Année L2 **Module Astrophysique, Phys210**
Université Pierre et Marie Curie
Bruno Sicardy

Cosmologie

Constante de gravitation: $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3 s^{-2} kg^{-1} Vitesse de la lumière: $c = 3.00 \times 10^8$ m s^{-1} Constante de Planck: $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s Valeur du parsec: 1 pc $\sim 3 \times 10^{16}$ m Masse du proton: $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg Constante de Hubble actuelle: $H_0 \sim 75$ km s^{-1} Mpc^{-1} (incertain!)

Loi de Hubble: Les observations montrent qu'à grande échelle les galaxies ont toutes une vitesse d'éloignement radiale de module v (par rapport à nous), proportionnelle à leur distance d:

$$v = H \times d,$$

où H est appelé constante de Hubble. NB. cette quantité est constante pour toutes les galaxies lointaines *à un moment donné*, mais H varie au cours du temps. L'indice 0, quand on écrit H_0, indique qu'il s'agit de la constante de Hubble *actuelle*.

1- La loi de Hubble implique-t-elle que nous sommes au centre de l'Univers?

2- Quelle est la dimension physique de la quantité H? On estime actuellement que $H_0 \sim 75$ km s^{-1} Mpc^{-1}. L'unité utilisée par les astronomes est-elle en accord avec votre analyse dimensionnelle?

3- Exprimer H_0 en unité SI. Calculer numériquement $1/H_0$. Comment peut-on interpréter cette valeur?

4- Modèle de Einstein.

On considère une galaxie de masse m, repérée à l'instant t par sa distance $r(t)$, et plongée dans un univers homogène de masse volumique ρ.

a- En utilisant le théorème de Gauss, calculer l'accélération subie par cette galaxie. Commenter cependant la difficulté qu'il y a à appliquer ce théorème dans ce cas précis.

b- En déduire l'équation du mouvement pour $r(t)$, puis pour le *facteur d'expansion* $R(t) = r(t)/r_0$, où r_0 est la distance à un moment arbitraire.

c- Discuter les modèles possibles d'évolution de l'Univers au cours du temps en fonction du paramètre Ω_m défini par:

$$\Omega_\mathrm{m} = \frac{\rho}{\rho_c}$$

où ρ_c est la *densité critique* définie par:

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi}\frac{H^2}{G}$$

On précisera ce que l'on appelle Univers ouvert, plat et fermé.

5- Modèle de Einstein-de Sitter. Ce modèle suppose que $\Omega_\mathrm{m} = 1$, i.e. $\rho = \rho_c$, ce qu'on peut exprimer en disant que l'énergie mécanique totale de l'Univers est nulle.

Calculer alors la densité critique ρ_c actuelle de l'Univers. L'exprimer en densité de matière, $n_{\rm mat}$ (nombre d'atomes d'hydrogène par m^3).

6- En déduire la densité d'énergie $e_{\rm mat}$ (en J m^{-3}) sous forme de matière dans le cadre de ce modèle.

7- Montrer que dans le cadre du modèle de Einstein-de Sitter, le facteur d'expansion varie comme:

$$R(t) \propto t^{2/3}.$$

8- En déduire que dans ce cas, l'âge de l'Univers est donné par:

$$t_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0}$$

Calculer t_0.

9- Horizon cosmologique: la lumière émise à l'instant du Big Bang n'a eu le temps de parcourir qu'une distance finie, appelée horizon cosmologique. Aucune information n'a eu le temps nous parvenir d'une région située au delà de cet horizon.

a- On considère tout d'abord le cas d'un univers statique. On note t_0 l'âge de l'univers (bien que le big bang n'existe pas pour un modèle statique). Calculer le rayon de l'horizon cosmologique dans ce modèle.

b- On se place maintenant dans le modèle d'Einstein-de Sitter. On rapelle la relation entre distance comobile (ou distance de coordonnée) et distance physique: $dr = R(t)dx$. Calculer la distance comobile dx parcourue par un photon en un intervale de temp dt.

c- Calculer la distance comobile parcourue jusqu'à l'instant présent par un photon émis lors du Big Bang. En déduire le rayon physique de l'horizon cosmologique. Calculer sa valeur en Mpc.

d- Calculer la densité critique de l'univers à l'instant présent dans le modèle d'Einstein-de Sitter. Sachant que la matière baryonique ne représente que 4% de la densité critique, et en prenant $5.\,10^{10} M_\odot$ pour la masse moyenne d'une galaxie, calculer le nombre de galaxies actuellement situées à l'intérieur de l'horizon cosmologique.

10- Le rayonnement du fond cosmologique est dû à la chaleur résiduelle provenant de l'époque où rayonnement (i.e. les photons) et matière étaient en équilibre thermodynamique. Ce rayonnement est donc celui d'un "corps noir", de température (mesurée) $T = 2.73$ K. L'essentiel de ce rayonnement est émis autour de la longueur d'onde $\lambda \sim 1$ mm.

On peut montrer qu'un corps noir de température T produit des photons avec une densité d'énergie radiative $e_{\rm rad}$ (en J m^{-3}) de:

$$e_{\rm rad} = \alpha T^4,$$

où la constante α vaut $\sim 7.6 \times 10^{-16}$ J m^{-3} K^{-4} (loi de Stefan).

Estimer $e_{\rm rad}$ actuelle dans l'Univers, et la comparer à $e_{\rm mat}$.

11- Estimer la densité de photons actuelle dans l'Univers, $n_{\rm rad}$, toujours dans le cadre du modèle Einstein-de Sitter. Comparer $n_{\rm rad}$ et $n_{\rm mat}$.

Montrer en conclusion que l'Univers actuel serait dominé en énergie par la matière, mais serait dominé en nombre par les photons.