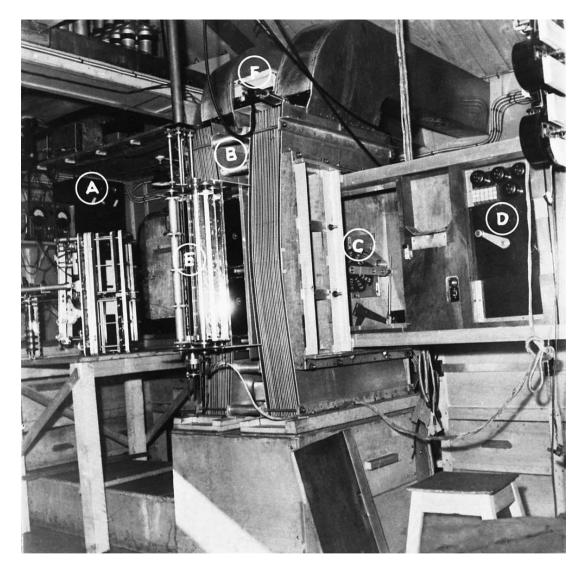
Trajectoire incurvée en présence de champ magnétique

Mouvement freiné par le fluide, frottement – k v avec formation de bulles sur la trajectoire par vaporisation (la puissance dissipée – k v² provoque le changement d'état)

 $\rightarrow$  Mesure de la vitesse initiale  $v_0$  et de la charge q

$$\Omega = |q B / m|$$
 (B donné)



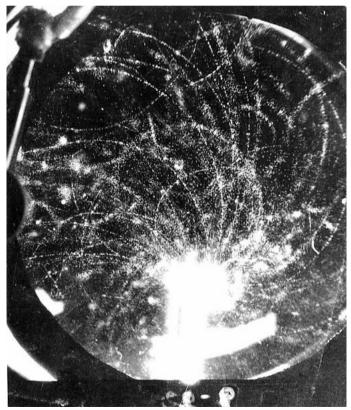


 $\Omega = |q B / m|$ 

les trajectoires sont d'autant plus incurvées que la masse m est petite et la charge q grande à B donné ->

← Chambre de Wilson du laboratoire Leprince Ringuet des rayons cosmiques (gerbes de particules secondaires issues de collisions entre particules galactiques et l'atmosphère).

Col du Midi à 3600 m d'altitude (massif du Mont Blanc)

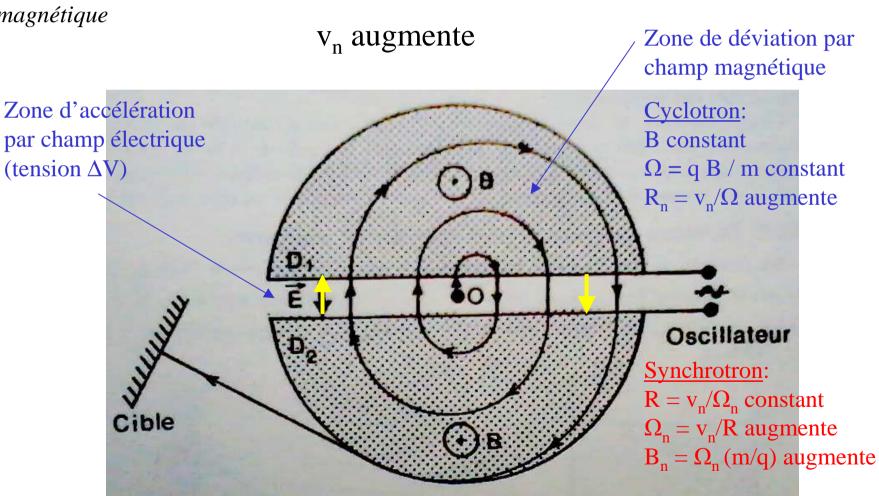


### 4 – cyclotron/synchrotron: accélérateur de particules

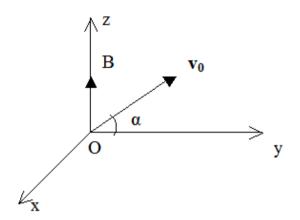
Accélération par un champ électrique

<u>Déviation</u> par un champ magnétique

$$^{1/2}$$
 m  $\mathbf{v_{n+1}}^2$  -  $^{1/2}$  m  $\mathbf{v_n}^2$  = q  $\Delta V$ 



### V - Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme; équation horaire



Particule de charge q et de masse m à l'origine O du repère, et de vitesse initiale  $\mathbf{v_0}$  contenue dans le plan (yOz), de coordonnées  $(0, v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$ . En t, la particule est en M (x(t), y(t), z(t)).

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit:  $m dv/dt = q v \Lambda B$ , équation que l'on projette sur les 3 axes.

Selon Ox: 
$$m d^2x/dt^2 = q B dy/dt$$
 (1)

Selon Oy: 
$$m d^2y/dt^2 = -q B dx/dt$$
 (2)  
Selon Oz:  $m d^2z/dt^2 = 0$  (3)

Selon Oz: 
$$m d^2z/dt^2 = 0$$
 (3)

- (3) donne la vitesse et le mouvement selon Oz:  $dz/dt = v_0 \sin \alpha = \text{constante}$ , et  $z(t) = v_0 \sin \alpha t$
- $\rightarrow$  Le mouvement se fait à <u>vitesse constante</u> ( $v_0 \sin \alpha$ ) <u>dans la direction du champ magnétique</u>.

Les deux premières équations donnent la vitesse et le mouvement dans le plan xOy:

$$\begin{cases} dx/dt = v_0 \cos\alpha \sin(\omega t) \\ dy/dt = v_0 \cos\alpha \cos(\omega t) \end{cases} \qquad \boxed{\omega = q \; B \; / \; m} \; \text{est la } \underline{\text{pulsation gyromagn\'etique}}.$$

 $\rightarrow$  Dans le plan orthogonal au champ magnétique, <u>la vitesse est constante</u> ( $v_0 \cos \alpha$ )

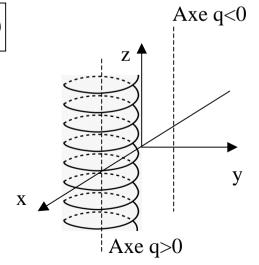
$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha (1 - \cos(\omega t)) / \omega \\ y(t) = v_0 \cos\alpha \sin(\omega t) / \omega \end{cases}$$

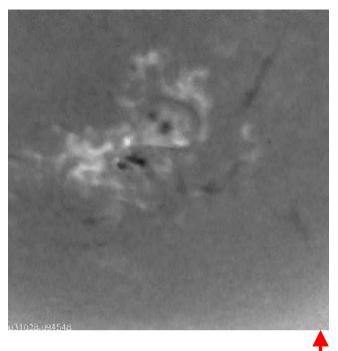
équation de la trajectoire dans le plan xOy:

$$(x - v_0 \cos\alpha / \omega)^2 + y^2 = (v_0 \cos\alpha / \omega)^2$$

- → C'est un <u>cercle</u> de rayon  $R = v_0 \cos \alpha / \omega$  et centre  $(v_0 \cos \alpha / \omega, 0)$
- $\rightarrow$  La trajectoire dans l'espace est une <u>hélice de pas h</u> dont <u>l'axe</u> est parallèle au champ magnétique, de <u>vitesse de dérive constante</u>  $v_0 \sin \alpha$ , et de <u>rayon R de giration constant</u>.

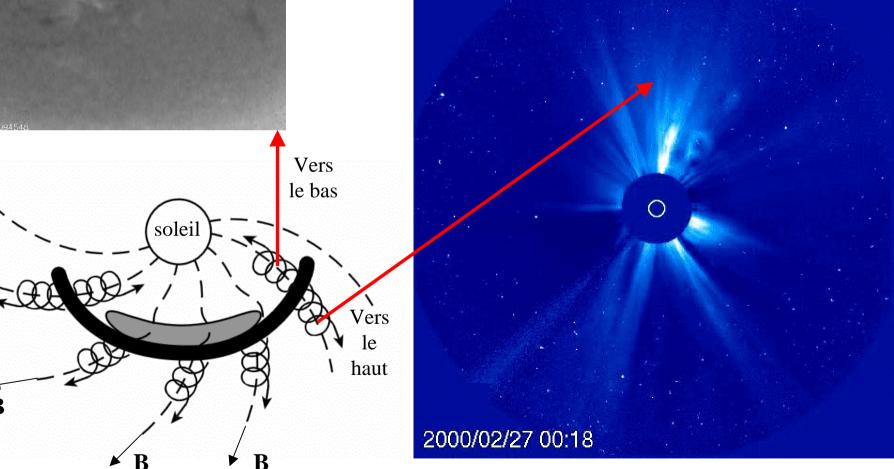
$$h/R = 2\pi \tan(\alpha)$$
 et  $||v|| = v_0 = constante$ 





Application: guidage par le champ magnétique **B** de particules accélérées par les champs électriques **E** des éruptions solaires

← Impact des particules sur la surface (vers le bas)



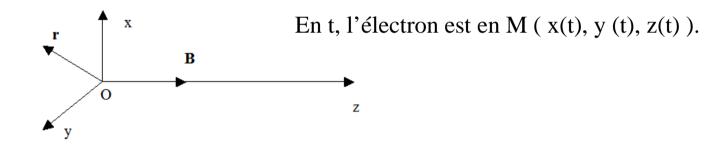
0 / 40

Injection dans le milieu interplanétaire (vers le haut)

#### VI - Oscillateur harmonique en présence de champ magnétique et effet Zeeman

#### Modèle d'atome:

électron mobile autour d'un noyau fixe en O, mouvement décrit par un <u>oscillateur harmonique</u>; force de rappel - k **OM** (k constante positive). Charge -e et masse m. L'électron est dans un champ magnétique extérieur  $\mathbf{B} = \mathbf{B} \ \mathbf{e}_{\mathbf{z}}$  constant sans frottement.



Le PFD appliqué à l'électron s'écrit vectoriellement avec  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}(x, y, z)$ 

$$m d^2 \mathbf{r}/dt^2 = -k \mathbf{r} - e d\mathbf{r}/dt \Lambda B \mathbf{e_z}$$

$$\begin{cases} d^{2}x/dt^{2} + \omega_{0}^{2} x + \omega_{g} dy/dt = 0 & (1) \\ d^{2}y/dt^{2} + \omega_{0}^{2} y - \omega_{g} dx/dt = 0 & (2) \\ d^{2}z/dt^{2} + \omega_{0}^{2} z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\omega_0=(k/m)^{1/2}~$$
 pulsation propre liée à la force de rappel du noyau et 
$$\omega_g=eB/m~$$
 pulsation gyromagnétique

(3) donne selon Oz:  $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t)$ , <u>vibration de pulsation  $\omega_0$  dans la direction du champ magnétique</u>. La vibration est <u>polarisée linéairement</u>.

 $(\omega^0 + \omega^1) - (\omega^0 - \omega^1)$ 

(1) et (2) donnent dans le plan xOy:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0 + \omega_g/2)t & \text{ou} \quad \begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0 - \omega_g/2)t \\ y = x_0 \sin(\omega_0 + \omega_g/2)t \end{cases} & \text{gauche} \end{cases}$$

$$\omega_L = \omega_g/2 = e \text{ B } / 2 \text{ m} \quad \text{pulsation de Larmor}$$

Ces deux vibrations décrivent un <u>cercle dans le plan perpendiculaire au champ magnétique</u>. Elles sont <u>polarisées circulairement</u> gauche et droite, selon la vitesse angulaire  $(\omega_0 \pm \omega_1)$ 

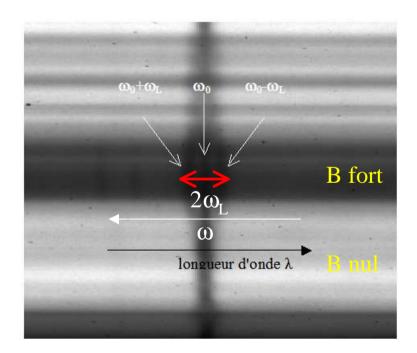
L'écart entre les deux pulsations étant  $\Delta \omega = 2\omega_L$ , on en déduit l'écart en longueur d'onde:

$$\lambda = CT = 2\pi C/\omega \rightarrow \Delta\lambda = \lambda^2 \Delta\omega / 2\pi C = \lambda^2 \omega_g / 2\pi C \rightarrow \Delta\lambda = (e / 2\pi mC) \lambda^2 B$$

Effet Zeeman et mesure du champ magnétique à distance

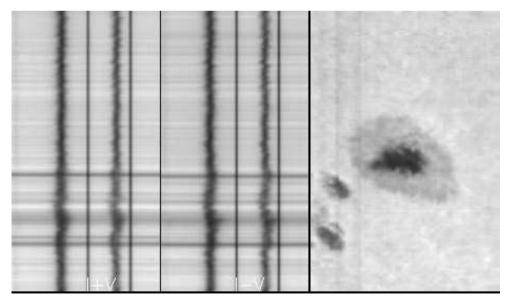
La mécanique quantique introduit un facteur multiplicatif, le <u>facteur de Landé équivalent g\*</u> de la transition (ce facteur est tabulé):

$$\Delta\lambda = (e / 2\pi mC) g^* \lambda^2 B$$



Raies FeI 6301 et 6302 A sur une tache solaire (télescope Thémis INSU) →

Considérons une raie spectrale atomique centrée sur la pulsation  $\omega_0 = 2\pi C/\lambda_0$ ; en présence de champ magnétique, deux autres composantes centrées sur  $\omega_0 + \omega_L$  et  $\omega_0 - \omega_L$  apparaissent (effet Zeeman). La mesure de leur écartement  $\Delta \omega$  ou  $\Delta \lambda$  fournit la valeur du champ magnétique B à distance.



# VII - Oscillateur harmonique en présence du champ électrique d'une onde et profil d'amortissement en fréquence; raies spectrales

Un modèle simple 1D permet d'expliquer les profils en fréquence des raies spectrales d'un gaz en interaction avec le rayonnement ambiant.

Modèle atomique: électron de position x(t) lié au noyau de l'atome par la force de rappel – k x, subissant un amortissement – m  $\gamma$  dx/dt, et oscillant dans un champ électrique E  $e^{i\omega t}$  (vibration lumineuse de pulsation  $\omega = 2\pi v$ ).

m et -e masse et charge de l'électron; γ amortissement (en s<sup>-1</sup>).

#### PFD selon Ox:

 $m d^2x/dt^2 + m\gamma dx/dt + kx = -e E e^{i\omega t}$ 

on pose  $x = X e^{i\omega t}$ , où X est l'amplitude complexe du mouvement.

d'où 
$$X = (-e/m) E / (\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega)$$

 $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$  est la pulsation propre (électron lié au noyau par une force de rappel).

La puissance moyenne dissipée par la force de frottement:  $\langle m\gamma(dx/dt)^2\rangle$  est égale à :

En posant  $\omega = 2\pi v$ , et au voisinage de la fréquence de résonance  $v_0 = \omega_0/2\pi$ , on obtient:

$$<$$
P<sub>f</sub> $> \approx (\gamma/32\pi^2) (e^2/m) E^2 / [(v - v_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$ 

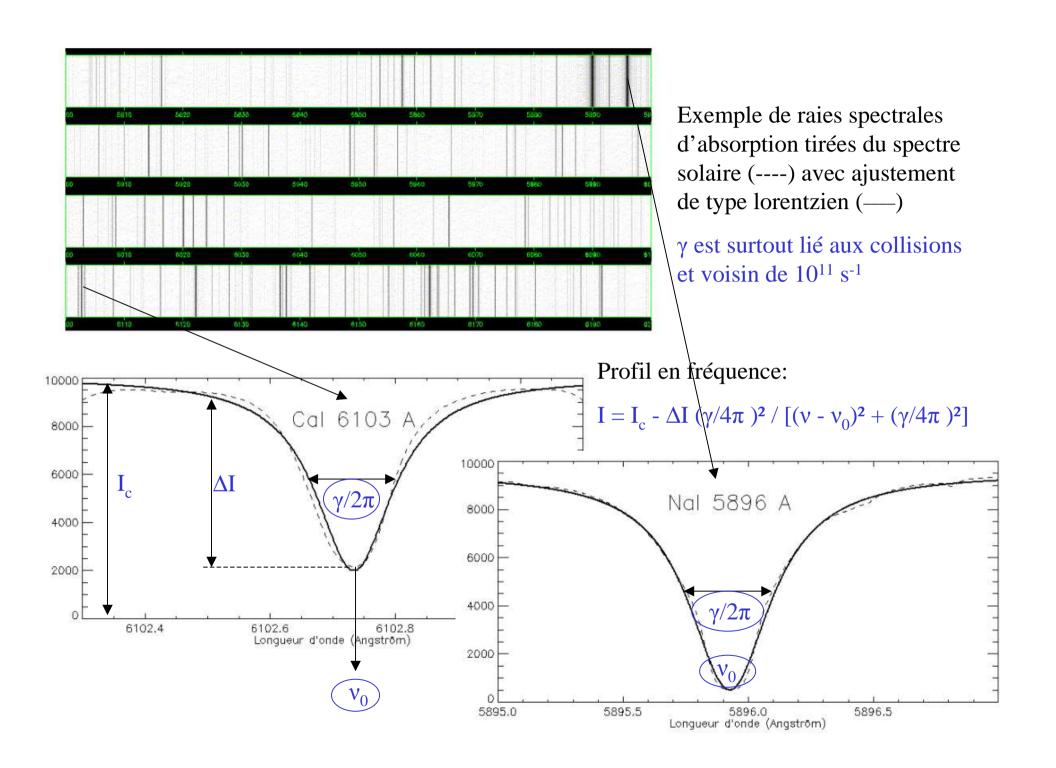
La section efficace σ (en m²) de photo excitation caractérise <u>l'interaction entre rayonnement et</u> matière; c'est le <u>rapport entre</u>:

- la puissance moyenne dissipée par l'électron  $\langle P_f \rangle$  (W)
- la <u>puissance moyenne de l'onde transportée par unité de surface</u> <P $> = C <math>\epsilon_0 E^2/2$  (W m<sup>-2</sup>)

$$\rightarrow \sigma(v) = \langle P_f \rangle / \langle P \rangle$$
 proportionnel à  $\left[ (\gamma/4\pi)^2 / [(v - v_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2] \right]$ 

Le profil est dit "Lorentzien", avec un pic à la résonance  $v_0$  de largeur à mi hauteur  $\gamma/2\pi$ .

- $\rightarrow v_0$  est la <u>fréquence centrale d'une raie spectrale</u> atomique
- $\rightarrow \gamma/2\pi$  est la <u>largeur à mi hauteur de la raie en fréquence</u>



### Application:

L'exploration du profil des raies (absorption croissante des ailes vers le cœur) permet d'imager l'atmosphère solaire à des profondeurs différentes; ici une zone de 1' x 1' dans la raie FeI 557.6 nm

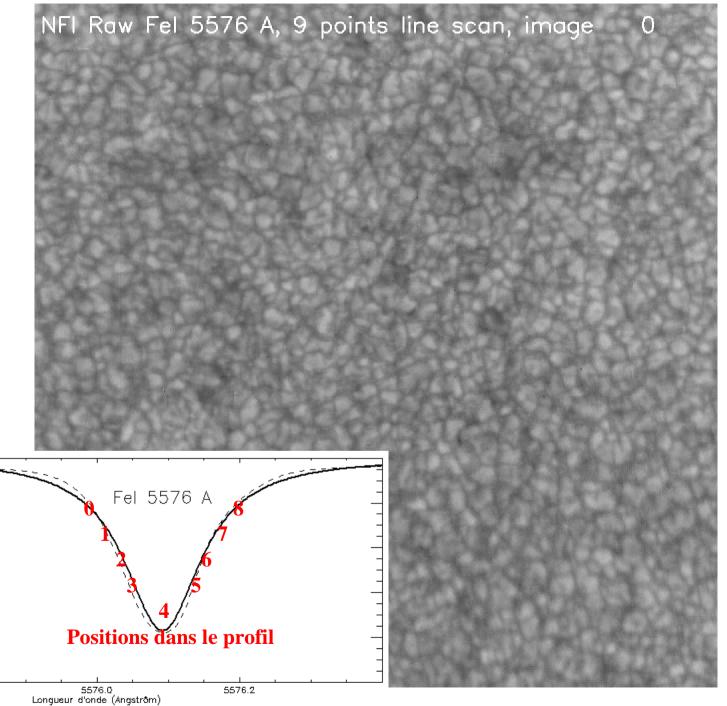
5575.B

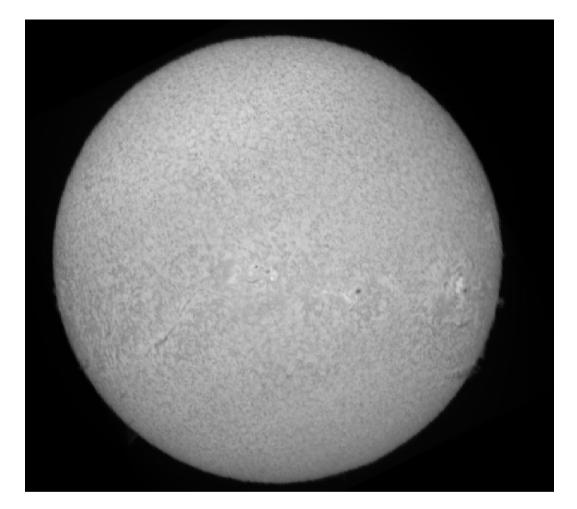
8000

6000

4000

2000





#### Limitation:

On n'a pas tenu compte de l'agitation thermique des atomes, d'autant plus forte qu'ils sont légers:

$$\frac{1}{2}$$
 m v<sup>2</sup> = 3/2 k T d'où v =  $(3 \text{ k T/m})^{1/2}$ 

Le <u>cœur</u> des raies d'atomes légers est élargi par effet Doppler et sa forme devient gaussienne <del>></del>

### Application:

← Exploration en altitude de la chromosphère solaire par balayage du profil de la raie Halpha de l'hydrogène à 656.3 nm

