La vie des étoiles

Problème: expliquer une source d'énergie énorme pendant des milliards d'années

Impossible à expliquer avant le XX^{ème} siècle

Temps chimique

$C + 2O \rightarrow CO_2$

typiquement: $e_{chim} \sim 1$ eV

$\sim 10^{-19}$ J/molécule

énergie disponible $\sim M.e_{chim}/\mu$

temps de vie « chimique »:

$$\boxed{t_{chim} \sim \frac{M \cdot e_{chim}}{L \cdot \mu} \sim 10^4 \text{ ans}}$$

Le théorème du viriel

Très général: systèmes **auto-gravitants**
en **équilibre**

Relie: énergie potentielle E_{pot} et
énergie cinétique E_{cin}

Applications: étoiles
amas globulaires
amas galaxies

En moyenne temporelle:

$$\boxed{\overline{E}_{pot} + 2 \cdot \overline{E}_{cin} = 0}$$

Applications: rayonnement d'un astre
température interne d'un astre

$$E = E_{cin} + E_{pot}$$

$$E_{cin} \sim \frac{3}{2}\frac{M}{\mu}k\overline{T}$$

$$E_{pot} \sim -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

$$E_{cin} \sim -\frac{1}{2} \cdot E_{pot} \text{ (viriel)}$$

$$E \sim \frac{E_{pot}}{2}$$

d'où:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{T} &\sim \frac{1}{5} \cdot \frac{GM\mu}{kR} \\ L \sim -\dot{E} &\sim -\frac{3}{10} \cdot \frac{GM^2}{R^2} \cdot \dot{R} \end{aligned}}$$

en fait au centre:

$$\boxed{T_{centre} \sim \frac{GM\mu}{2kR}}$$

Temps de Kelvin-Helmholtz

$$L \sim -\frac{3}{10} \cdot \frac{GM^2}{R^2} \cdot \dot{R}$$

AN:

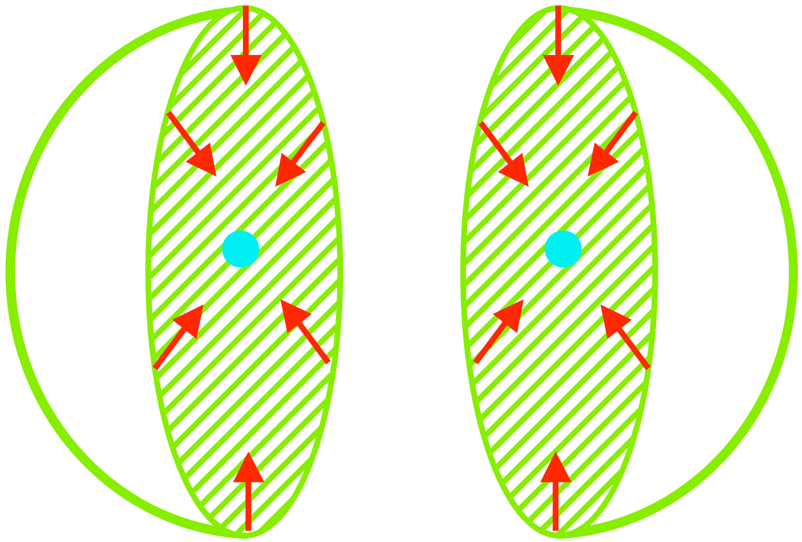
$$\begin{cases} L \sim 4 \times 10^{26}\, W \\ M \sim 2 \times 10^{30}\, kg \\ R \sim 7 \times 10^{5}\, km \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{centre} \sim 10^{7}\ \mathrm{K} \\ \dot{R} \sim -50\ \mathrm{m/an} \end{cases}$$

Si *L* uniquement dû à contraction gravitationnelle,
Alors durée de vie = temps de *Kelvin-Helmholtz:*

$$\boxed{t_{K-H} \sim \frac{R}{|\dot{R}|} \sim 10^{7}\ \mathrm{ans}}$$

temps court… (NB: ok pour *Jupiter*)

Equilibre d’une étoile



Analyse dimensionnelle: $$P_{grav} \sim \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4}$$

$$P_{grav} \sim P_{therm} + P_{Fermi}$$

où:

$$P_{therm} = P_{particules} + P_{photons}$$

Pression thermique

$$P_{therm} = (n_e + n_p)kT = 2n_p kT \sim \frac{2\rho}{m_p} kT$$

$$T \sim \frac{GMm_p}{5kT}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

d'où:

$$\boxed{P_{therm} \sim \frac{3}{10\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4} \sim P_{grav}!}$$

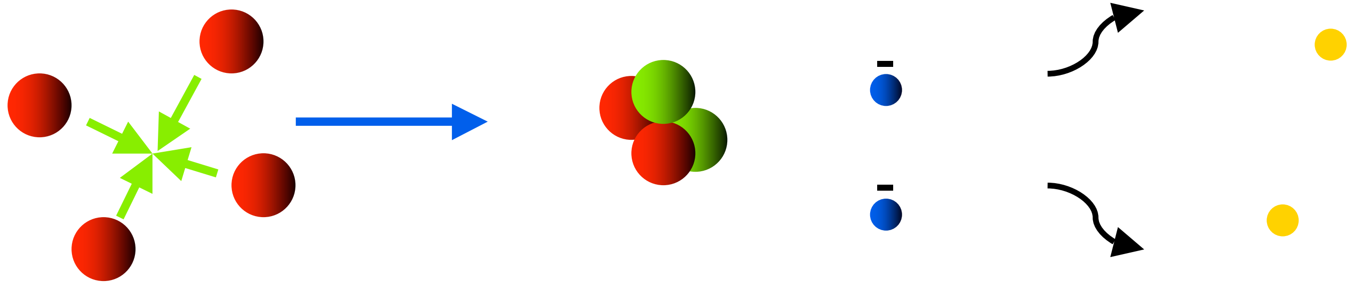
donc: le chauffage de l'étoile *via* le viriel est suffisant pour équilibrer le poids (sur le temps de Kelvin-Helmholtz…)

Temps nucléaire

Equivalence masse-énergie: (Einstein)

$E=mc^2$

Transformation hydrogène-hélium:



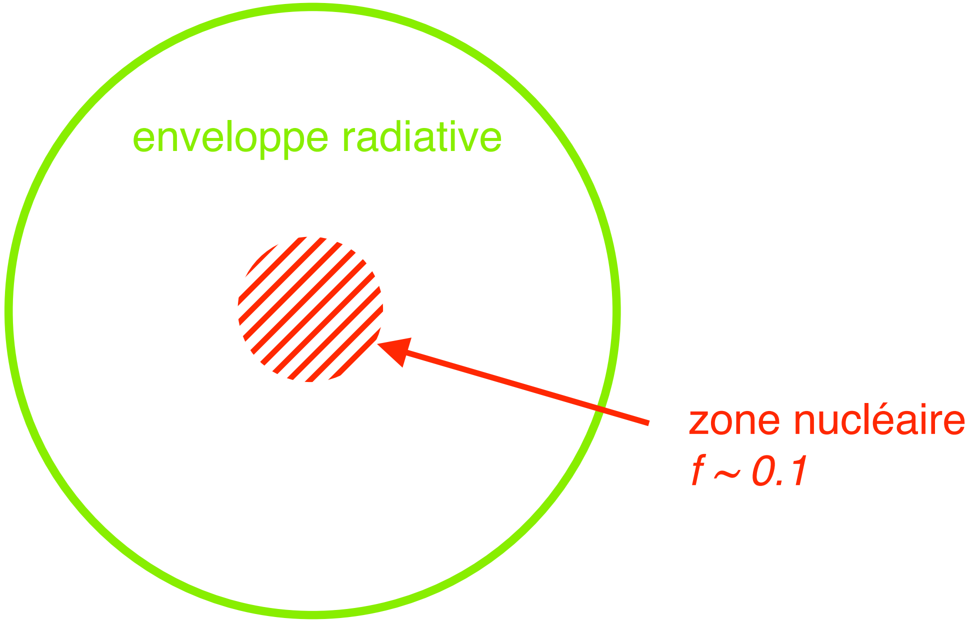
$$\boxed{p^+ + p^+ + p^+ + p^+ \longrightarrow H_e^{++} + 2e^+ + 2\gamma + 2\nu_e}$$

perte de masse: $m_p = 1.00797$ uma
$m_{He} = 4.0026$ uma

$4\ m_p - m_{He} \sim 0.028\ m_p$

$$\boxed{\Delta E_{nuc} \sim 0.007\ m_p\ c^2 \text{ par proton fusionné}}$$

énergie disponible dans le Soleil:



$$E_{nuc} \sim f \times 0.007 \times Mc^2$$

$$\boxed{t_{nuc} \sim 7 \times 10^{-4} \frac{Mc^2}{L} \sim 10^{10} \text{ ans pour le Soleil}}$$

NB:

$$\Delta E_{chim} \sim 1 \; eV$$

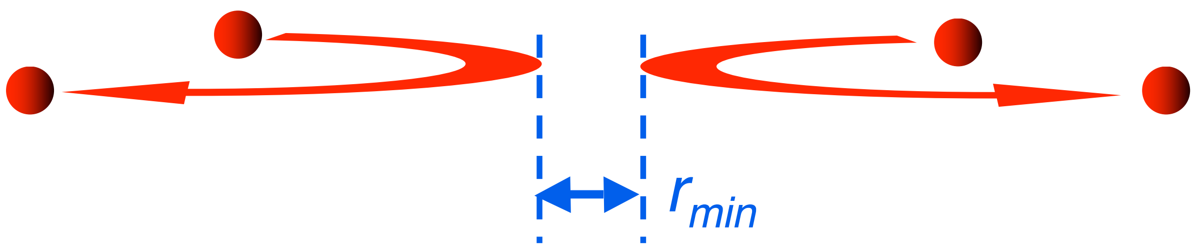
$$\Delta E_{nuc} \sim 1 \; MeV$$

Réactions thermonucléaires:

la barrière coulombienne

température interne (viriel): $\overline{T} \sim \frac{1}{5} \cdot \frac{GM\mu}{kR}$

quand R ↘ on a T ↗



$$E = \frac{1}{2} m_p v^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{e^2}{r}$$

$$E_\infty = \frac{1}{2} m_p v_\infty{}^2 = E_{r\,\mathrm{min}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{e^2}{r_{\mathrm{min}}}$$

mais:

$$\frac{1}{2} m_p {v_\infty}^2 \sim \frac{3}{2} kT$$

d'où:

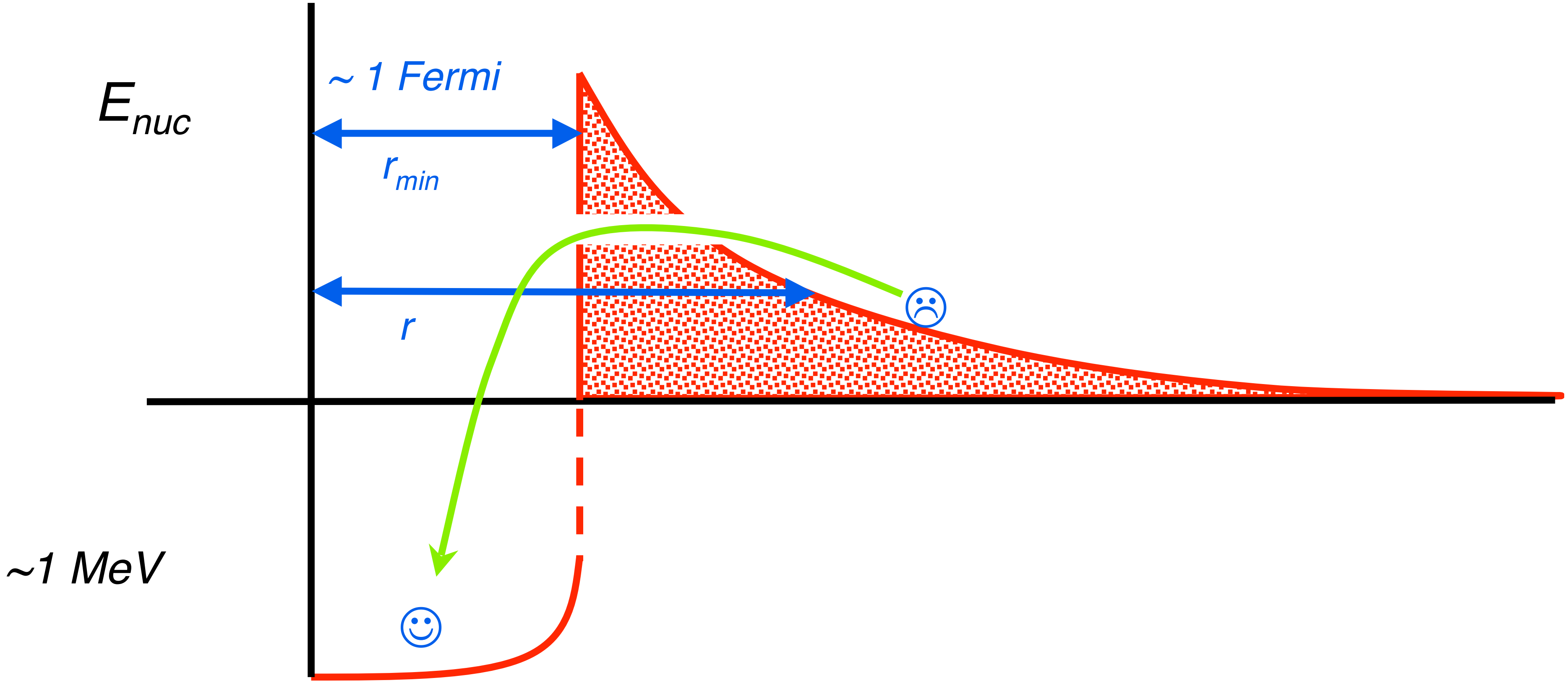
$$T \sim \frac{2}{3k} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{e^2}{r_{\min}}$$

<u>AN:</u>

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon} = 9 \times 10^9 \text{ uSI} \\ e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \\ r_{\min} \sim 10^{-15} \text{ m} \sim \text{ 1 Fermi} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{T_{nuc} \sim 10^{10} \text{ K}}$$

« you need a hot place » !

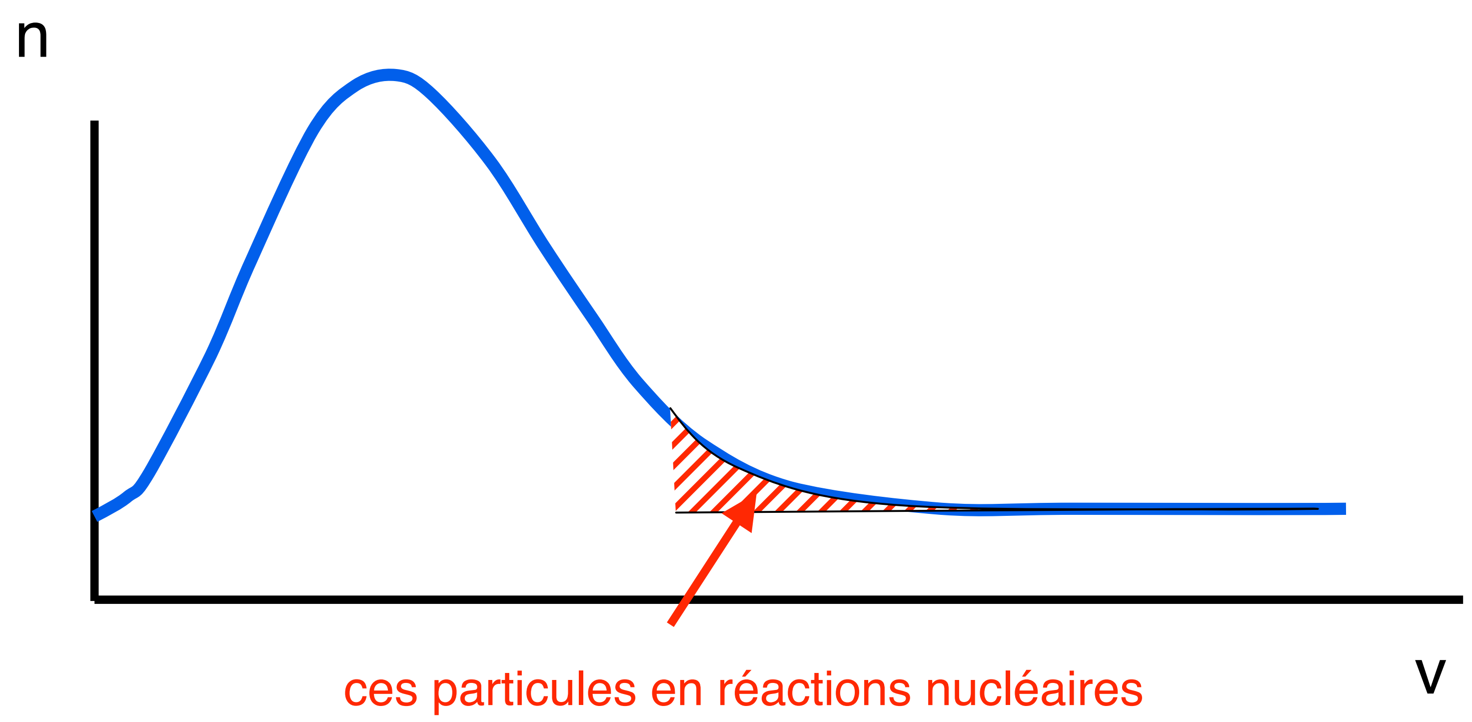
<u>Effet tunnel</u>



permet de descendre la limite de fusion à $T \sim 10^8$ K, encore trop chaud…

mais:

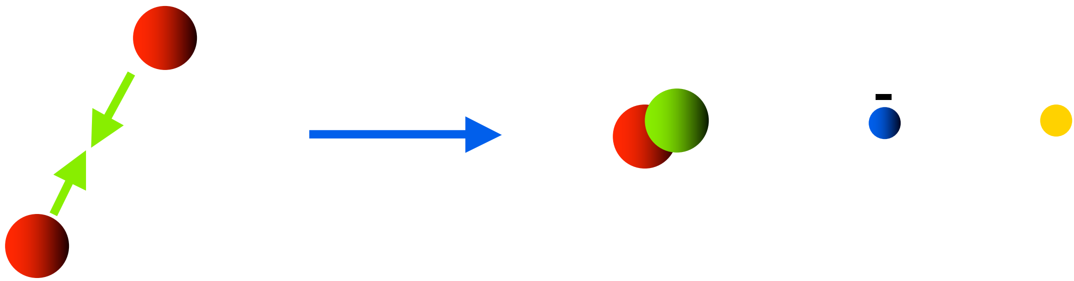
distribution maxwelienne des vitesses



permet de descendre la limite de fusion à $T \sim 10^7$ K, bien…

NB: si notaux plus lourds, répulsion $\propto Z^2$: $T \sim 10^7 Z^2$ K

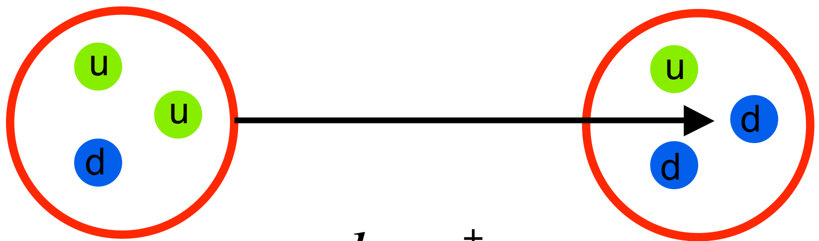
Le cycle proton-proton



$$p^+ + p^+ \longrightarrow \qquad D^+ + e^+ + \nu_e$$

D^+: deutéron

fusion: interaction *forte*
désintégration *$p^+ \rightarrow n+e^+$*: interaction *faible*



$$u \longrightarrow d + e^+ + \nu_e$$

très faible probabilité…

interaction *forte*:

$$D^{+} + p^{+} \rightarrow {}^{3}H_{e}^{++} + \gamma$$

$${}^{3}H_{e}^{++} + {}^{3}H_{e}^{++} \rightarrow {}^{4}H_{e}^{++} + p^{+} + p^{+}$$

en reprenant l'équation précédente

$$p^{+} + p^{+} \rightarrow D^{+} + e^{+} + \nu_{e}$$

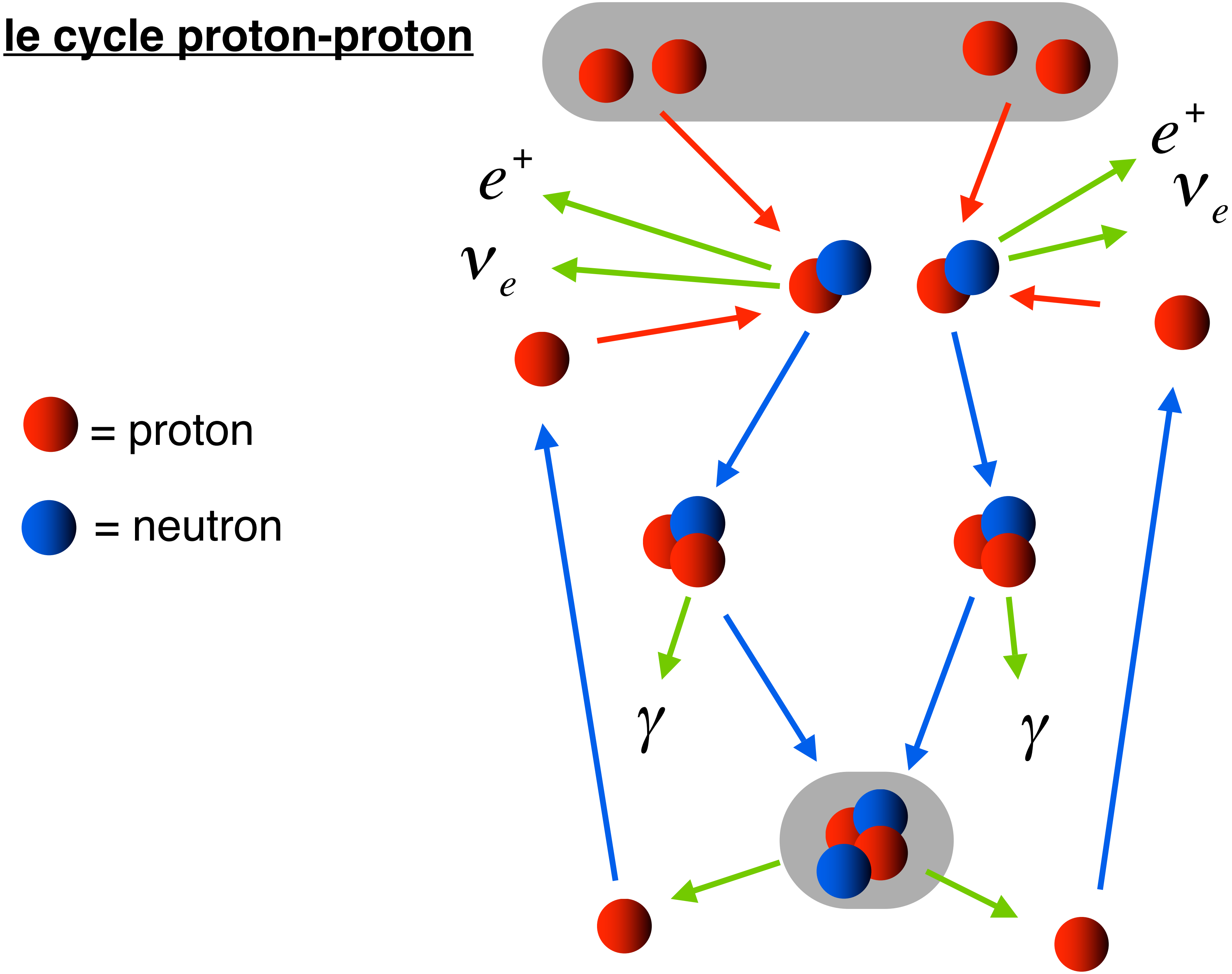
on a le bilan total du: *cycle proton-proton*
(ou *p-p*)

$$\boxed{4p^{+} \rightarrow {}^{4}H_{e}^{++} + 2e^{+} + 2\gamma + 2\nu_{e}}$$

annihilation avec $e^{-} \rightarrow$ énergie

neutrinos s'échappent du Soleil

le cycle proton-proton



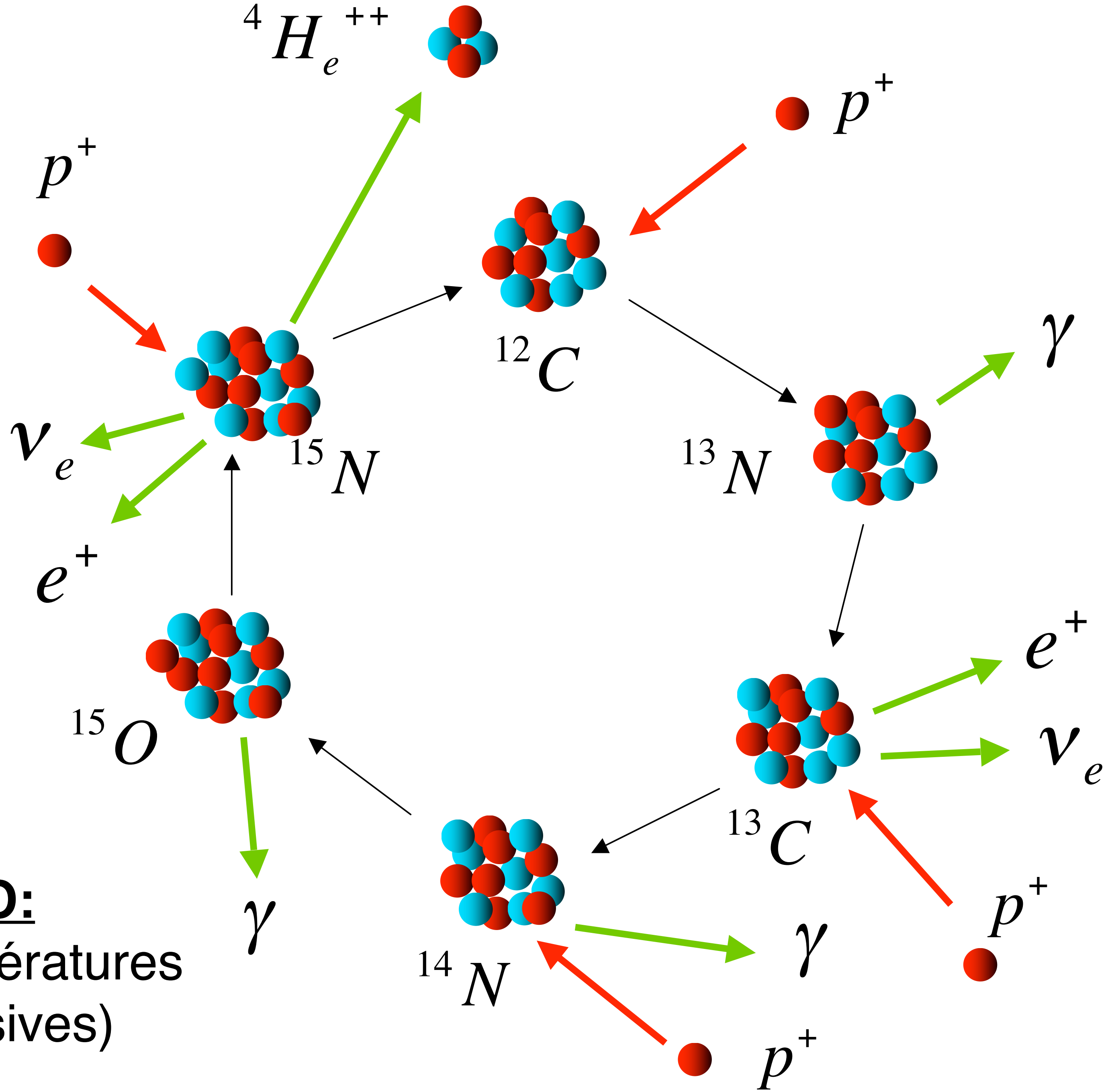
<u>Le cycle CNO</u>

devient plus efficace que le cycle p-p quand *T* augmente (*i.e.* pour des étoiles plus massives que le Soleil)

$$
\begin{array}{llllllll}
{}^{12}C & + & {}^{1}H & \rightarrow & {}^{13}N & + & \gamma & & \\
{}^{13}N & & & \rightarrow & {}^{13}C & + & e^{+} & + & \nu_e \\
{}^{13}C & + & {}^{1}H & \rightarrow & {}^{14}N & + & \gamma & & \\
{}^{14}N & + & {}^{1}H & \rightarrow & {}^{15}O & + & \gamma & & \\
{}^{15}O & & & \rightarrow & {}^{15}N & + & e^{+} & + & \nu_e \\
{}^{15}N & + & {}^{1}H & \rightarrow & {}^{12}C & + & {}^{4}H & &
\end{array}
$$

bilan: idem cycle p-p

$$
\boxed{{}^{1}H + {}^{1}H + {}^{1}H + {}^{1}H \;\rightarrow\; {}^{4}H_e + 2\gamma + 2e^{+} + 2\nu_e}
$$

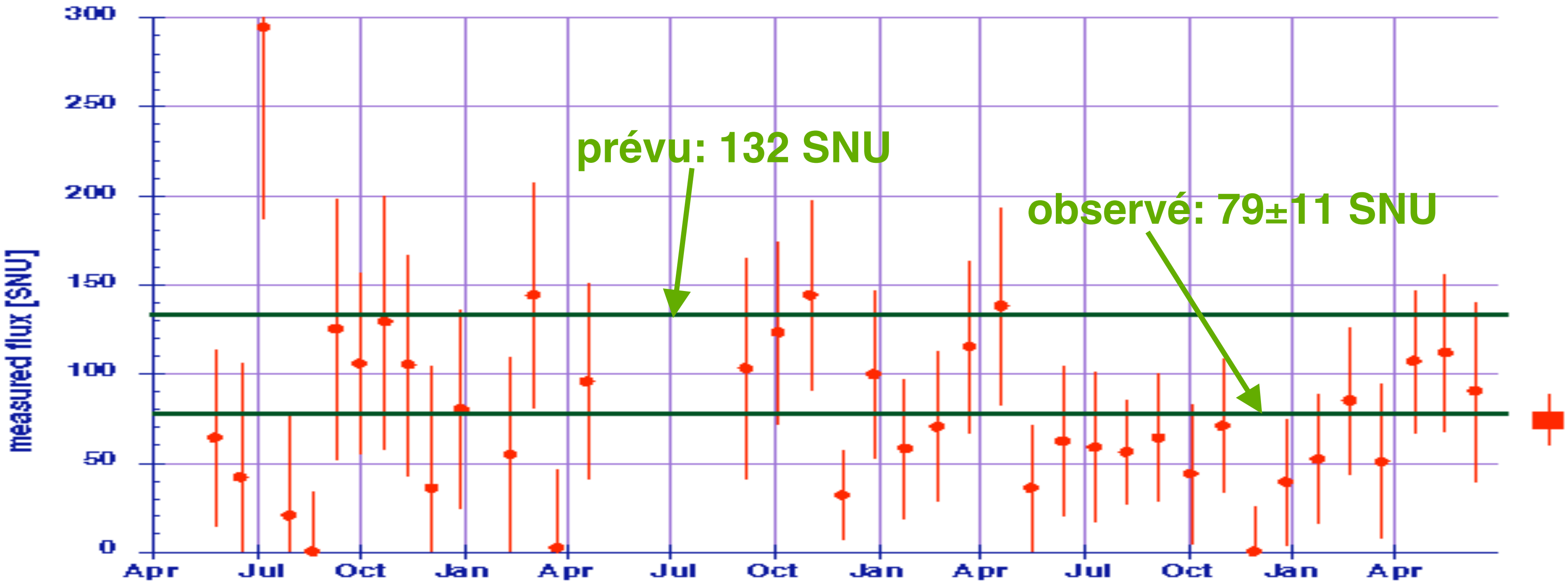


<u>le cycle CNO:</u>
Hautes températures
(étoiles massives)

déficit des neutrinos solaires

http://wwwlapp.in2p3.fr/neutrinos/anexp.html

expérience Gallex:



1992 1993

1 SNU=

1 neutrino interaction per second for 10^{36} target

fermions et bosons

fermions:

- spin *demi-entier* (1/2 ħ, 3/2 ħ, 5/2 ħ) ↔
- obéissent au *principe d'exclusion de Pauli*

individualistes

bosons:

- spin*entier* (0 ħ, ħ, 2 ħ) ↔
- pas d'exclusion

grégaires

NB. tous les bosons intermédiaires sont des bosons,
mais la réciproque n'est pas vraie

Principe d'incertitude d'Heinsenberg

s'applique à toutes les particules,
relie des quantités conjuguées:

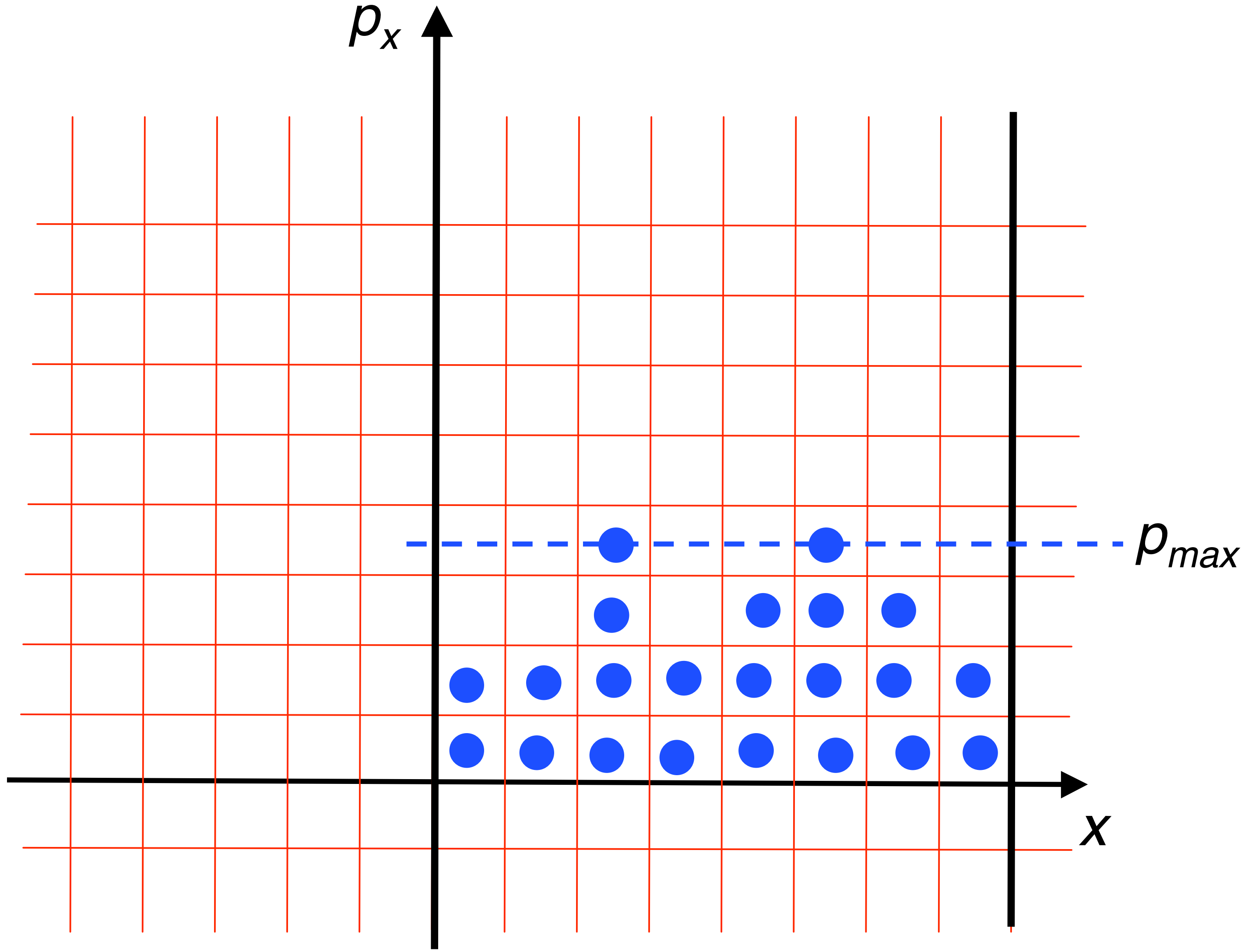
$$\Delta x \,.\, \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta t \,.\, \Delta E \geq \hbar$$

etc…

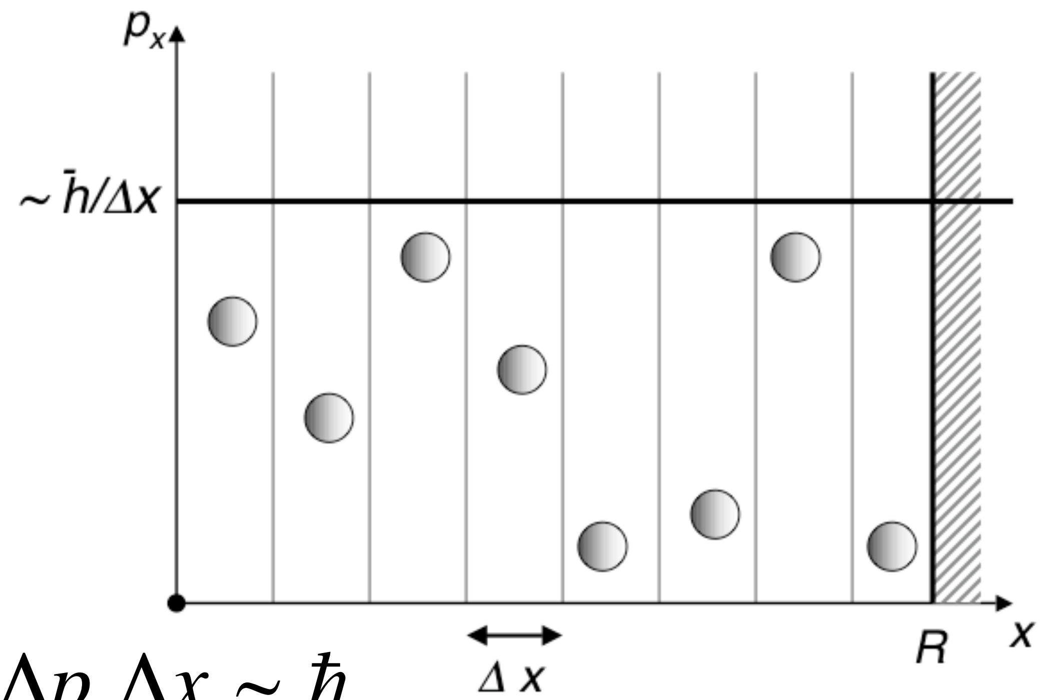
h: constante de Planck ~ 6.63×10^{-34} J . sec
ħ: h/2π

conséquence: pression de Fermi



exercice: montrer que $p_{max} \sim \hbar \times n^{1/3}$

La pression de Fermi
(ou de dégénérescence)



$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar$$

$$p_x \sim \hbar / \Delta x$$

NB. $$\Delta x = n^{-1/3}$$

pression: $$P_F = n v_x p_x$$

si gaz *classique (v << c):* $$p_x = m v_x$$

d'où:

$$\boxed{P_F = \frac{\hbar^2}{m} n^{5/3}}$$

pression de Fermi due à des fermions de masse *m* et avec une densité de *n* fermions m^{-3}

fondamental pour la stabilité des planètes, naines blanches, étoiles a neutrons

cas particulier d'un milieu globalement neutre contenant des noyaux de charge *Z+*, de masse atomique *A* et des électrons de masse m_{e}:

formule générale: $$P_F = \frac{\hbar^2}{m} n^{5/3}$$

NB: $m_e << m_p$, donc $P_F(e) >> P_F(p)$

neutralité electrique: $$n_e = Z n_{noyaux}$$

essentiel de la masse dans nucléons:

$$\rho \sim A n_{noyaux} m_p$$

pression de Fermi due aux électrons:

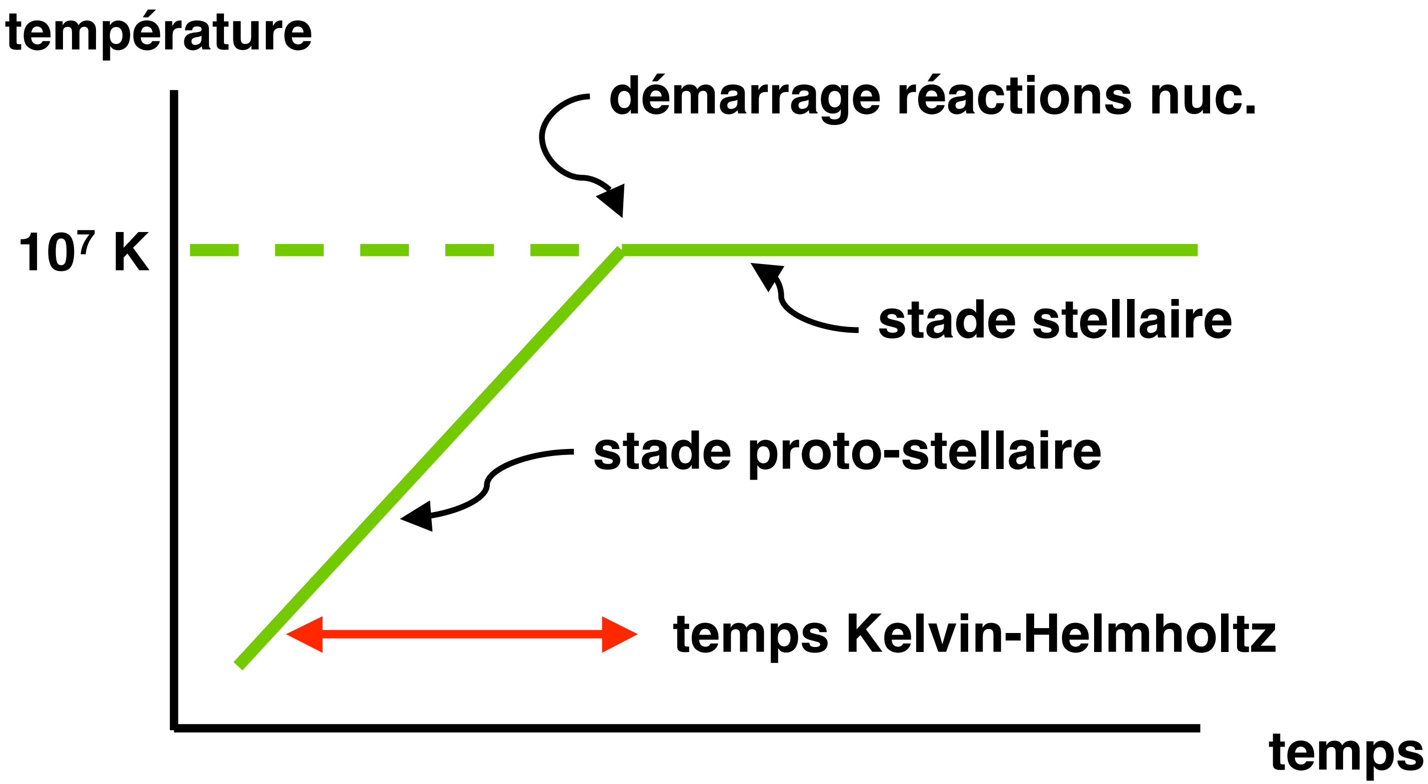
$$\boxed{P_F(e^-) = 2\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}\left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{5/3}}$$

(NB: la pression de Fermi des électrons domine la pression due aux protons à cause de $1/m_e >> 1/m_p$)

La masse stellaire minimum

température centrale d'une étoile
composée d'hydrogène (viriel):

$$T_{cent} \sim \frac{GMm_p}{2kR}$$



Paradoxe: tout astre devrait devenir une étoile pour *R* suffisamment petit

réponse: limite à la contraction imposée par la *pression de Fermi*

$$P_F(e^-) = 2\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}\left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{5/3}$$

de $\rho \propto M/R^3$ on tire:

$$P_F(e^-) \sim K \cdot \frac{M^{5/3}}{R^5} \text{ Pa, où } K = 10^6 \text{ uSI}$$

avec toujours :

$$P_{therm} \sim \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4}$$

définissons:

$$\alpha = \frac{P_F}{P_{therm}} = \frac{4\pi K}{3G} \cdot \frac{1}{RM^{1/3}}$$

(degré de dégénérescence de l'astre)

De plus (viriel):

$$T_{cent} \sim \frac{GMm_p}{2kR}$$

d'où:

$$\boxed{T_{cent} \sim \left(\frac{3G^2 m_p}{8\pi K k}\right) M^{4/3} \cdot \alpha}$$

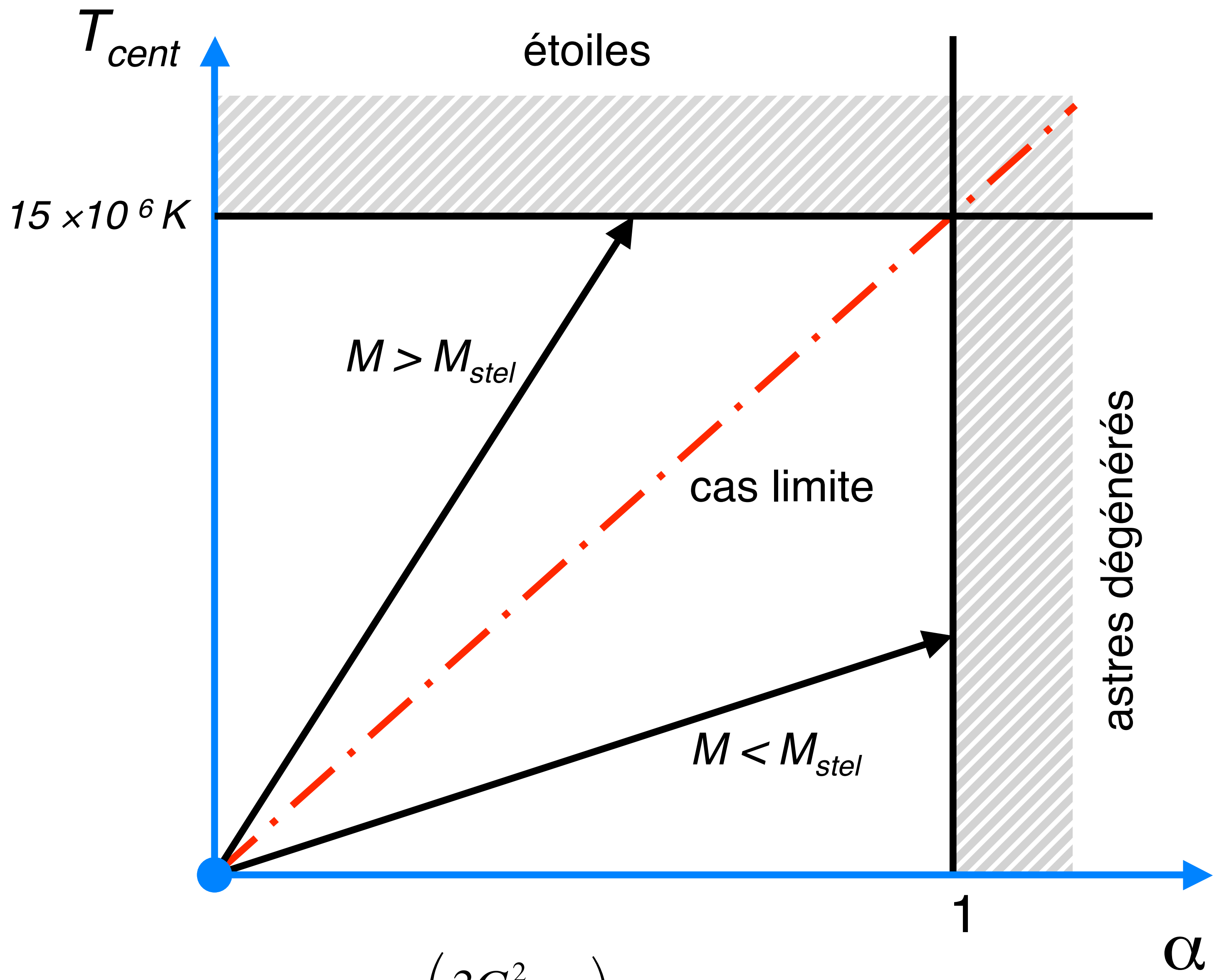
deux possibilités:

(1) T_{cent} atteint $\sim 15 \times 10^6$ K *avant* que α=1

→ **une étoile est née**

(2) α=1 atteint *avant* que $T_{cent} \sim 15 \times 10^6$ K

→ **astre dégénéré sans réactions nucléaires**



cas limite: $$T_{nuc} \approx 15 \times 10^{6}\ \mathrm{K} = \left(\frac{3G^2 m_p}{8\pi K k}\right) M_{stel}{}^{4/3} \times 1$$

$$M_{stel} \sim \left(\frac{8\pi K}{3G^2} \cdot \frac{kT_{nuc}}{m_p} \right)^{3/4}$$

AN: $M_{stel} \sim 0.03\ M_\odot$

calculs plus précis : $\boxed{M_{stel} \sim 0.08\ M_\odot \sim 80\ M_J}$

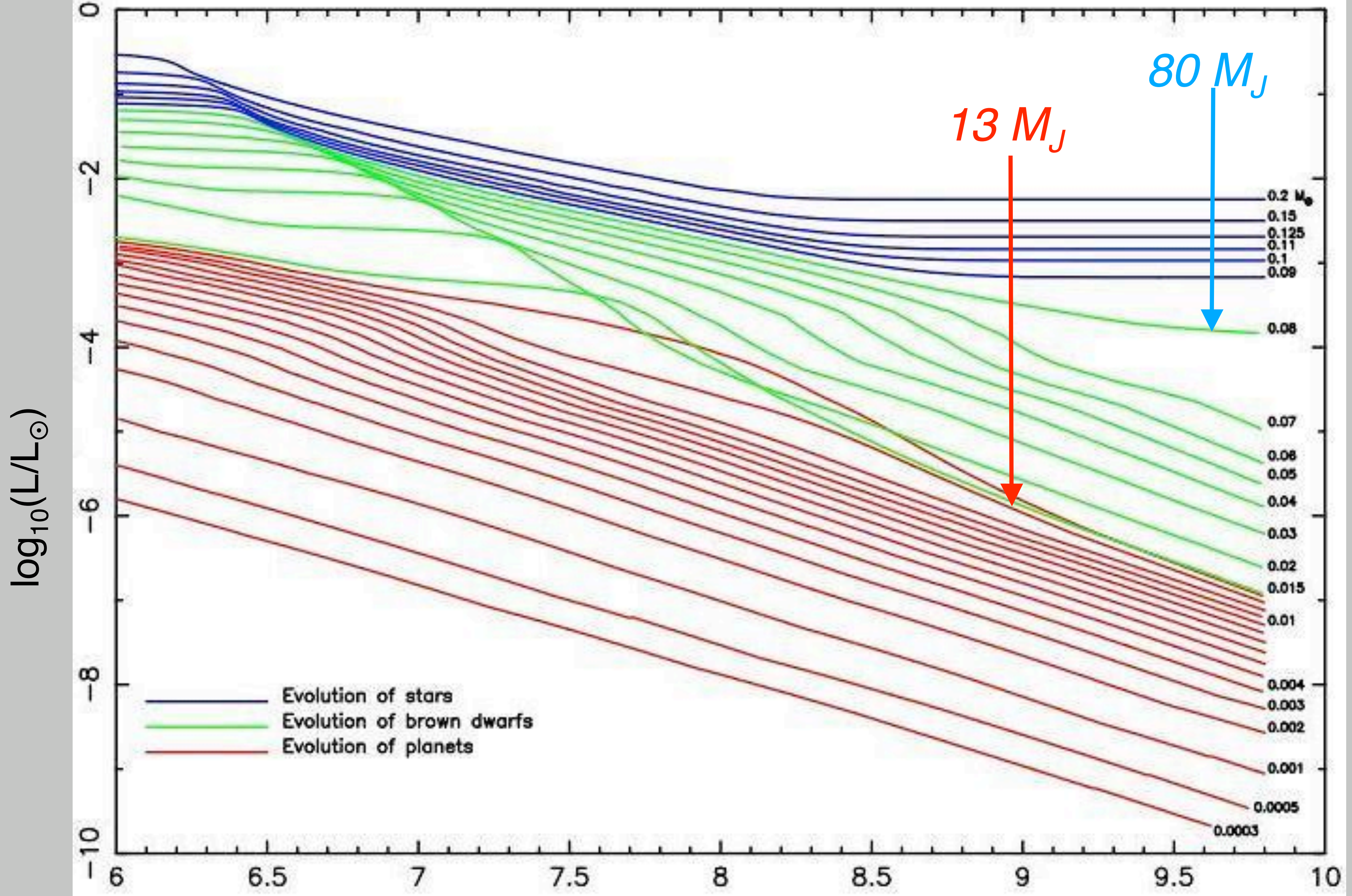
en-dessous de la masse stellaire:

$$13\ M_J < M < 80\ M_J$$

qqs réactions nucléaires (L_i,D) → naine brune

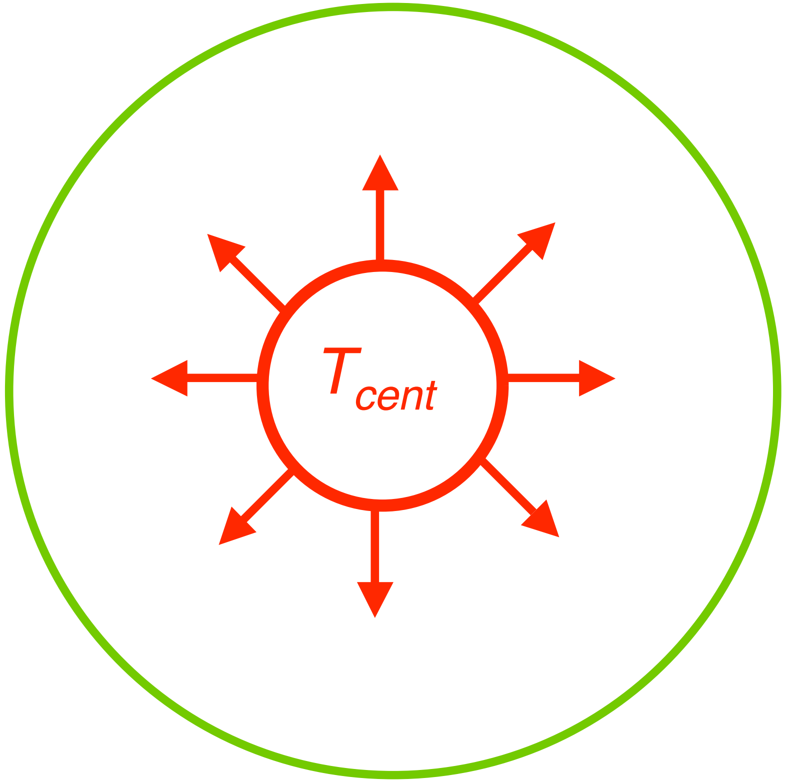
$$M < 13\ M_J$$

aucune réaction nucléaire → planète



Burrows *et al. ApJ* ***406,*** *158 (1993)*
et voir http://jupiter.as.Arizona.EDU/~burrows/

masse stellaire maximum



$$P_{cent} = P_{mat} + P_{ray}$$

en général, $P_{ray} << P_{mat}$, sauf si…

$$P_{ray} = \frac{e_{ray}}{3} = \frac{4\sigma}{3c}(T_{cent})^4$$ (loi de Stefan volumique)

mais:

$$T_{cent} = \frac{GMm_p}{2kR}$$ (viriel)

$$P_{ray} = \frac{4\sigma}{3c}\left(\frac{Gm_p}{10k}\right)^4 \times \frac{M^4}{R^4}$$

$$P_{grav} = \frac{3G}{8\pi} \times \frac{M^2}{R^4}$$

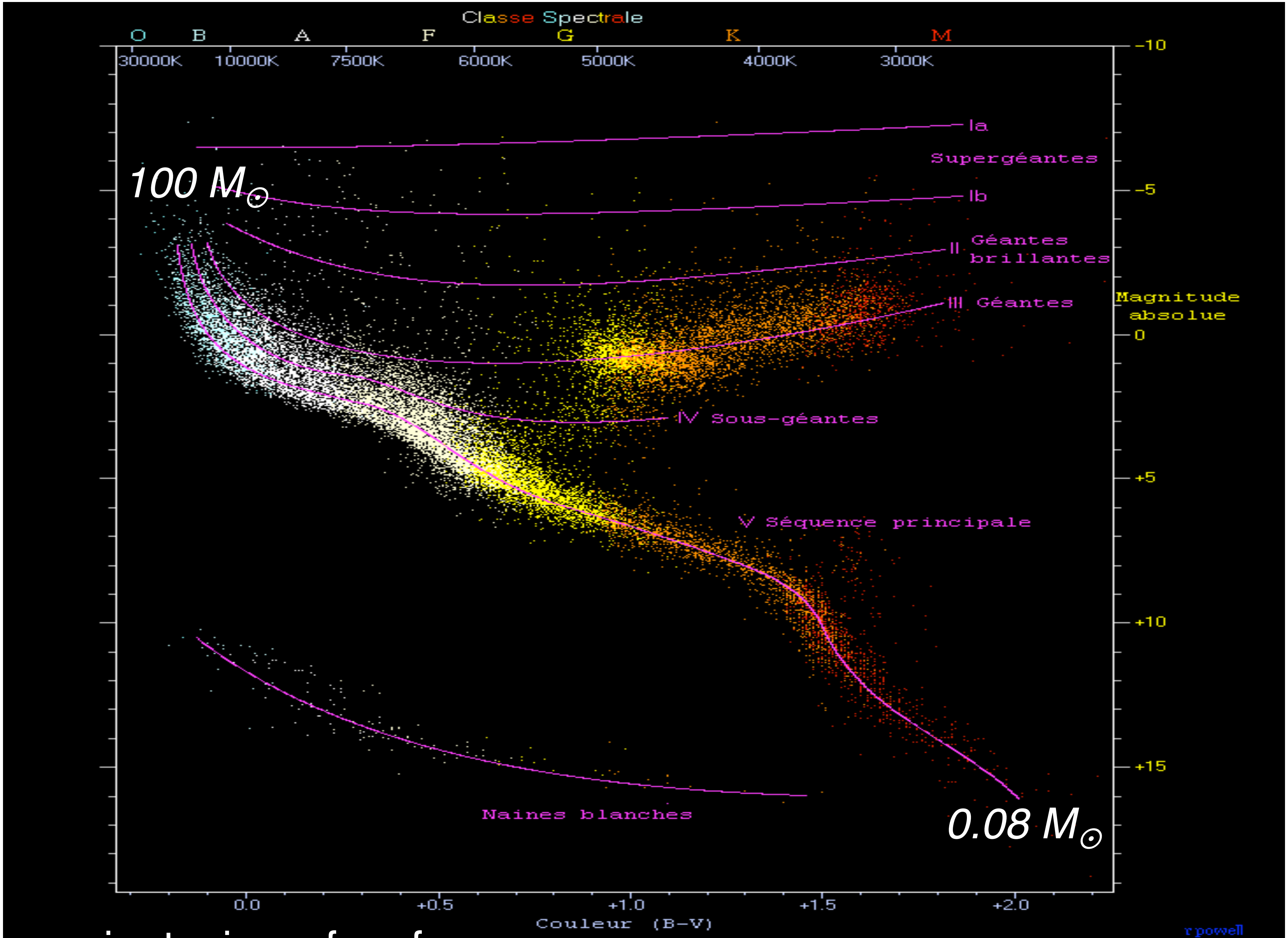
donc: si *M* trop grand, l'étoile explose…

AN:

$$M_{\max} \sim \left(\frac{9Gc}{8\pi\sigma}\right)^{1/2}\left(\frac{10k}{Gm_p}\right)^2 \sim 140\,M_{Soleil}$$

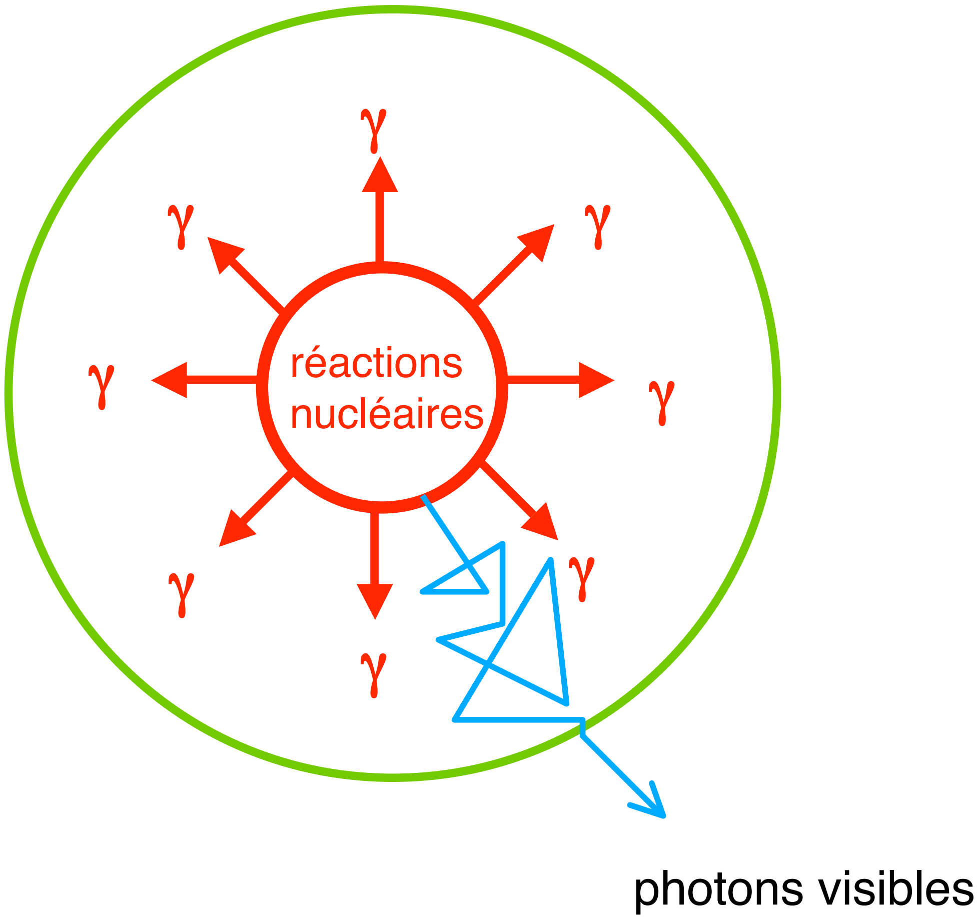
en fait:

$$\boxed{M_{\max} \sim 100\,M_{Soleil}}$$



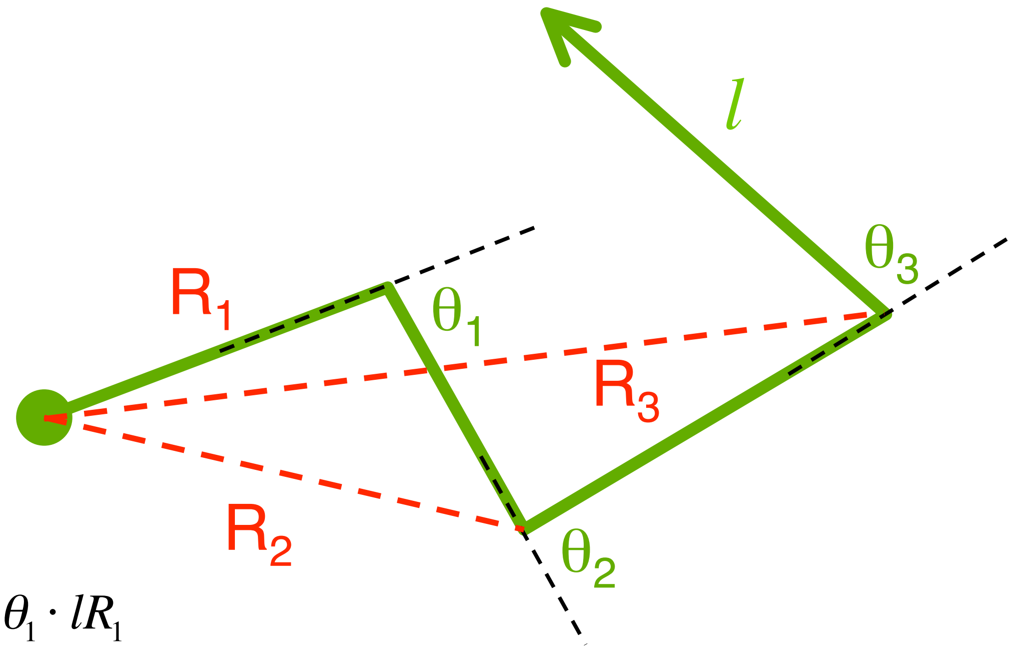
voir atunivers.free.fr

Relation masse-luminosité
(étoiles de la séquence principale)



montrons que: $L \propto M^3$

processus de marche au hasard



$$
\begin{cases}
R_1^{\ 2} = l^2 \\
R_2^{\ 2} = R_1^{\ 2} + l^2 + 2\cos\theta_1 \cdot lR_1 \\
R_3^{\ 2} = R_2^{\ 2} + l^2 + 2\cos\theta_2 \cdot lR_2 \\
\quad \vdots \\
R_N^{\ 2} = R_{N-1}^{\ \ 2} + l^2 + 2\cos\theta_{N-1} \cdot lR_{N-1}
\end{cases}
$$

où l: libre parcours moyen

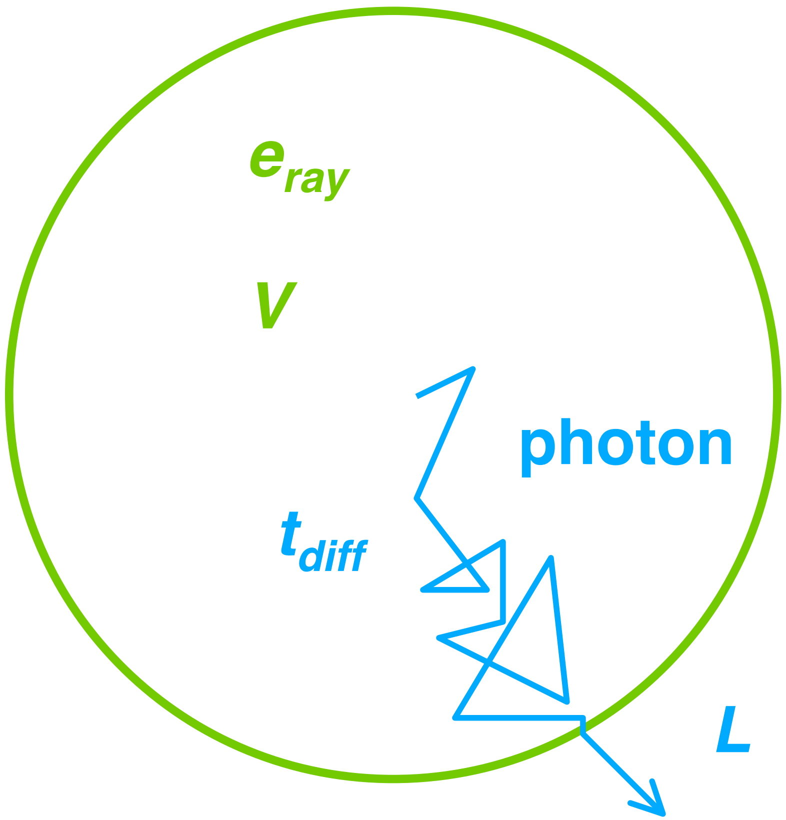
somme membre à membre:

$$R_N{}^2 = Nl^2 + 2l\sum_{1}^{N-1} \cos\theta_i \cdot R_i$$

marche au hasard: moyenne de
cos θ_i nulle. Donc en moyenne:

$$\boxed{R_N = \sqrt{N}\,l}$$

(général à tout processus de *diffusion*)



énergie de rayonnement: $E_{ray}=e_{ray}\times V$

temps d'évacuation: t_{diff}

donc: $e_{ray}\times V = L \times t_{diff}$ (condition de stationnarité)

mais: $e_{ray} \propto T^4 \propto (M/R)^4$ (Stefan + viriel)

$\Rightarrow T_{diff}$?

diffusion: $$R_N{}^2 = Nl^2$$

sortie après: $$N = \frac{R^2}{l^2} \text{ pas}$$

temps pour sortir: $$t_{diff} = N\frac{l}{c} = \frac{R^2}{lc}$$

mais: $$l = \frac{1}{\sigma n} \propto \frac{1}{\rho} \propto \frac{R^3}{M}$$

donc: $$\boxed{t_{diff} \propto \frac{R^2}{l} \propto \frac{M}{R}}$$

finalement:

$$L \sim \frac{e_{ray} \cdot V}{t_{diff}} \propto \frac{M^4}{R^4} \times R^3 \times \frac{R}{M}$$

relation masse luminosité séquence principale

$$\boxed{L \propto M^3}$$

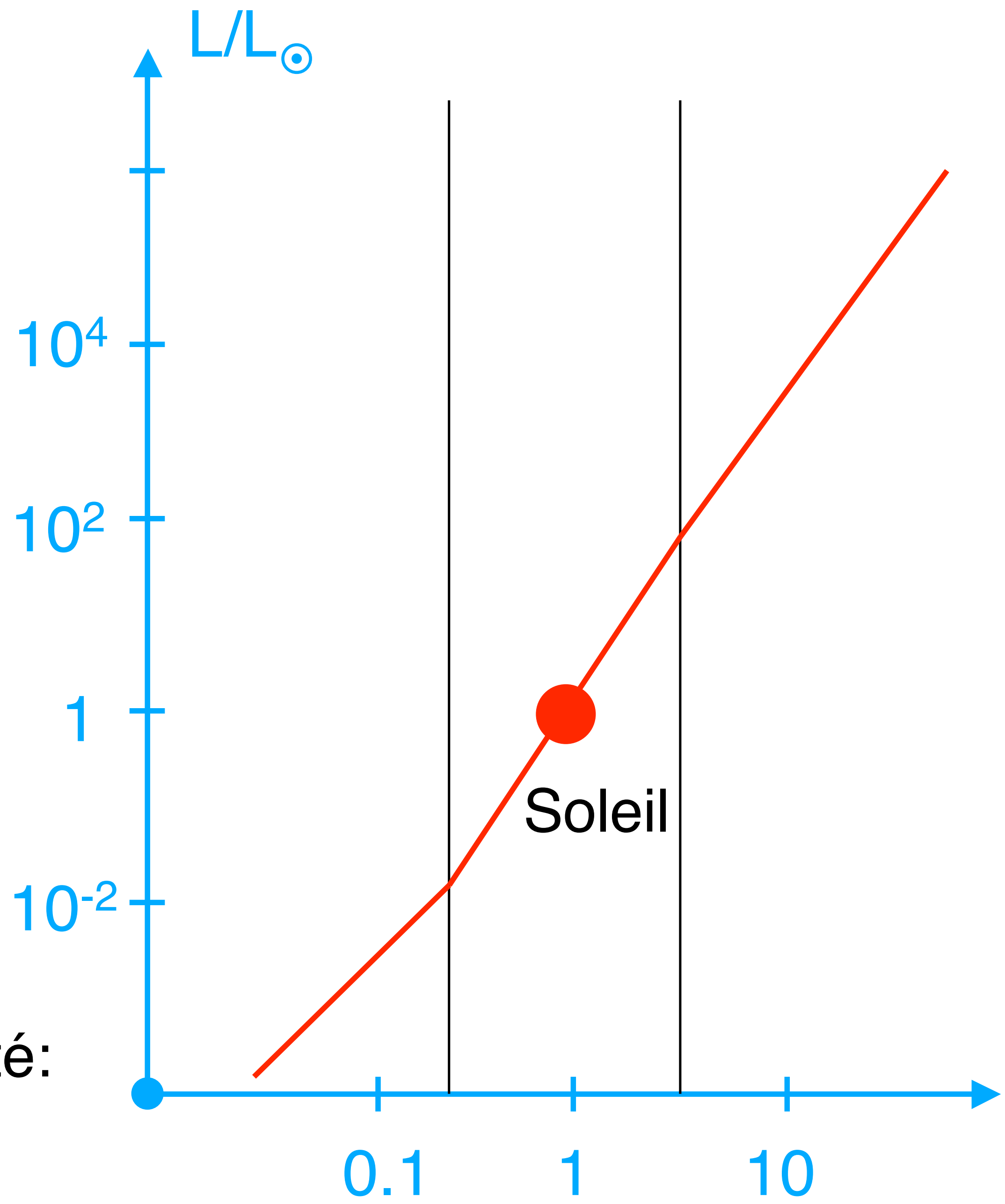
durée de vie stellaire:

$$\boxed{t_{vie} \sim \frac{E_{nuc}}{L} \propto \frac{M}{M^3} = \frac{1}{M^2}}$$

ex:

$M=40M_\odot \rightarrow t_{vie} \sim 10^{10}/40^2 \sim 6\times10^6$ ans (court!)

$M=0.08M_\odot \rightarrow t_{vie} \sim 10^{10}/(0.08)^2 \sim 1500\times10^9$ ans (long!)



relation masse-luminosité:

$L \propto M^{\alpha}$ où $\alpha \sim 3$