

# Astronomie

## TRAVAUX DIRIGÉS

### Planètes du Système solaire

(Mouvements planétaires. Effets de marée. Système solaire)



Figure 1: *Planètes du Système solaire. L'échelle de la taille des planètes est respectée.*

#### Exercice 1 - *Distance Terre-Lune par la méthode des parallaxes*

En 1751, les astronomes Lalande et La Caille obtinrent la valeur de la distance Terre-Lune par la méthode des parallaxes.

Lalande se trouvait à Berlin et l'abbé de la Caille au Cap de Bonne Espérance. La même nuit, ils pointent avec leur lunette un même point (un cratère bien apparent) sur la

Lune, et lorsqu'elle passe au méridien, ils mesurent chacun l'angle  $z$  que fait la direction du point visé avec la verticale locale. L'angle  $z$  s'appelle la distance zénithale, ou l'angle de vue zénithal.

Ils obtiennent respectivement :  $z_1 = 53^{\circ}31'$  et  $z_2 = 34^{\circ}40'$ .

On donne les coordonnées géographiques suivantes :

Berlin ( $\varphi_1 = 52^{\circ}31'12''$  N et  $\lambda_1 = 13^{\circ}24'36''$  E),

Le Cap ( $\varphi_2 = 34^{\circ}24'36''$  S et  $\lambda_2 = 18^{\circ}28'26''$  E).

1 - Faire un schéma et en déduire les approximations qu'on sera en droit d'effectuer. Estimer la précision de la mesure.

2 - Calculer l'angle  $\alpha$  sous lequel on voit l'arc Berlin-Le Cap depuis la Lune.

3 - Calculer la distance  $d$  Terre-Lune, en rayon terrestre puis en km.

## Exercice 2 - Rotation de la Terre - Force de Coriolis

L'une des manifestations de la rotation de la Terre par rapport à un référentiel galiléen est l'effet Coriolis. Dans un référentiel lié à la Terre, la pseudo-force  $\Psi_c$ , force de Coriolis, agissant sur un corps de masse  $m$  en mouvement, et l'accélération de Coriolis (ou accélération complémentaire), sont données par :

$$\vec{\Psi}_c = -m\vec{a}_c \quad \text{avec} \quad \vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r \quad (1)$$

où  $\vec{\omega}$  est le vecteur rotation de la Terre et  $\vec{V}_r$  la vitesse relative (c'est-à-dire par rapport à la Terre) du corps considéré.

1 - Représenter schématiquement la Terre (équateur, axe des pôles), le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  et un point  $P$  quelconque de latitude  $\varphi$ .

2 - On définit un repère de coordonnées locales (lié à  $P$ ), de vecteurs unitaires  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , avec  $\vec{i}$  dirigé positivement vers l'est,  $\vec{j}$  vers le nord,  $\vec{k}$  vers le haut. Représenter ce repère.

Le vecteur vitesse  $\vec{V}_r$  a pour composantes  $(u, v, w)$  et peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{V}_r = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (2)$$

3 - Décomposer  $\vec{\omega}$  dans le repère local. Calculer la valeur numérique de  $\omega = \|\vec{\omega}\|$ .

**A - Vitesse verticale.**

1 - On considère la chute libre d'une pierre de masse  $m$  dans un puits vertical, de profondeur  $h$ , en un lieu de latitude  $\varphi$  à la surface de la Terre. On néglige les frottements de l'air.

a) Ecrire  $\vec{V}_r$  sous la forme définie par (2).

b) Calculer le module  $a_c$  de l'accélération, en fonction de la latitude et de  $V_r$ .

d) De quelle manière la pierre est déviée par rapport à la verticale ?

e) Au bout de 4 secondes de chute, quelle est la vitesse de la pierre, et quelle est son accélération de Coriolis comparée à l'accélération de la pesanteur, à une latitude de  $45^{\circ}$  ?

2 - Vidange de lavabo.

Lorsqu'on vide un lavabo, donner une estimation de la vitesse verticale d'écoulement de l'eau, puis de l'accélération de Coriolis. Montrer que la force de Coriolis *n'intervient en RIEN* dans le tourbillon.

**B - Vitesse horizontale.**

On considère une particule d'air, de masse  $m$ , de masse volumique  $\rho$ , en déplacement à la vitesse  $\vec{V}_r$  dans le plan horizontal. Ecrire  $\vec{V}_r$  sous la forme définie par (2).

1 - Montrer que dans ce cas, la composante horizontale de l'accélération de Coriolis peut se mettre sous la forme :

$$a_c = f V \quad \text{avec} \quad f = 2\omega \sin \phi \quad (3)$$

où  $V$  représente une vitesse. Montrer que  $V = \|\vec{V}_r\|$ .

2 - Cette force de Coriolis participe à la formation des mouvements tourbillonnaires des masses d'air qui donnent naissance aux cyclones, aux ouragans.

Montrer pourquoi les cyclones ne peuvent pas se développer au niveau de l'équateur.

On montre qu'à l'équilibre (dit géostrophique) la somme de la force de Coriolis et de la force de pression est nulle. On a une relation du type (en valeur absolue) :

$$f V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4)$$

où  $P$  est la pression et  $x$  une distance dans le plan horizontal.

Le gradient de pression est de l'ordre de  $\delta P = 10$  hPa pour  $\delta x = 1000$  km.

a) Vérifiez l'homogénéité de la relation (4) en écrivant l'équation aux dimensions.

b) Vérifier l'égalité (ordre de grandeur) des deux membres de l'équation (4), en considérant un vent de vitesse  $V = 20$  m.s<sup>-1</sup> et une latitude de 20°.

### Exercice 3 - Géométrie de l'ellipse

Soit une ellipse de centre  $O$ , de foyers  $F$  et  $F'$ , avec  $OA = a$ , demi-grand axe et  $OB = b$ , demi-petit axe. On a  $OF = c$  et on pose, par définition de l'excentricité  $e$ ,  $c = ae$ .

1 - Excentricité et aplatissement.

a) Représenter tous ces éléments sur un figure. Donner une expression de  $e$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

b) L'aplatissement  $f$  est défini par  $f = (a - b)/a$ . Exprimer  $e$  en fonction de  $f$  et réciproquement. Tracer le graphe  $f(e)$ .

c) Comparer  $c/a$  et  $(a - b)/a$  pour des excentricités de 0.001, 0.01, 0.1 et de 0.5, 0.7, 0.9.

d) Même question que c), en prenant la valeur de l'excentricité de l'orbite de Mars.

*Remarque* - Kepler formula ainsi, en 1600, ce qui allait devenir sa première loi : l'orbite de Mars est circulaire et le Soleil n'est pas en son centre. Kepler utilise la notion d'ellipse à partir de 1603. Il écrira plus tard : "J'ai d'abord admis que l'orbite des planètes était un cercle parfait. Cette erreur m'a coûté d'autant plus de temps qu'elle était soutenue par l'autorité de tous les philosophes et était métaphysiquement tout-à-fait plausible". Voir Fig. 2.

2 - Equations cartésienne et polaire.

On considère un système d'axes orthonormés, centré en  $O$ ,  $Ox$  selon  $OA$  et  $Oy$  selon  $OB$ .

a) Ecrire l'équation de l'ellipse en coordonnées cartésiennes.

b) On prend  $F$  comme origine des coordonnées polaires,  $r = \|\overrightarrow{FM}\|$  et  $\theta = (\overrightarrow{Fx}, \overrightarrow{FM})$ ,  $M$  étant un point de l'ellipse. Etablir la relation entre les deux systèmes de coordonnées, et calculer l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires.

#### Exercice 4 - *Calculs de périodes synodiques*

Pour les calculs de période synodique, on identifiera clairement la période synodique  $T_r$ , la période sidérale  $T_a$  du corps considéré et la période sidérale  $T_e$  du référentiel en mouvement. On utilisera les données astronomiques notées sur la feuille annexe.

a) Jour sidéral terrestre.

Le jour moyen ( $J_m = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ secondes}$ ) correspond à une période synodique, le référentiel terrestre (qui permet de mesurer  $J_m$ ) étant en mouvement autour du Soleil. Exprimer  $J_s$ , jour sidéral, en secondes.

b) Lunaison sidérale.

Un "mois lunaire" dure, en moyenne, 29.53 jours. Calculer la durée du mois sidéral, période sidérale de la Lune autour de la Terre.

c) Jour et an de Vénus.

Pour la période de rotation de Vénus, bien regarder la valeur de l'obliquité, et en déduire les conséquences.

Calculer la longueur d'un jour vénusien (l'exprimer en jour  $J_m$ ).

#### Exercice 5 - *Les trois lois de Kepler*

1 - Loi des ellipses

a) On considère un corps  $M$  en orbite képlérienne (ellipse, définie par  $a, e$ ) autour d'un centre attractif  $O$  (défini par  $\mu$ ), et on pose  $r = OM$ . Exprimer  $r$ , noté  $r_p$  (resp.  $r_a$ ) lorsque  $M$  passe au périhélie (resp. aphélie), en fonction de  $a$  et de  $e$ .

b) La vitesse  $V$  du point  $M$  est donnée par:

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (5)$$

Calculer  $V_p$  et  $V_a$  ainsi que le moment cinétique (par unité de masse) au périhélie et à l'aphélie. Exprimer  $V_p/V_a$  de manière très simple en fonction de  $e$  uniquement.

2 - Loi des aires

Utilisez vos connaissances sur l'orbite héliocentrique de la Terre pour montrer, en appliquant la loi des aires, que les saisons ne sont pas égales (en durée) entre elles.

a) Définir ce qu'est une "saison" en mécanique céleste.

b) A l'aide du calendrier, évaluer la durée (en jour) de chaque saison.

3 - Loi harmonique

En prenant, comme unité, l'année pour le temps et l'unité astronomique pour la distance, écrire de manière très simple la troisième loi de Kepler.

Calculer, pour les planètes du Système solaire, la valeur du rapport  $T^2/a^3$ .

#### Exercice 6 - *La constante de Gauss*

La constante de Gauss a pour valeur de définition, en radian/jour :

$$k = 0.017\,202\,098\,95$$

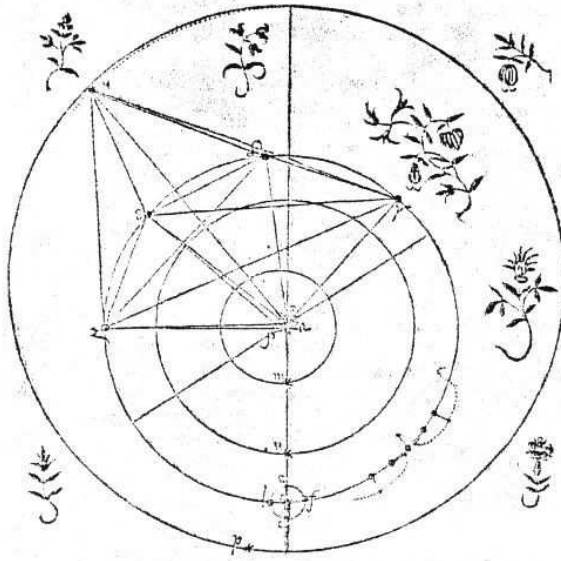


Figure 2: *Dessin de l'orbite de Mars, par Kepler. Positions de Mars, dans un référentiel héliocentrique. L'observation de Mars est faite à quatre dates différentes, mais qui correspondent toutes à une même position sidérale de la planète. Mars occupe alors la même position par rapport aux étoiles, les dates étant séparées par des intervalles de temps multiples de la période sidérale de révolution. Ceci a permis à Kepler la reconstruction de l'orbite de Mars. (Bibliothèque de l'Observatoire de Paris).*

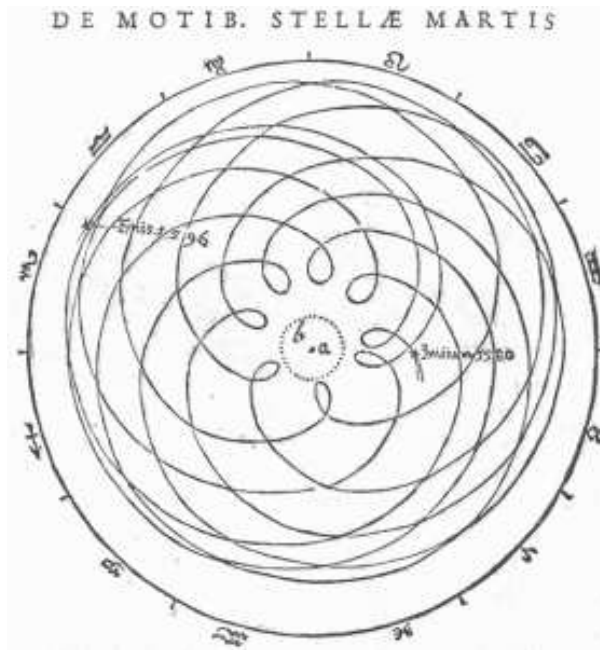


Figure 3: *Dessin de l'orbite de Mars, par Kepler. Positions de Mars, dans un référentiel géocentrique, entre les années 1580 et 1596 (notées sur la figure). La Terre, notée a, est au centre et le Soleil, b, orbite sur le cercle en pointillé. Au cours de l'année martienne, la distance Terre-Mars peut varier dans des proportions de 1 à 6. (Bibliothèque de l'Observatoire de Paris).*

Si on l'exprime en degré/jour :

$$k = 0.985\ 607\ 668\ 425$$

- a) Rappeler la définition de la constante de Gauss. Calculer sa dimension.
- b) Calculer la période  $T_o$  d'un point de masse négligeable en orbite képlérienne, de demi-grand axe  $a = 1$  ua.
- c) Calculer la période  $T_T$  de la Terre sur cette même orbite, en tenant compte de la masse de la Terre. On note  $M_T$  la masse de la Terre,  $M_S$  celle du Soleil, et on pose  $\alpha = M_T/M_S$  :

$$\frac{M_S}{M_T} = \frac{1}{\alpha} = 332\ 946$$

### Exercice 7 - Etoile double et lois de Kepler

On observe un système d'étoile double, constitué de deux étoiles A et B. Sa parallaxe annuelle est  $\pi = 0.379''$  (chacune des deux étoiles a la même parallaxe  $\pi_A = \pi_B = \pi$ ). On considère que la masse de B est très petite devant celle de A.

- a) Quel est le mouvement de B rapport à A ?
- b) Quelle est la relation entre la distance de l'étoile double au Soleil,  $d$  en parsec, et sa parallaxe  $\pi$  en arcsec. Calculer la valeur de  $d$  en parsec puis en U.A.
- c) On mesure la dimension angulaire du demi-grand axe de l'orbite,  $\alpha = 7,7''$ . Quelle est la valeur du demi-grand axe  $a$  de l'orbite de B autour de A ? Donner le résultat en U.A.
- d) La période de révolution est  $T = 49,5$  ans. Comment s'écrit la troisième loi de Kepler reliant  $T$  et  $a$  dans ce système d'étoile double ? Quelle est la masse de l'étoile A ? (on précisera bien l'unité du résultat obtenu).

### Exercice 8 - Le "problème de Kepler"

L'excentricité de l'orbite est notée  $e$ . On appelle  $v$ ,  $E$  et  $M$  les anomalies vraie, excentrique et moyenne, respectivement. On rappelle que  $M$  s'obtient directement à partir de  $v$  par une formule analytique. Mais pour obtenir  $v$  à partir de  $M$ , il faut passer par l'intermédiaire de  $E$  et résoudre le *problème de Kepler*.

L'équation de Kepler s'écrit :

$$M = E - e \sin E \tag{6}$$

et on obtient ensuite  $v$  à partir de  $E$  par :

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \tag{7}$$

On indique ici trois méthodes pour résoudre l'équation (6).

*Note* - Il existe une multitude de méthodes pour résoudre cette équation. Nous en proposons deux par itération et une utilisant les développements limités. Les méthodes par itération sont très bien adaptées au calcul par informatique.

*Attention* – Si les angles sont donnés en degré, il est bien évident que, dans les formules mêlant angles et fonctions circulaires, les angles doivent être exprimés en radian.

- Méthode 1 : par itération (par substitution).

On écrit (6) sous la forme :  $E = M + e \sin E$ . On part de  $E = M$ , et on porte ensuite, au cours des itérations, la valeur de  $E$  trouvée à gauche dans l'expression de  $E$  à droite.

- Méthode 2 : par itération (Méthode de Newton).

Pour obtenir une convergence plus rapide, la méthode de Newton consiste à approcher une courbe par sa tangente au point de contact. On obtient la formule d'itération :

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - M}{1 - e \cos E_n} \quad (8)$$

- Méthode 3 : par les développements limités.

La valeur de  $E$  s'obtient par un développement limité. Pour les planètes du Système solaire, on peut arrêter ce développement à l'ordre 3 (en tout état de cause, cette série diverge pour  $e > 0.6627\dots$ ).

$$E = M + \left( e - \frac{e^3}{8} \right) \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{3e^3}{8} \sin 3M \quad (9)$$

1 - Calculer  $E$ , puis  $v$ , pour toutes les valeurs de  $M$ , de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ , avec un pas de  $60^\circ$ , pour des excentricités  $e = 0.01$ ,  $e = 0.1$ ,  $e = 0.2$ , en utilisant chaque méthode. Noter les valeurs successives de  $E$  durant l'itération, pour les méthodes 1 et 2. Discuter la rapidité de convergence. Comparer les résultats.

2 - Calculer la distance Soleil-Mars pour  $M = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  et  $360^\circ$ . Donner le résultat en UA.

### Exercice 9 - Peser la Voie Lactée

(d'après un problème "obspm.fr")

Notre galaxie, la Voie Lactée, a la forme d'une galette d'environ 30 000 pc (parsec) de diamètre et 2 000 pc d'épaisseur. La région centrale est formée d'un bulbe d'allure sphérique de 2 700 pc de rayon, qui contient l'essentiel de la masse galactique. Le Soleil orbite à 8 000 pc du centre galactique.

D'après les mesures Doppler effectuées sur la raie à 21 cm de l'hydrogène, l'orbite du Soleil est approximativement circulaire, et la vitesse orbitale du Soleil est d'environ 220 km/s.

- Déterminer la période  $T$  du mouvement du Soleil autour du centre galactique. L'exprimer en années.
- Estimer la masse du bulbe galactique, en unité de masse solaire  $M_S$ .

### Exercice 10 - Rétrogradation de Mars

Dans un système géocentrique (ce qui correspond évidemment à ce qu'on observe depuis la Terre), la planète Mars semble s'arrêter et repartir dans l'autre sens, puis finalement se remettre en route dans le bon sens ... Voir Fig.3 et Fig. 4.

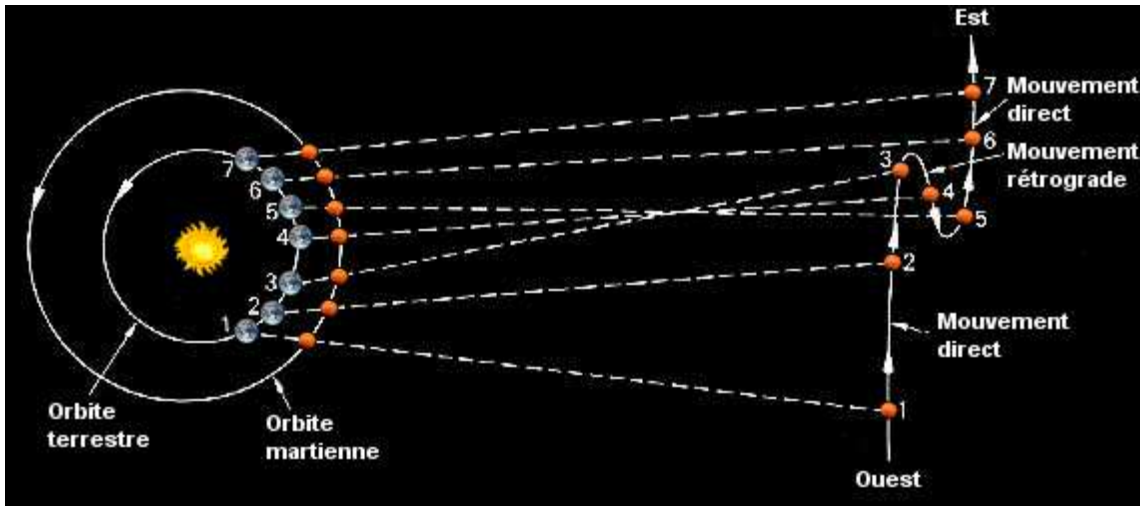


Figure 4: (haut) Le phénomène de rétrogradation s'explique par les positions relatives de la Terre et de Mars. Crédit image : P. Labrot, d'après S. Glasstone, "The Book of Mars".

(g.) Composition de photographies prises entre juillet 2005 (en bas, à dr.) et février 2006 (en haut, à g.), une image tous les 7 jours. L'opposition a eu lieu le 7 novembre 2005 (centre de l'image). Date des points "stationnaires" : 1 octobre et 10 décembre. En haut et à g. de l'image, on reconnaît les Pléiades. Crédit image : Tunc Tezel & NASA.

Ce phénomène est connu sous le nom de "rétrogradation de la planète Mars" et il n'a été expliqué de manière convenable (et très simple) qu'avec Copernic. Nous allons chercher à obtenir une représentation graphique de ce phénomène (tracé à l'ordinateur, ou à défaut, à la calculatrice graphique).

#### 1 - Cas simplifié.

Nous considérons que la Terre et Mars ont des orbites circulaires concentriques, de rayons respectifs (UA) 1 et 1.5, avec des périodes (années terriennes) de 1 et 2.

a) On prend l'origine des temps à l'opposition : Soleil, Terre, Mars alignés, dans cet ordre, comme aux dates suivantes :

28-08-2003, 07-11-2005, 24-12-2007, 29-01-2010, 03-03-2012, 08-04-2014.

Ecrire les coordonnées de la Terre et de Mars dans un repère héliocentrique. On utilisera la représentation paramétrique  $x = x(t)$  et  $y = y(t)$ .

b) Ecrire maintenant les coordonnées de Mars dans un repère géocentrique. Tracer le graphe représentant, durant 2 ans, le déplacement de Mars vu de la Terre.

c) Reprendre les équations de l'orbite héliocentrique de Mars avec 1.52 (au lieu de 1.5) pour la distance et 1.88 (au lieu de 2) pour l'année.

2 - Cas plus précis.

On considère l'orbite terrestre comme circulaire, centrée sur le Soleil. D'après ce qu'on a vu dans l'ex. 2 d), montrer que l'orbite galiléenne de Mars peut être considérée comme un cercle décentré de 0.14 UA par rapport au Soleil.

Reprendre les équations et tracer le graphe de la position géocentrique de Mars (tracer sur une dizaine d'années).

### Exercice 11 - *Satellites et densité des planètes*

On considère un satellite en orbite autour d'une planète (constante d'attraction  $\mu = \mathcal{G}M$ , rayon  $R$ ), à une altitude nulle (satellite "au ras du sol").

Ecrire sa période képlérienne, notée  $T_{h=0}$ .

En écrivant la masse  $M$  en fonction de la masse volumique moyenne  $\rho$ , exprimer de manière très simple  $T_{h=0}$  en fonction de  $\rho$  et  $\mathcal{G}$  uniquement.

### Exercice 12 - *Amalthée, satellite de Jupiter*

L'orbite d'Amalthée (nommé aussi Jupiter V) autour de Jupiter a les caractéristiques suivantes :  $a = 181,3 \cdot 10^3$  km,  $e = 0,003$ . Elle est dans le plan équatorial de Jupiter.

On donne pour Jupiter : rayon  $R = 71,5 \cdot 10^3$  km,  $\mu = 1,2669 \cdot 10^{17}$  u. SI et  $J_2 = 0,01485$ .

a) Donner la signification du terme  $J_2$ .

b) Calculer le moyen mouvement  $n$ , et en déduire la période  $T$  du mouvement de révolution d'Amalthée. Exprimer  $T$  en jour.

c) La vitesse de précession apsidale  $\dot{\omega}$  est donnée par :

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} n J_2 \left[ \frac{R}{a(1-e^2)} \right]^2 (5 \cos^2 i - 1) \quad (10)$$

où  $i$  représente l'inclinaison de l'orbite. Quelle est sa valeur ici ? Calculer  $\dot{\omega}$ , l'exprimer en u. SI puis en degrés par jour.

### Exercice 13 - *Théorie de Milankovitch*

Théorie astronomique des paléoclimats (par les variations des éléments képlériens de l'orbite terrestre).

1 - Les 6 éléments képlériens permettant de repérer un corps céleste en orbite autour d'un corps attractif sont notés :

$$a, e, i, \Omega, \omega, M$$

Donner le nom et la signification de ces 6 éléments.

2 - On considère la Terre comme un satellite en orbite autour du Soleil. Que représentent ces 6 éléments dans le cas de l'orbite terrestre ? Donner les valeurs actuelles (si on veut être précis, au 01 janvier 2000, à 12h 00).

3 - Le paramètre  $i$  représente l'obliquité  $\varepsilon$ . Expliquer sa relation avec les cercles polaires et les tropiques, sur Terre.

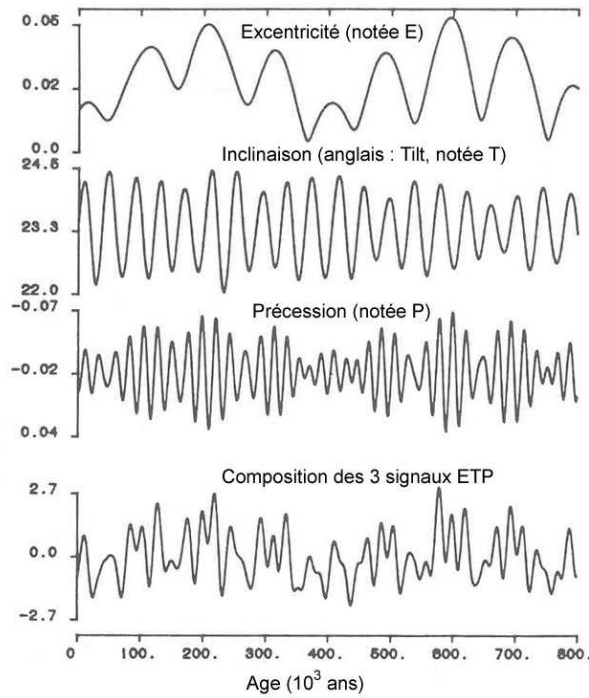


Figure 5: *Théorie de Milankovitch - théorie des paléoclimats de A. Berger. Variation au cours du temps (passé) de l'excentricité  $e$  (notée  $E$  sur cette figure), de l'obliquité  $\varepsilon$  (notée  $T$ ), du paramètre de précession climatique  $P$ . D'après A. Berger, 1978.*

4 - On choisit, comme unité de temps, le millier d'années, noté ka (kilo-ans).

*Eléments métriques* :  $a$ ,  $e$ ,  $\varepsilon$ .

Ils ne subissent pas de variation séculaire ;  $e$  et  $\varepsilon$  présentent une variation périodique :

- $e$ , entre 0.005 et 0.050, avec une période de 100 ka (et 400 ka),
- $\varepsilon$ , entre  $22^\circ$  et  $25^\circ$ , avec une période de 41 ka.

*Eléments angulaires* :  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $M$ .

Ils subissent une variation séculaire (on ne s'occupe pas ici de  $M$ ) :

- $\Omega$  varie de  $2\pi$  radians (sens rétrograde) en 26 ka,
- $\omega$  varie de  $2\pi$  radians (sens direct) en 110 ka.

*Paramètre de précession climatique  $P$ .*

Dans la théorie de Milankovitch, on utilise l'angle  $\varpi$ , qui est la longitude du périégée mesurée par rapport au point vernal (qui est une origine variable dans un référentiel galiléen). La théorie des paléoclimats montre que le paramètre prépondérant est la quantité

$$P = e \sin(\varpi)$$

appelé paramètre de précession climatique.

a) Exprimer  $\varpi$  en fonction de  $\Omega$  et  $\omega$  (attention aux signes). Calculer le cycle de sa variation (le temps, en ka, mis pour varier de  $2\pi$  radians).

b) Tracer, en parallèle, sur 6 graphes différents, les variations des paramètres orbitaux

$a, e, \varepsilon, \Omega, \omega$ , auxquels on ajoutera celle de  $\varpi$ . Le temps sera à la même échelle sur les 6 graphes (de 0 à 500 ka environ).

c) Représenter le paramètre de précession climatique sur 1 Ma (méga-an). On considèrera le cas simplifié où  $e$  varie de manière sinusoïdale, entre 0.005 et 0.050 avec une période de 100 ka.

*Remarque* – Ces calculs sont ici très simplifiés. Dans la théorie complète (et dans les faits ...), les variations des paramètres vus ici sont représentées par des sommes de termes d'amplitudes et de périodes diverses. Voir Fig. 5.

### Exercice 14 - Points de Lagrange L1 et L2

On considère deux corps célestes  $A$  et  $B$  (de constante d'attraction gravitationnelle respective  $\mu_A$  et  $\mu_B$ ), isolés dans l'espace. Le corps  $B$ , beaucoup plus petit que  $A$ , a une orbite considérée comme circulaire autour de  $A$ .

On considère un troisième corps  $M$ , de masse négligeable devant celle de  $B$ . On veut déterminer la position des points d'équilibre dynamique de  $M$  par rapport à  $A$  et  $B$ . On se limite aux points qui sont au voisinage de  $B$  (c'est-à-dire les points de Lagrange L1 et L2, équilibre instable).

On cherche ces points sur l'axe  $AB$ , proches de  $B$ , l'un à l'intérieur de l'orbite (sur le segment  $AB$ ), l'autre à l'extérieur. On pose  $d = AB$  et  $r = BM$  et on pourra utiliser les variables réduites (sans dimension)  $x = r/d$  et  $k = \mu_A/\mu_B$ , avec  $x \ll 1$  et  $k \gg 1$ .

Une fois qu'on a réfléchi au problème, il sera intéressant de traiter les deux cas conjointement, avec des équations communes, à l'aide du paramètre  $\varepsilon$  (avec  $\varepsilon = -1$  pour L1 et  $\varepsilon = +1$  pour L2).

a) Représenter schématiquement les points  $A, B, M$ . Ecrire les accélérations gravitationnelles en  $M$ , dues aux corps  $A$  et  $B$ .

b) Ecrire l'accélération de  $M$  (en coordonnées polaires, référentiel centré en  $A$ ) et appliquer le principe fondamental de la dynamique. En déduire la position des points L1 et L2.

c) Application. Calculer les distances entre  $B$  et  $L_i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) dans le cas où :

- $A$  et  $B$  représentent le Soleil et la Terre,
- $A$  et  $B$  représentent la Terre et la Lune.

### Exercice 15 - Exemple de résonance - la planète Mercure

a) Représenter l'orbite circulaire héliocentrique de Mercure. En 1/6 d'année mercurienne, la planète tourne de 1/4 de tour par rapport à un référentiel galiléen. Représenter la position de la planète durant deux ans (montrer 12 positions successives).

b) En déduire, par rapport à l'année mercurienne (=88 jours terrestres), la longueur de la journée sidérale et celle de la journée mercurienne. Expliquer l'expression "résonance 3:2".

*Remarque* – Pour l'orbite réelle de Mercure (très excentrée), voir document séparé.

### Exercice 16 - Exemple de résonance - satellites et anneaux planétaires

*Note* – La dynamique des satellites et anneaux planétaires montre de très nombreux cas de résonance, comme les satellites "bergers" dans les anneaux de Saturne. J.-D. Cassini a identifié, en 1684, les anneaux de cette planète, mais on sait, depuis 1989, que les autres planètes gazeuses possèdent aussi un système d'anneaux. L'exemple suivant porte sur Neptune.

L'orbite du satellite Galatea a un demi-grand axe  $a_0 = 61\,953$  km. Les arcs d'anneaux de Neptune sont sur une orbite voisine, mais un peu plus lointaine, dont le demi-grand axe est  $a_1 = a_0 + 984$  km.

a) En exprimant le rapport des demi-grands axes sous la forme :

$$\frac{a_1}{a_0} = 1 + x \quad \text{avec} \quad x \ll 1$$

donner la valeur du rapport des périodes respectives en fonction de  $x$ .

b) Dans le cas d'une résonance de ce type, le rapport des périodes est de la forme  $(n+1)/n$ , où  $n$  est un entier naturel. Exprimer  $n$  en fonction de  $x$ .

c) Avec les valeurs numériques des demi-grands axes  $a_0$  et  $a_1$ , trouver la valeur de l'entier  $n$ . Ecrire la résonance.

### Exercice 17 - Jour et an sur Vénus

La planète Vénus a une période sidérale de révolution autour du Soleil de 224.70 jours (sens direct) et une période sidérale de rotation sur elle-même de 243.02 jours (sens rétrograde).

A) Jour de Vénus.

a) Représenter, dans un référentiel galiléen centré sur le Soleil, la position d'un point situé à la surface de Vénus.

b) Calculer la durée du jour vénusien, c'est-à-dire l'intervalle de temps, pour un point de Vénus, entre deux passages à midi (Soleil dans le plan méridien local).

B) Jour de Vénus et position de la Terre.

a) Tracer schématiquement, dans un repère héliocentrique, les orbites (circulaires et coplanaires) de Vénus et de la Terre. On repère Vénus (notée V) par l'angle polaire  $\alpha_V$  et la Terre (notée T) par  $\alpha_T$ , par rapport à un axe origine arbitraire.

Représenter une situation de *conjonction inférieure* (alignement Soleil-Vénus-Terre, dans cet ordre). A cet instant  $t = 0$ , origine, on a  $\alpha_V = \alpha_T = 0$ .

Calculer l'intervalle de temps  $T_c$  qui sépare deux conjonctions inférieures de Vénus.

b) Représenter la position de V et T au temps  $t = T_c$ . Vérifier en calculant  $\alpha_V$  et  $\alpha_T$ .

c) On place sur Vénus un drapeau dirigé vers la Terre. L'angle entre l'axe de ce drapeau et l'axe origine est  $\beta_V = 0$  à l'instant  $t = 0$ . Calculer l'angle  $\beta_V$  pour  $t = T_c$ .

Montrer que ce calcul indique une relation (résonance) entre la rotation de Vénus sur elle-même (jour vénusien) et la révolution de la Terre autour du Soleil (an terrestre).



Figure 6: La comète P/Shoemaker-Levy 9 est disloquée sous l'effet des forces de marée dues à Jupiter. Reconstitution à partir d'images prises par le satellite Hubble, du 16 au 22 juillet 1994. Crédit image : JPL/NASA

### Exercice 18 - Limite de Roche

Au voisinage d'un gros corps  $A$ , un petit corps  $B$  est détruit par effet de marée s'il est en-deça de la limite de Roche, définie par :

$$d_R = 2.4 \left( \frac{\rho_A}{\rho_B} \right)^{\frac{1}{3}} R_A \quad (11)$$

où  $R_A$  est le rayon du corps  $A$ ,  $\rho_A$  sa masse volumique et  $\rho_B$  la masse volumique de  $B$ .

Pour répondre aux questions suivantes, on consultera la feuille annexe contenant les données géodésiques et astronomiques des planètes du Système solaire.

a) Calculer  $d_R$  pour la Terre et un corps du type Lune ( $\rho_B = 3.50 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ). Vérifier que la Lune est hors de la limite de Roche.

b) Le système de la planète Saturne comprend des anneaux et des satellites.

Historiquement, les anneaux de Saturne sont ainsi dénommés, en allant du plus petit rayon au plus grand : D, C, B, division de Cassini et A. Le rayon interne de l'anneau D est 67 000 km, le rayon externe de A est 137 000 km. On considèrera leur masse volumique égale à celle de Saturne. Pour le satellite Mimas, on donne : demi-grand axe de l'orbite  $a = 186 \text{ 000 km}$ ,  $\rho_B = 1.2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Calculer  $d_R$  pour Saturne-anneaux et pour Saturne-Mimas. Conclure à propos de la limite de Roche.

c) Le Soleil à un rayon  $R_A = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$  et une masse volumique  $\rho_A = 1.4 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ . Calculer la limite de Roche pour une comète de masse volumique  $\rho_B = 0.2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ . Que dire pour la comète de Halley qui passe au périhélie à la distance de  $8.8 \cdot 10^7 \text{ km}$  ?

d) Calculer  $d_R$  pour Jupiter et une comète. Voir, Fig. 7, ce qui arrive lorsqu'une comète franchit la limite de Roche.

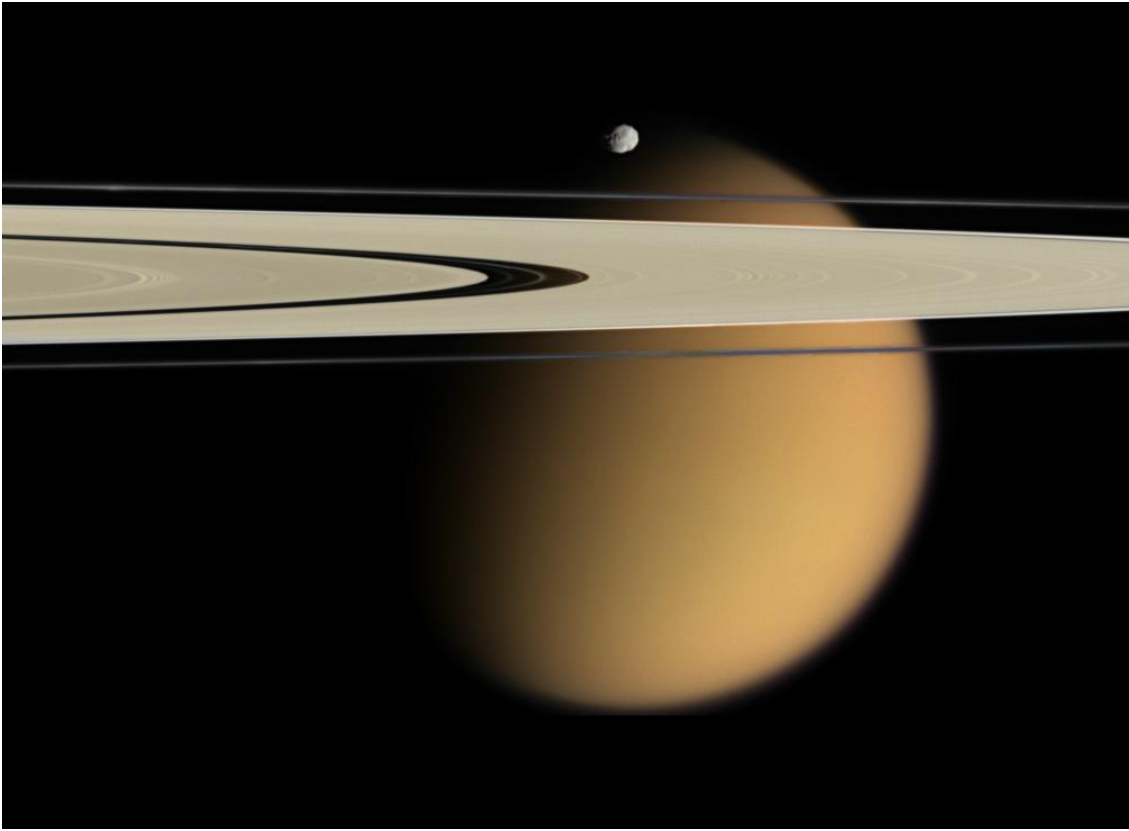


Figure 7: *Vue des anneaux A et F de Saturne et du satellite Epiméthée. En arrière plan, Titan entouré d'atmosphère.*

*Image obtenue par la sonde Cassini, le 28 avril 2006, avec la caméra à angle étroit. Distance approximative : 667 000 kilomètres d'Epiméthée et 1.8 million km de Titan.*

*Un pixel correspond à 4 kilomètres sur Epiméthée et 11 km sur Titan. Image en fausses couleurs. Crédit image : JPL/NASA*

### **Exercice 19 - Prométhée et Pandore, petits satellites de Saturne**

Les deux petits satellites de Saturne, Prométhée et Pandore, ont été découverts en 1980 grâce aux images de Voyager-2.

Leurs masses sont très petites, de l'ordre de  $4 \cdot 10^{-10} M_{\text{Sat}}$ , avec une densité voisine de celle de Saturne. Les orbites sont circulaires et équatoriales.

On donne leur moyen mouvement :

$$n_1 = 6.797331 \cdot 10^{-3} \text{ degré/sec. pour Prométhée ;}$$

$$n_2 = 6.629506 \cdot 10^{-3} \text{ degré/sec. pour Pandore.}$$

Ces deux satellites présentent une résonance.

Les demi-grands axes des orbites sont notés respectivement  $a_1$  et  $a_2$ .

1 - Résonance.

a) La résonance est notée  $N_1 : N_2$ . On donne  $N_1 = 118$ . Calculer  $N_2$  sachant que  $N_2 > N_1$ .

b) Calculer la période, en jour (jour moyen), de chaque satellite. Au bout de combien de jours vont-ils se retrouver au plus proche ?

c) Calculer  $a_1$  et  $a_2$ , ainsi que  $\delta a$ , distance minimale entre les satellites. Exprimer  $\delta a$  en km et en  $R_{\text{Sat}}$ , rayon équatorial de Saturne.

d) Montrer qu'on peut exprimer la distance relative  $\delta a/a_1$  uniquement en fonction des nombres de résonance  $N_1$  et  $N_2$ .

2 - Limite de Roche.

Calculer la limite de Roche relative à Prométhée et Pandore.

Par une recherche bibliographique, situer Prométhée, Pandore et d'autres petits satellites de Saturne par rapport aux anneaux. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

---

### Documents séparés

- Grandeurs géodésiques et astronomiques relatives aux planètes du Système solaire.
- Représentation de la sphère céleste et des six éléments képlériens.
- Mercure : résonance 3:2
- Théorie de Milankovitch.

LP210 - Partie du cours *Planètes du Système solaire*

(*Mouvements planétaires. Effets de marée. Système solaire.*)

Michel Capderou, UPMC.

capderou@lmd.polytechnique.fr

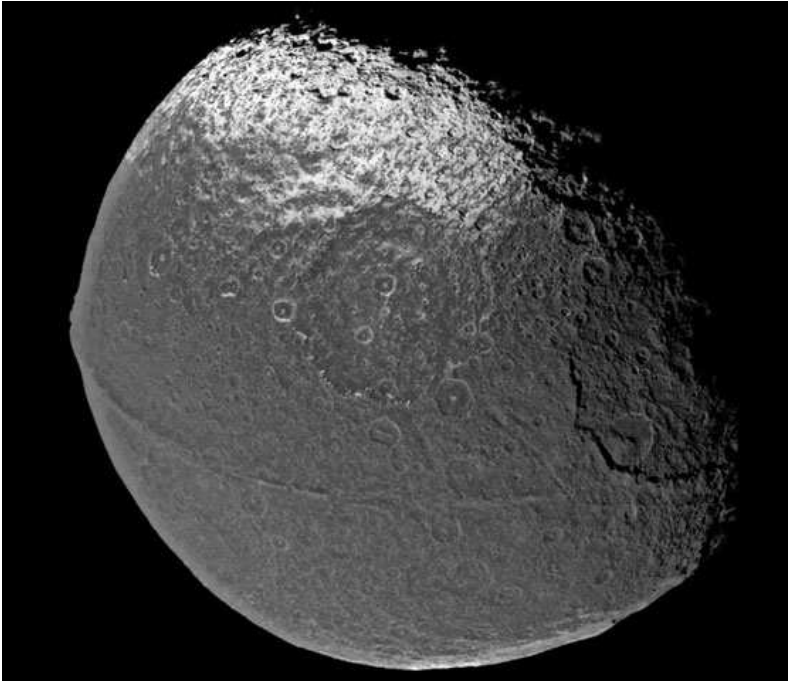
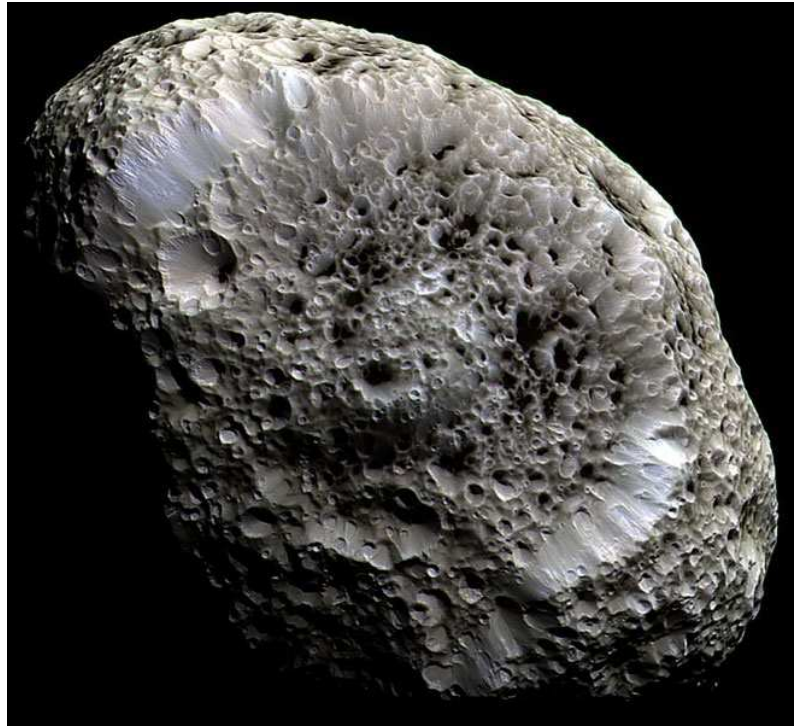


Figure 8: Deux des plus étonnants satellites de Saturne, photographiés par la sonde Cassini.  
(a) Hypérion, avec une structure de "ruche", de densité très faible. Sa rotation est chaotique (il n'est pas bloqué en résonance 1:1 avec Saturne).  
(b) Japet, avec une partie très foncée et une autre très claire, présente sur son équateur une barrière montagneuse de 18 km d'altitude.  
Documents : Cassini Imaging Team, SSI, JPL, ESA, NASA.