

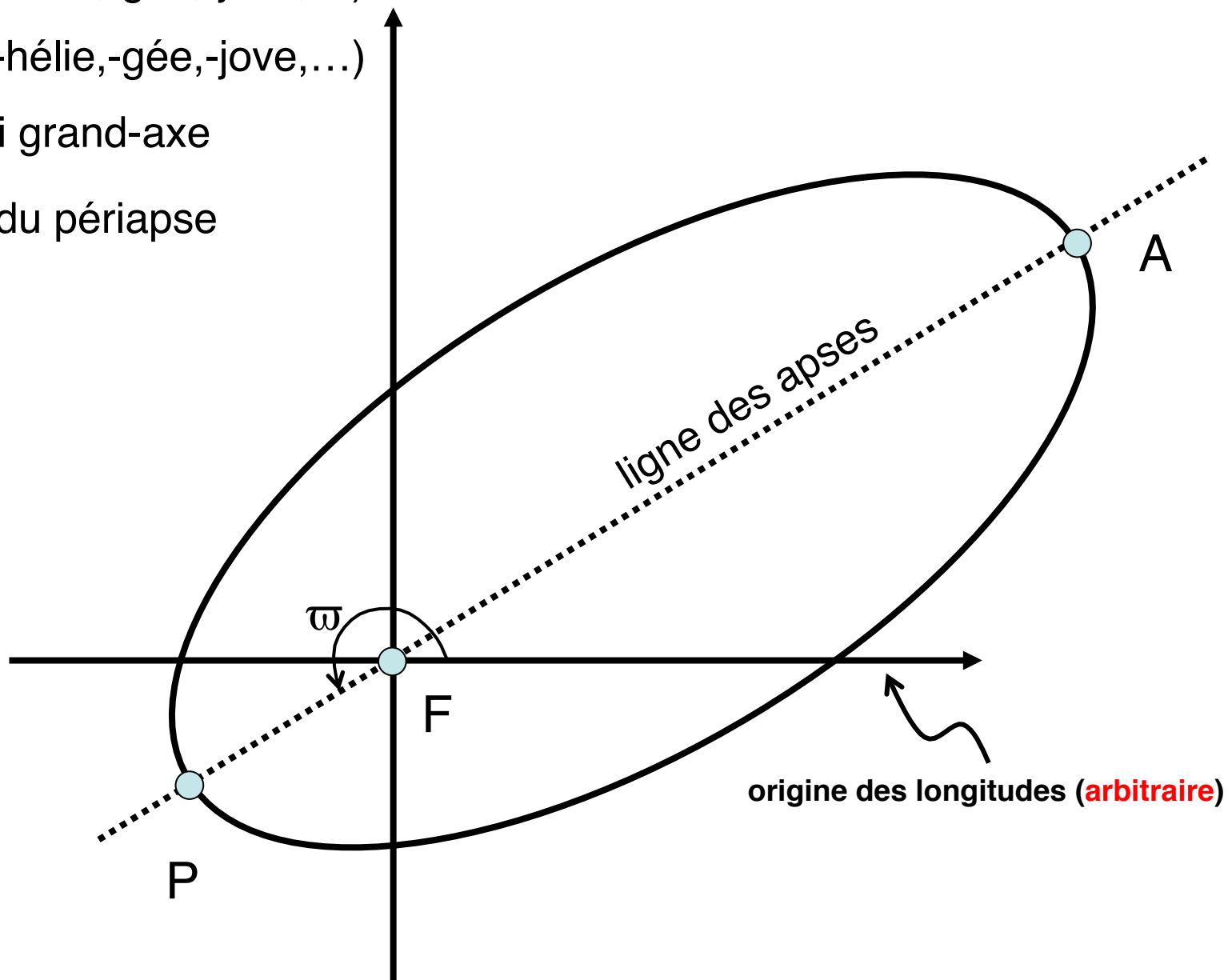
mouvement keplerien

P: périapse (-hélie,-gée,-jove,...)

A: apoapse (-hélie,-gée,-jove,...)

$AP/2=a$ : demi grand-axe

$\varpi$ : longitude du périapse



$\gamma$  : nœud (ascendant)

$i$  : inclinaison

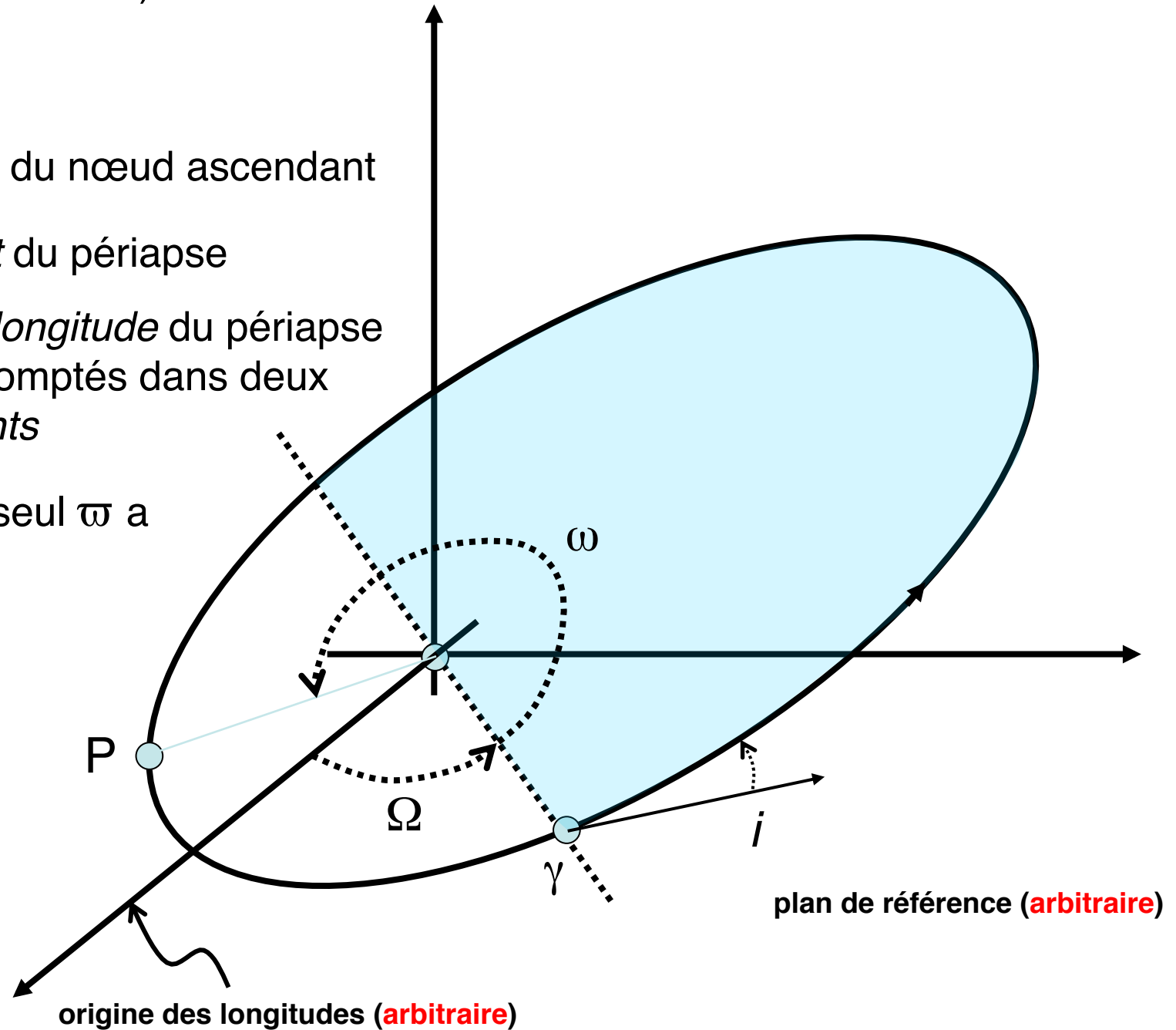
$\Omega$  : longitude du nœud ascendant

$\omega$  : *argument* du périapse

$\varpi = \Omega + \omega$  : *longitude* du périapse

NB. angles comptés dans deux plans *différents*

NB'. si  $i = 0$ , seul  $\varpi$  a un sens



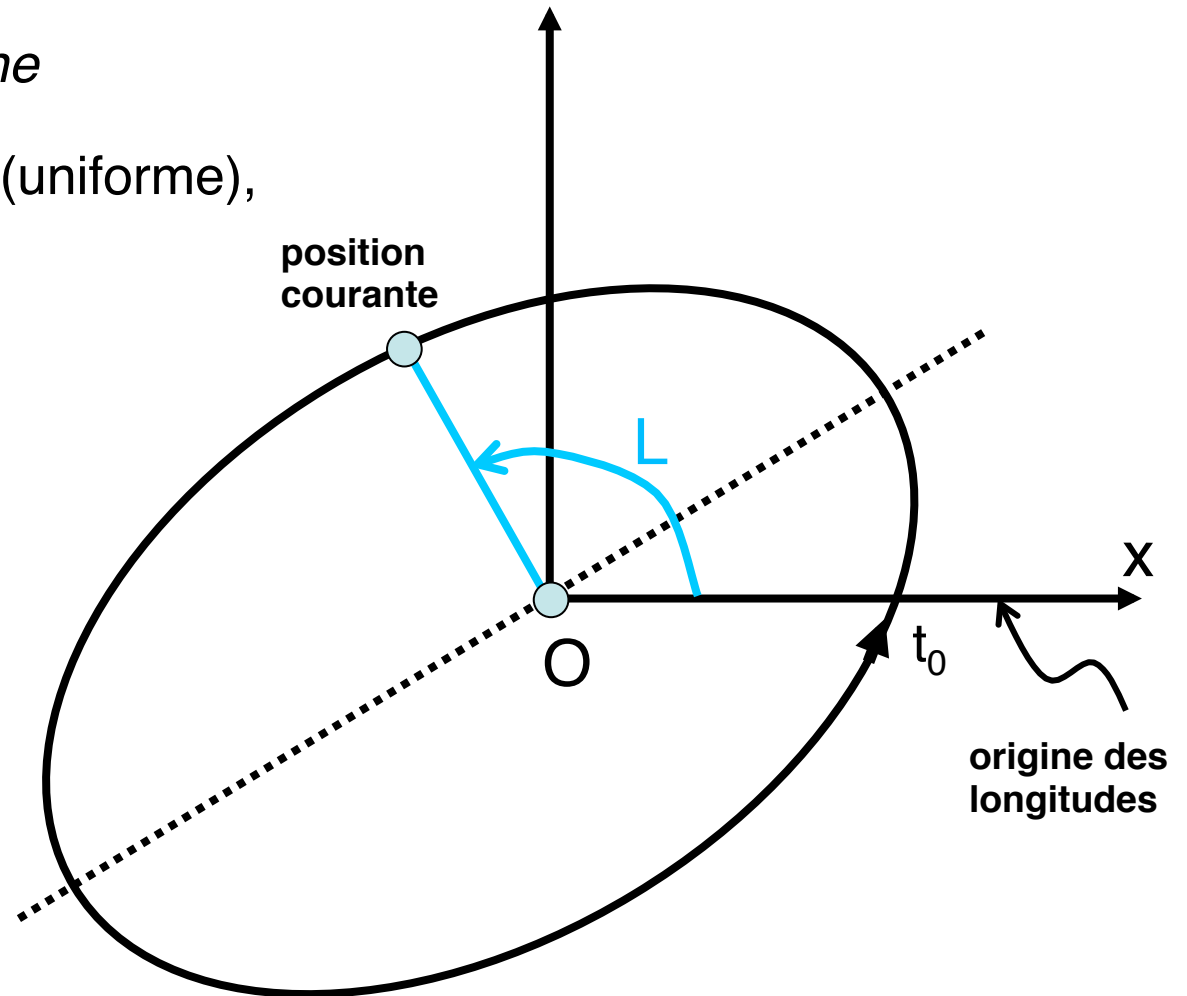
$T$ : période orbitale,  $n = 2\pi/T$ : moyen mouvement

$t_0$ : instant de passage à l'origine des longitudes

$L$ : longitude *vraie*

$\lambda = n(t - t_0)$ : longitude *moyenne*

NB: si mouvement *circulaire* (uniforme),  
alors  $L = \lambda$



soit  $t_{\varpi}$  : instant de passage au périapse

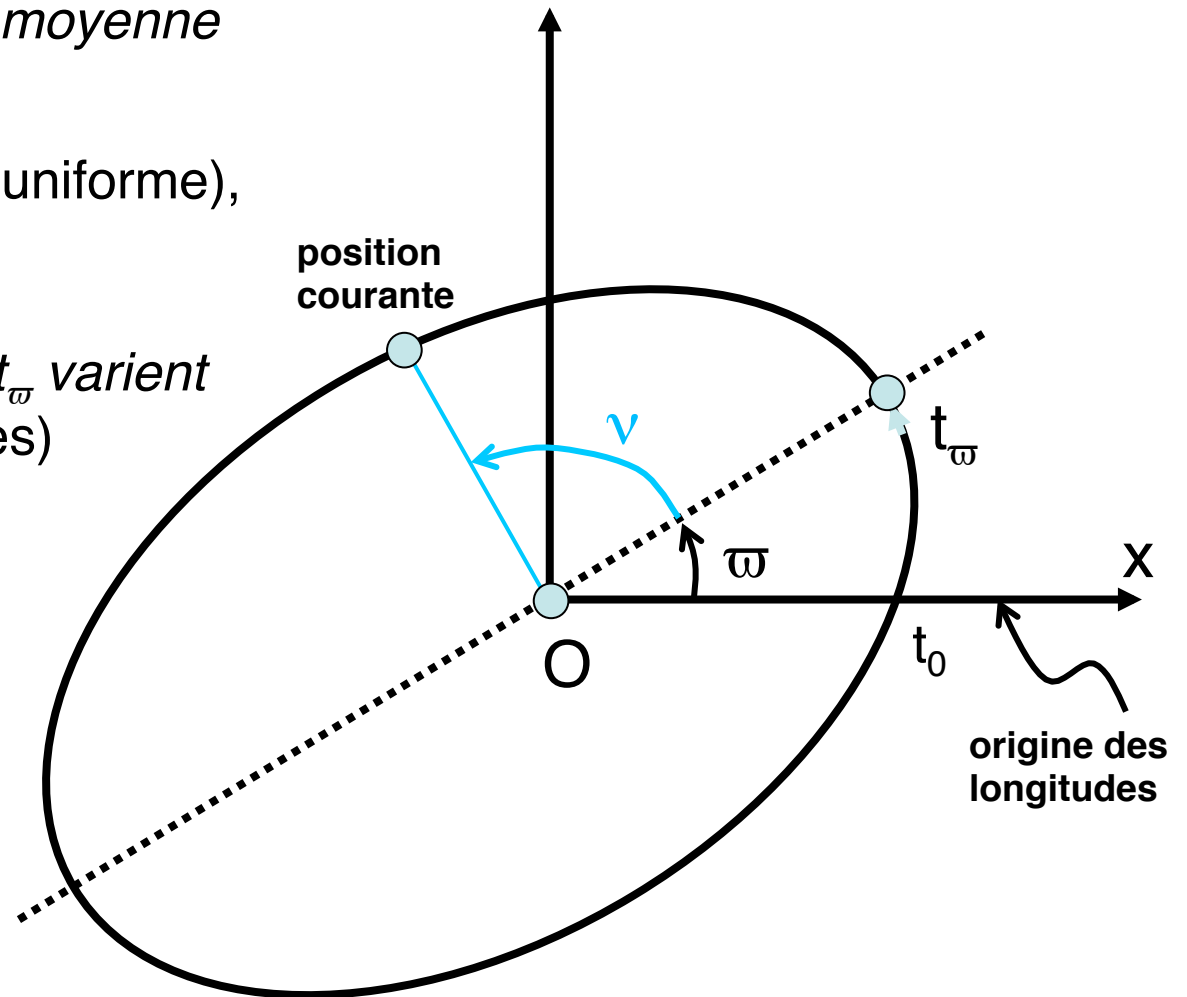
alors on peut définir aussi:

$\nu = L - \varpi$ : anomalie *vraie*

$M = n(t-t_{\varpi}) = \lambda - \varpi$ : anomalie *moyenne*

NB: si mouvement *circulaire* (uniforme),  
alors  $\nu = M$

NB': si orbite perturbée,  $\varpi$  et  $t_{\varpi}$  *varient*  
(alors que  $Ox$  et  $t_0$  restent fixes)



en résumé

$L$  : longitude *vraie*

$\lambda$  :  $= n(t-t_0)$  = longitude *moyenne*

$\Omega$  : longitude du nœud (ascendant)

$\omega$  : *argument* du périapse

$\varpi$  :  $= \omega + \Omega$ : longitude du périapse

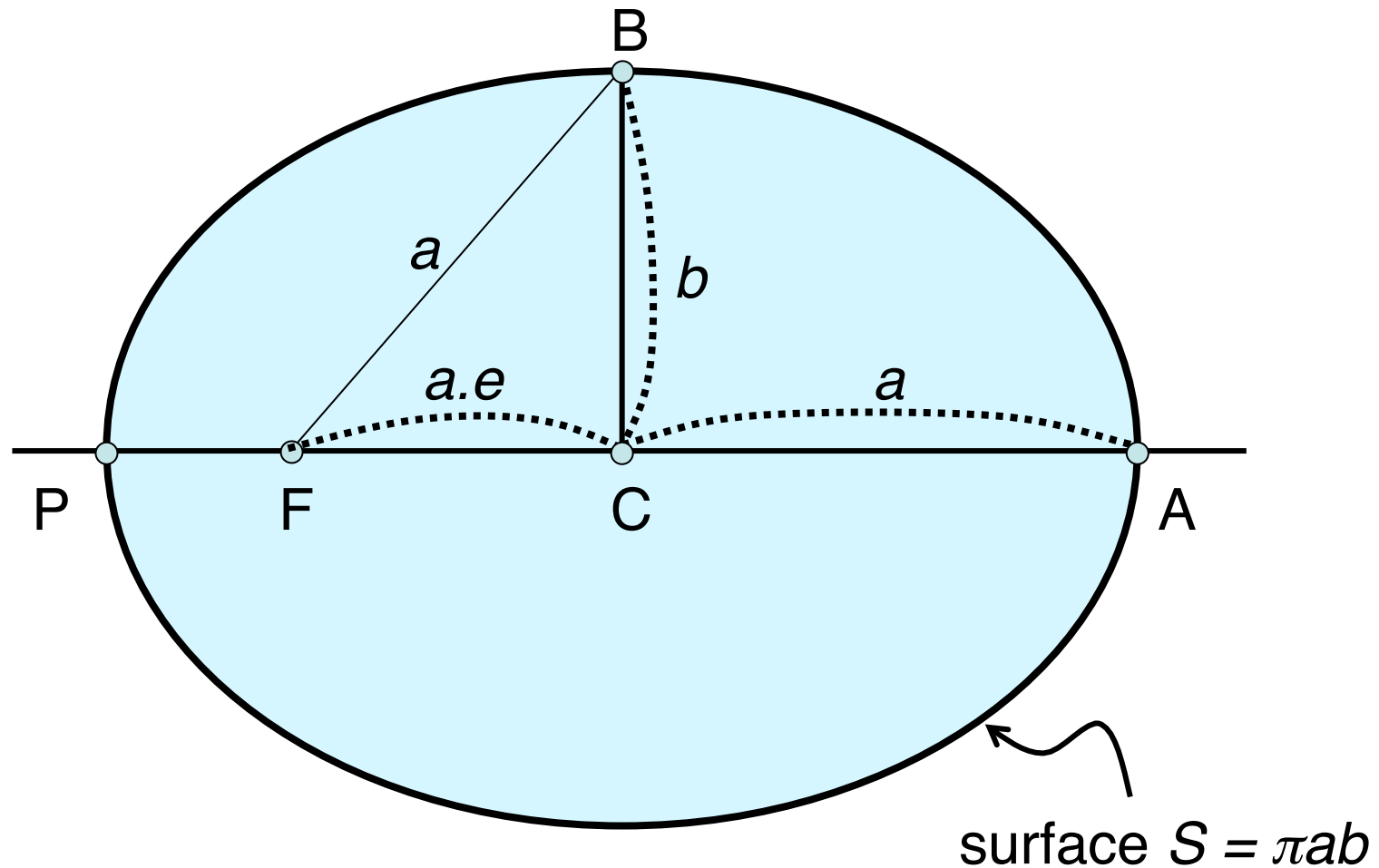
$\nu$  :  $= L - \varpi$ : anomalie *vraie*

$M$  :  $= n(t-t_{\varpi}) = \lambda - \varpi$  : anomalie *moyenne*

NB: si mouvement *circulaire* (uniforme), alors

$$L = \lambda$$

$$\nu = M$$



C: centre de l'ellipse

$a$ : demi grand-axe

$b$ : demi petit-axe =  $a \cdot \sqrt{1-e^2}$

NB.  $a-b \sim ae^2/2$  à l'ordre le plus bas  $\rightarrow$  l'ellipse ressemble à un cercle même si  $e$  grand (par ex. ici  $e \sim 0.46$ , alors que  $(a-b)/a \sim 0.11$ )

## les six éléments orbitaux

$a$  : *demi grand-axe* ;  $M$  : anomalie moyenne

$e$  : *excentricité* ;  $\omega$  : *argument* du périapse

$i$  : *inclinaison* ;  $\Omega$  : *longitude* du nœud (ascendant)

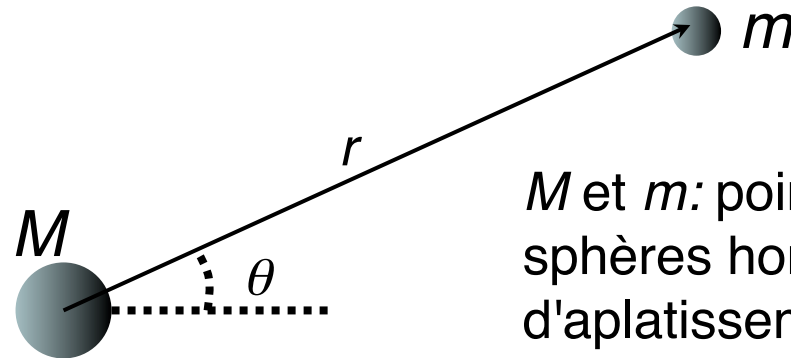
NB. dans le mouvement keplerien, tous ces éléments sont constants, sauf  $\lambda$ , qui varie linéairement avec  $t$ .

NB'. relation univoque entre position-vitesse et éléments orbitaux

$$\begin{array}{ccc}
 a & & x \\
 e & & y \\
 i & & z \\
 \lambda & \leftrightarrow & \dot{x} \\
 \omega & & \dot{y} \\
 \Omega & & \dot{z}
 \end{array}$$

si mouvement perturbé (*e.g.* par un 3ème corps): les éléments varient. Notion d'éléments *osculateurs*: éléments qu'aurait la particule si la perturbation était instantanément supprimée

## propriétés dynamiques du mouvement keplerien



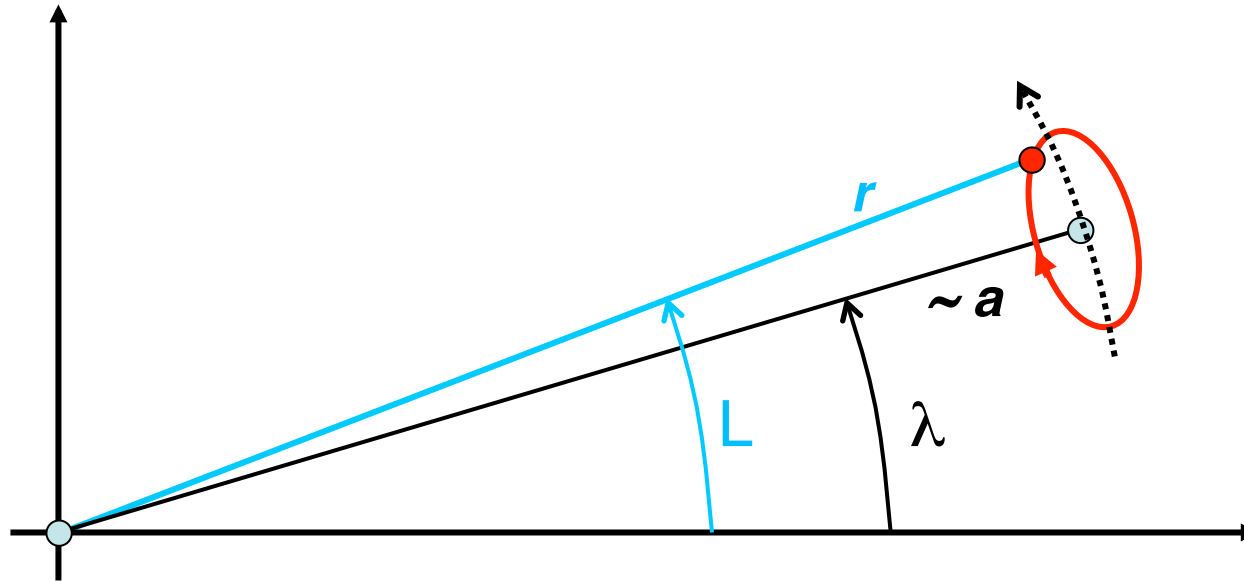
$M$  et  $m$ : points matériels ou sphères homogènes (pas d'aplatissement, perturbateurs,...)  
NB. on peut avoir  $m = 0$

deux intégrales du mouvements:

énergie (spécifique):  $E(a) = v^2 / 2 - GM / r = -GM / 2a$

moment cinétique (spécifique):  $H(a) = r^2 \dot{\theta} = \sqrt{GMa(1 - e^2)}$

## description épicyclique



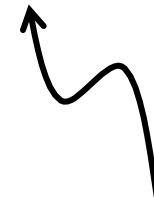
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos(\nu)} = \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos(L-\varpi)}$$

$$r^2 \dot{L} = cste$$

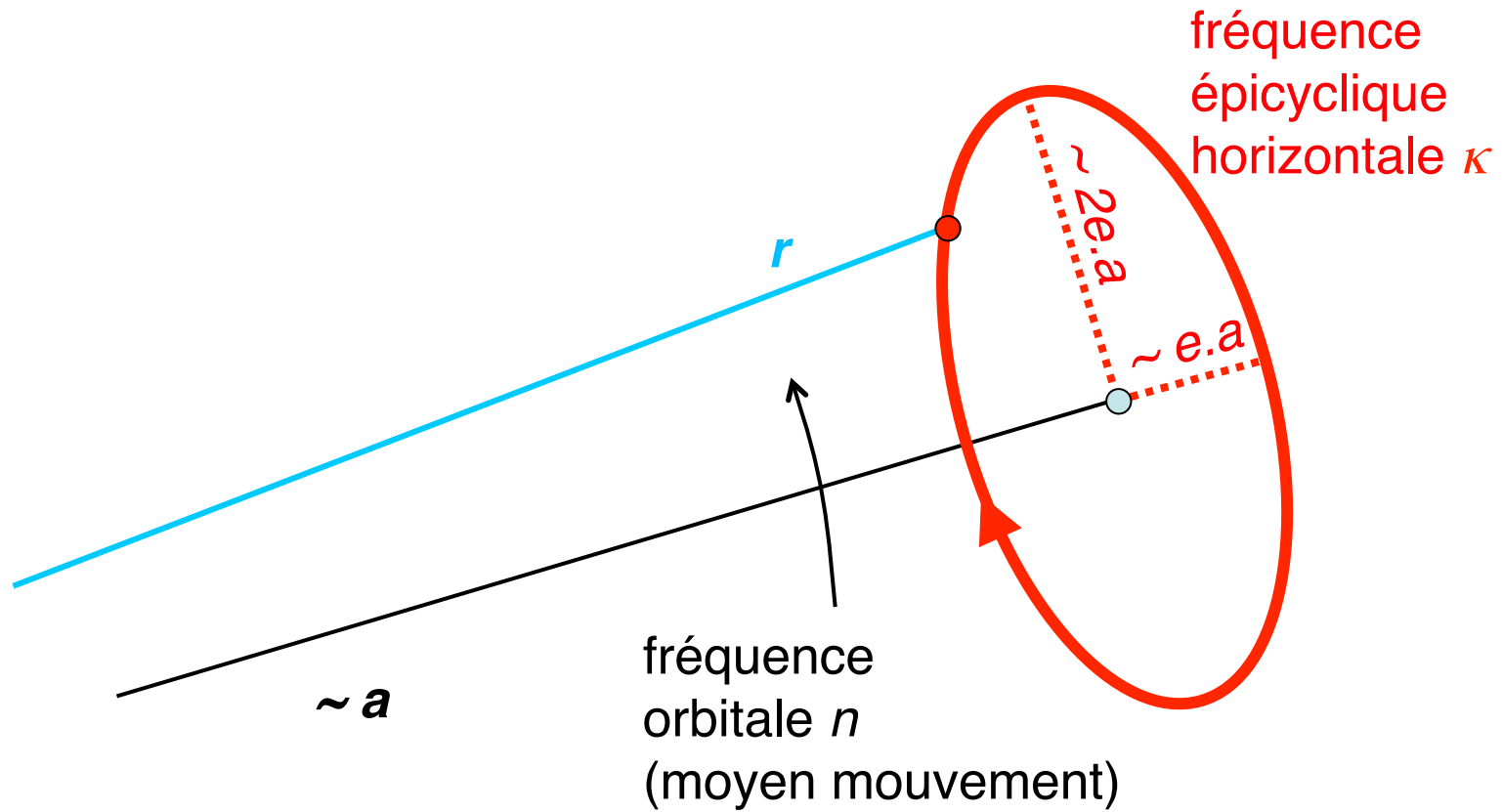
alors...

$$r \approx a[1 - e.\cos(\lambda - \varpi)] = a[1 - e.\cos(M)] + O(e^2)$$

$$L \approx \lambda + 2e.\sin(\lambda - \varpi) = \lambda + 2e.\sin(M) + O(e^2)$$



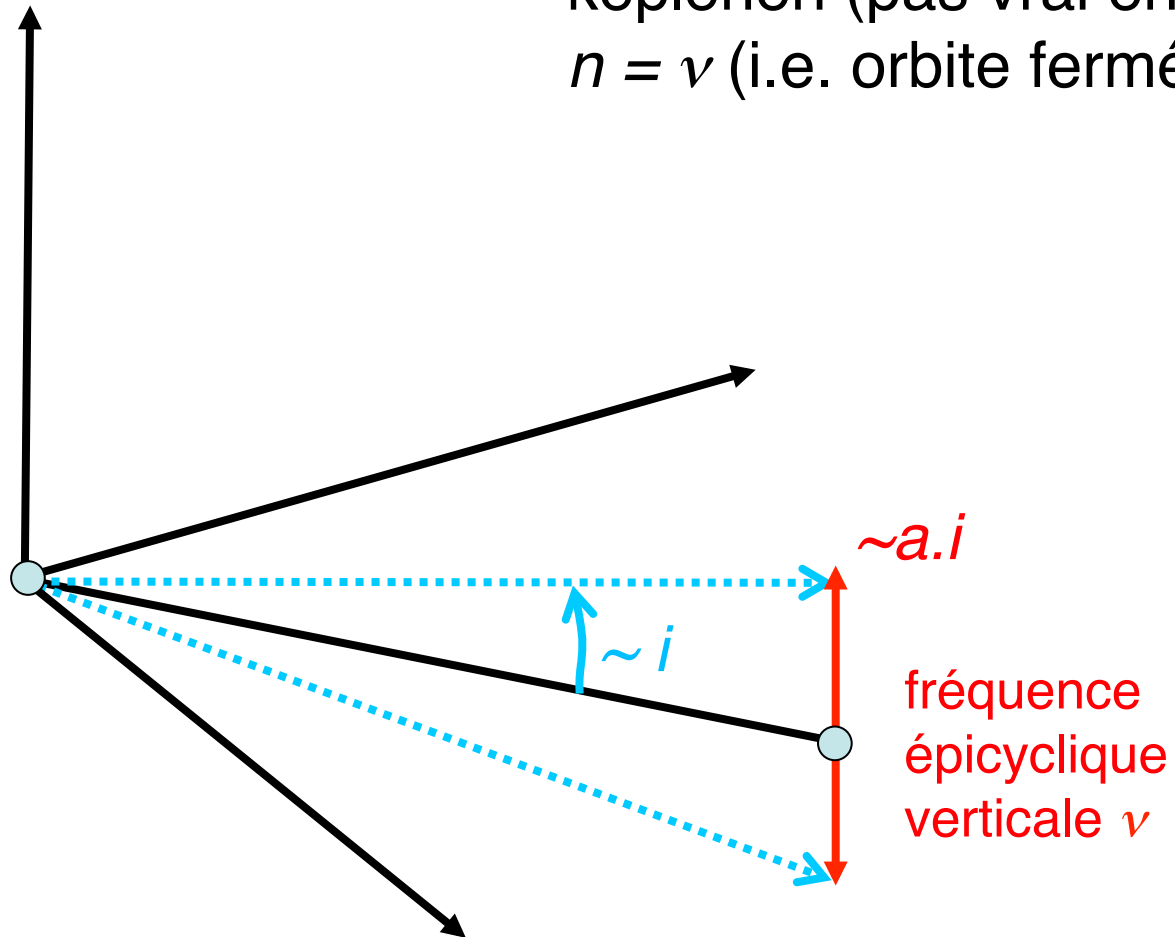
montrer que le "2" vient de  $r^2\dot{L} = \text{cste}$  (conservation du moment cinétique)



NB.: pour un mouvement *keplerien* (pas vrai en général),  
on a  $n = \kappa$  (i.e. orbite fermée)

de même:

NB. dans le cas du mouvement keplerien (pas vrai en général) on a  $n = \nu$  (i.e. orbite fermée)



remarque:

la force de gravitation entre masses ponctuelles,  $F = GMm/r^2$ , autorise **deux autres** intégrales du mouvements:

$\varpi$  et  $\Omega$

→ le mouvement keplerien est "**dégénéré**":  $n = \kappa = \nu$

mais en général: aplatissement, bulbe galactique, perturbation 3ème corps, etc....:

$$n \neq \kappa \neq \nu$$

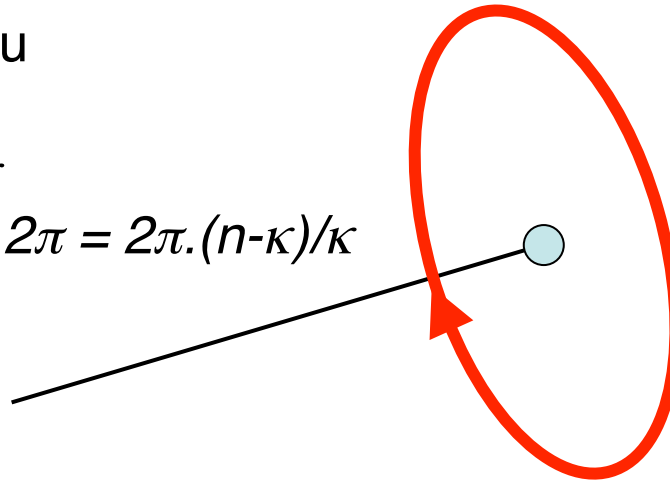
par exemple:

intervalle entre deux passages au

périapse:  $\Delta T_p = 2\pi/\kappa$

longitude parcourue:  $\Delta\theta = n \cdot 2\pi/\kappa$

"avance" du périapse:  $\Delta\varpi = \Delta\theta - 2\pi = 2\pi \cdot (n-\kappa)/\kappa$



taux de précession:  $\dot{\varpi} = \Delta\varpi/\Delta T_p = n - \kappa$

d'où:

$$\dot{\varpi} = n - \kappa$$

de même:

$$\dot{\Omega} = n - \nu$$

il y a donc trois fréquences naturelles fondamentales du mouvement:  $n$ ,  $\kappa$  et  $\nu$

qui se combinent sous forme d'harmoniques:

$$f = m.n + p.\kappa + q.\nu \text{ avec } m, p, q \text{ entiers}$$

le corps perturbateur produit lui-même des fréquences

$$f_s = m.n_s + p.\kappa_s + q.\nu_s$$

et une résonance se produit lorsque

$$f = f_s$$

en général compliqué: non-linéaire, 3 degrés de liberté ou plus...